(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

28. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.

(a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $A\,A = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $A\,A = A$? Justifique sua resposta.

29. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) As expressões $\operatorname{tr}(AA^T)$ e $\operatorname{tr}(A^TA)$ estão sempre definidas, independentemente do tamanho de A.

(b) $\operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(A^TA)$ para qualquer matriz A.

(c) Se a primeira coluna de A for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto $A\,B$.

(c) Se a primeira linha de A for toda constituída de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto $A\,B$.

30. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se A é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então $A\,A$ tem duas linhas idênticas.

(b) Se A é uma matriz quadrada e $A\,A$ tem uma coluna toda constituída de zeros então necessariamente A tem uma coluna toda constituída de zeros

(c) Se B é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são inteiros pares positivos e se A é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são inteiros positivos, então as entradas de $A\,B$ e de $B\,A$ são inteiros pares positivos.

(c) Se a soma de matrizes $A\,B + B\,A$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas.

1.4 INVERSAS; REGRAS DA ARITMÉTICA MATRICIAL

Nesta seção nós vamos discutir algumas propriedades das operações aritméticas sobre matrizes. Nós veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas que algumas poucas não valem.

Propriedades das Operações Matriciais Para números reais a e b, nós sempre temos $ab = ba$, que é chamada a *lei da comutatividade para a multiplicação*. Para matrizes, contudo, AB e BA não precisam ser iguais; a igualdade pode falhar por três razões. Pode acontecer que o produto AB está definido mas o produto BA não está definido. Por exemplo, este é o caso se A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×4. Também pode ocorrer que os produtos AB e BA estão ambos definidos mas têm tamanhos diferentes. Esta é a situação se A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×2. Finalmente, como mostra o Exemplo 1, é possível ter $AB \neq BA$ mesmo se ambos produtos AB e BA estiverem definidos e tiverem o mesmo tamanho.

EXEMPLO 1 $A\,B$ e $B\,A$ não Precisam Ser Iguais

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $A\,B \neq B\,A$. ♦

Embora a lei da comutatividade para a multiplicação não seja válida na aritmética matricial, muitas leis familiares da aritmética são válidas para matrizes. O teorema a seguir dá um resumo de algumas das mais importantes e seus nomes.

Teorema 1.4.1 Propriedades da Aritmética Matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(*a*) $A + B = B + A$	**(Lei da Comutatividade para a Adição)**
(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$	**(Lei da Associatividade da Adição)**
(*c*) $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$	**(Lei da Associatividade da Multiplicação)**
(*d*) $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$	**(Lei da Distributividade à Esquerda)**
(*e*) $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$	**(Lei da Distributividade à Direita)**
(*f*) $A\,(B - C) = A\,B - A\,C$	(*j*) $(a + b)\,C = a\,C + b\,C$
(*g*) $(B - C)\,A = B\,A - C\,A$	(*k*) $(a - b)\,C = a\,C - b\,C$
(*h*) $a\,(B + C) = a\,B + a\,C$	(*l*) $a\,(b\,C) = (a\,b)\,C$
(*i*) $a\,(B - C) = a\,B - a\,C$	(*m*) $a\,(B\,C) = (a\,B)\,C = B\,(a\,C)$

Para provar as igualdades neste teorema, nós devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. Exceto pela lei da associatividade na parte (*c*), todas as provas seguem o mesmo padrão geral. Para ilustrar isto, iremos provar a parte (*d*). A prova da lei da associatividade, que é mais complicada, é delineada nos exercícios.

Prova (*d*). Nós devemos mostrar que $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho e que as entradas correspondentes são iguais. Para formar $A(B + C)$, as matrizes B e C devem ter o mesmo tamanho, digamos $m \times n$, e então a matriz A deve ter m colunas, de modo que seu tamanho é da forma $r \times m$. Isto faz de $A(B + C)$ uma matriz $r \times n$. Segue que $AB + AC$ também é uma matriz $r \times n$ e, conseqüentemente, $A(B + C)$ e $AB + AC$ têm o mesmo tamanho.

Suponha que $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$. Nós queremos mostrar que as entradas correspondentes de $A(B + C)$ e de $AB + AC$ são iguais, ou seja, que

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos valores de i e j. Pela definição de soma e produto de matrizes, entretanto, temos

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj}) \\ &= (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{im}c_{mj}) \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}\end{aligned}$$ ■

OBSERVAÇÃO. Embora as operações de adição matricial e de multiplicação matricial tenham sido definidas para pares de matrizes, as leis da associatividade (*b*) e (*c*) nos permitem escrever somas e produtos de três matrizes, como $A + B + C$ e ABC sem inserir parênteses. Isto é justificado pelo seguinte fato: onde quer que os parênteses sejam inseridos, as leis da associatividade garantem que o resultado final é sempre o mesmo. Em geral, *dada qualquer soma ou qualquer produto de matrizes, podemos omitir ou inserir pares de parênteses em qualquer lugar da expressão sem afetar o resultado final.*

EXEMPLO 2 Associatividade da Multiplicação Matricial

Como uma ilustração da lei da associatividade para a multiplicação matricial, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo que $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$, conforme garante o Teorema 1.4.1*c*. ♦

Matrizes Zero Uma matriz com todas suas entradas nulas, tal como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

é chamada uma ***matriz zero*** ou ***matriz nula***. Uma matriz zero sempre será denotada por 0; se for importante enfatizar seu tamanho, nós escreveremos $0_{m\times n}$ para a matriz zero de tamanho $m \times n$. Além disto, continuando com a convenção de usar símbolos em negrito para matrizes de uma única coluna, denotamos uma matriz zero de uma coluna por $\mathbf{0}$.

Se A é uma matriz qualquer e 0 é a matriz zero de mesmo tamanho, é obvio que $A + 0 = 0 + A = A$. A matriz 0 desempenha, portanto, nesta equação matricial o mesmo papel que o número 0 desempenha na equação numérica $a + 0 = 0 + a = a$.

Como nós já sabemos que algumas das regras da aritmética dos números reais não valem na aritmética matricial, seria leviano supor que todas as propriedades do número real zero valem para a matriz zero. Por exemplo, considere os dois seguintes resultados-padrão da aritmética dos números reais.

- Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$. (Esta é chamada a *lei de cancelamento*).
- Se $ad = 0$, então pelo menos um dos fatores à esquerda é 0.

Como o próximo exemplo mostra, os resultados correspondentes não são válidos, em geral, na aritmética matricial.

EXEMPLO 3 A Lei de Cancelamento não Vale

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Você deveria verificar que

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, embora $A \neq 0$, é *incorreto* cancelar A de ambos os lados da equação $AB = AC$ e escrever $B = C$. Também $AD = 0$, embora $A \neq 0$ e $D \neq 0$. Assim, a lei de cancelamento não é válida para a multiplicação matricial e é possível um produto de matrizes ser zero sem que nenhum dos fatores seja zero. ♦

Não obstante o exemplo acima, existem várias propriedades familiares do número real 0 que *valem* para as matrizes zero. O teorema a seguir dá um resumo de algumas das mais importantes. As provas são deixadas como exercícios.

Teorema 1.4.2 Propriedades das Matrizes Zero

Supondo que os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(*a*) $A + 0 = 0 + A = A$
(*b*) $A - A = 0$
(*c*) $0 - A = -A$
(*d*) $A0 = 0$; $0A = 0$

Matrizes Identidade De especial interesse são as matrizes quadradas com entradas 1 na diagonal principal e com entradas 0 fora da diagonal principal, tais como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e assim por diante.}$$

Uma matriz desta forma é chamada uma ***matriz identidade*** e é denotada por I. Se for importante enfatizar seu tamanho, nós escreveremos I_n para a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Se A é uma matriz $m \times n$, então, como ilustra o seguinte exemplo,

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_mA = A$$

Assim, uma matriz identidade desempenha na aritmética matricial o mesmo papel que o número 1 desempenha nas relações numéricas $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

EXEMPLO 4 Multiplicação por uma Matriz Identidade

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Então

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

e

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$ ♦

As matrizes identidade surgem naturalmente no estudo da forma escalonada reduzida por linhas de matrizes *quadradas*, como mostra o próximo teorema.

Teorema 1.4.3

Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz A $n \times n$, então ou R tem uma linha de zeros ou R é a matriz identidade I_n.

Prova. Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A é

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

De duas uma: ou a última linha desta matriz é constituída inteiramente de zeros ou não. Se não, a matriz não contém linhas nulas e conseqüentemente cada uma de suas n linhas tem um pivô 1. Como estes pivôs ocorrem progressivamente para a direita à medida que descemos pelas linhas, cada um deve ocorrer na diagonal principal. Como as demais entradas na mesma coluna são zeros, R deve ser I_n. Assim, ou R tem uma linha de zeros ou $R = I_n$. ■

Definição

Dada uma matriz quadrada A, se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é ***invertível*** e que B é uma ***inversa*** de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B então diremos que A é ***não-invertível*** ou ***singular***.

EXEMPLO 5 Verificando as Exigências de Invertibilidade

A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

pois

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$ ♦

EXEMPLO 6 Uma Matriz sem Inversa

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

é singular. Para ver por que, seja

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

uma matriz 3×3 qualquer. A terceira coluna de BA é

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ♦

Propriedades das Inversas É razoável perguntar se uma matriz invertível pode ter mais de uma inversa. O próximo teorema mostra que a resposta é não—uma matriz invertível tem exatamente uma inversa.

Teorema 1.4.4

Se B e C são ambas inversas da matriz A, então B = C.

Prova. Como B é uma inversa de A, nós temos $BA = I$. Multiplicando ambos os lados pela direita por C dá $(BA)C = IC = C$. Mas $(BA)C = B(AC) = BI = B$, de modo que $C = B$. ■

Como uma conseqüência deste importante resultado, nós po-demos agora falar "da" inversa de uma matriz invertível. Se A é invertível, então sua inversa será denotada pelo símbolo A^{-1}. Assim,

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I$$

A inversa de A desempenha, portanto, na aritmética matricial o mesmo papel que o recíproco a^{-1} desempenha nas relações numéricas $aa^{-1} = 1$ e $a^{-1}a = 1$.

Na próxima seção nós iremos desenvolver um método para encontrar a inversa de matrizes invertíveis de qualquer tamanho; no entanto, o próximo teorema dá condições sob as quais uma matriz 2×2 é invertível e fornece uma fórmula simples para a inversa.

Teorema 1.4.5

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$, caso em que a inversa é dada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Prova. Nós deixamos ao leitor verificar que $AA^{-1} = I_2$ e que $A^{-1}A = I_2$. ■

Teorema 1.4.6

Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Prova. Se nós conseguirmos mostrar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, então teremos mostrado, simultaneamente, que a matriz AB é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Mas $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Um argumento similar mostra que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. ■

Este resultado pode ser estendido para incluir três ou mais fatores, mas isto não será provado aqui; ou seja, vale que

O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem inversa.

EXEMPLO 7 Inversa de um Produto

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Aplicando a fórmula do Teorema 1.4.5, obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Também

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como garante o Teorema 1.4.6. ♦

Potências de uma Matriz A seguir, vamos definir potências de matrizes quadradas e discutir suas propriedades.

Definição

Se A é uma matriz quadrada, definimos as potências inteiras não-negativas de A por

$$A^0 = I \qquad A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ fatores}} \quad (n > 0)$$

Além disto, se A é invertível, então definimos as potências inteiras negativas por

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ fatores}}$$

Como esta definição é idêntica à de potências de números reais, valem as leis usuais de expoentes. (Omitimos os detalhes.)

Teorema 1.4.7 **Leis de Expoentes**

Se A é uma matriz quadrada e r e s são inteiros, então

$$A^rA^s = A^{r+s}, \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

O próximo teorema fornece algumas propriedades úteis de expoentes negativos.

Teorema 1.4.8 **Leis de Expoentes**

Se A é uma matriz invertível, então

(*a*) *A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.*
(*b*) *A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.*
(*c*) *Para qualquer escalar não-nulo k, a matriz kA é invertível e $(kA)^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)A^{-1}$.*

Prova.

(a) Como $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, a matriz A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
(b) Esta parte é deixada como exercício.
(c) Se k é qualquer escalar não-nulo, os resultados (l) e (m) do Teorema 1.4.1 permitem-nos escrever

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

Similarmente, $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$ e portanto kA é invertível e $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$. ■

EXEMPLO 8 Potências de uma Matriz

Sejam A e A^{-1} as matrizes do Exemplo 7, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$ ♦

Expressões Polinomiais Envolvendo Matrizes

Se A é uma matriz quadrada, digamos $m \times m$, e se

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$

é um polinômio qualquer, então nós definimos

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$$

onde I é a matriz identidade $m \times m$. Em palavras, $p(A)$ é a matriz $m \times m$ que resulta quando x é substituído por A em (1) e a_0 é substituído por a_0I.

EXEMPLO 9 Polinômio Matricial

Se

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

então

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$ ♦

Propriedades da Transposta O próximo teorema lista as principais propriedades da operação de transposição.

Teorema 1.4.9 Propriedades da Transposta

Se os tamanhos das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, então

(a) $((A)^T)^T = A$
(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *e* $(A - B)^T = A^T - B^T$
(c) $(kA)^T = kA^T$, *onde* k *é um escalar qualquer*
(d) $(AB)^T = B^TA^T$

Lembrando que transpondo uma matriz trocamos entre si suas linhas e colunas, as partes (a), (b) e (c) deveriam ser evidentes. Por exemplo, a parte (a) afirma que trocando entre si as linhas e as colunas duas vezes, a matriz fica inalterada; a parte (b) assegura que somando e depois trocando entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que primeiro trocando entre si as linhas e colunas e depois somando; e a parte (c) assegura que multiplicando por um escalar e depois trocando entre si as linhas e colunas dá o mesmo resultado que primeiro trocando entre si as linhas e colunas e depois multiplicando por um escalar. A parte (d) não é tão óbvia, por isso apresentamos sua prova.

Prova (d). Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times r}$ e $B = [b_{ij}]_{r\times n}$ e assim os produtos AB e B^TA^T estão definidos. Deixamos ao leitor conferir que $(AB)^T$ e B^TA^T têm o mesmo tamanho, a saber, $n \times m$. Assim, resta mostrar que as entradas correspondentes de $(AB)^T$ e B^TA^T são iguais, ou seja,

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (B^TA^T)_{ij} \tag{2}$$

Aplicando a Fórmula (11) da Seção 1.3 ao lado esquerdo desta equação e usando a definição de multiplicação de matrizes, obtemos

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \tag{3}$$

Para calcular o lado direito de (2) é conveniente deixar a'_{ij} e b'_{ij} denotar as ij-ésimas entradas de A^T e B^T, respectivamente, de modo que

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad \text{e} \quad b'_{ij} = b_{ji}$$

Destas relações e da definição de multiplicação de matrizes, nós obtemos

$$\begin{aligned}(B^TA^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj} \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}\end{aligned}$$

Isto, junto com (3), prova (2). ■

A parte (d) deste teorema pode ser estendida para incluir três ou mais fatores, coisa que não provaremos aqui; ou seja, vale que

A transposta de um produto de um número qualquer de matrizes é igual ao produto de suas transpostas em ordem inversa.

OBSERVAÇÃO. Note a semelhança entre este resultado e o que segue o Teorema 1.4.6 sobre a inversa de um produto de matrizes.

Invertibilidade de uma Transposta O teorema a seguir estabelece uma relação entre a inversa de uma matriz invertível e a inversa de sua transposta.

Teorema 1.4.10

Se A é uma matriz invertível, então A^T também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{4}$$

Prova. Nós podemos provar a invertibilidade de A^T e obter (4) mostrando que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

Mas lembrando da parte (*d*) do Teorema 1.4.9 e observando que $I^T = I$, segue-se que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$
$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

o que completa a prova. ■

EXEMPLO 10 Verificando o Teorema 1.4.10

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1.4.5 obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Como garante o Teorema 1.4.10, estas matrizes satisfazem (4). ♦

Conjunto de Exercícios 1.4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$
(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$
(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^T A^T$

4. Use o Teorema 1.4.5 para calcular as inversas das seguintes matrizes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Use as matrizes A e B do Exercício 4 para verificar que

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (b) $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$

6. Use as matrizes A, B e C do Exercício 4 para verificar que

(a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

7. Em cada parte use a informação dada para encontrar A.

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

8. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3, A^{-3} e $A^2 - 2A + I$.

9. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte encontre $p(A)$.

(a) $p(x) = x - 2$ (b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ (c) $p(x) = x^3 - 2x + 4$

10. Sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$.

(a) Mostre que $p_1(A) = p_2(A)\,p_3(A)$ para a matriz do Exercício 9.

(b) Mostre que $p_1(A) = p_2(A)\,p_3(A)$ para qualquer matriz quadrada A.

11. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

12. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

13. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

14. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

15. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

16. Será necessariamente invertível a soma de duas matrizes invertíveis?

17. Sejam A e B matrizes quadradas tais que $AB = 0$. Mostre que se A é invertível, então $B = 0$.

18. Sejam A, B e 0 matrizes 2×2. Supondo que A é invertível, encontre uma matriz C tal que

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline C & A^{-1} \end{array}\right]$$

é a inversa da matriz particionada

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right]$$

(Veja Exercício 15 da seção anterior.)

19. Use o resultado do Exercício 18 para encontrar as inversas das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. (a) Encontre uma matriz não-nula A de tamanho 3×3 tal que $A^T = A$.

(b) Encontre uma matriz não-nula A de tamanho 3×3 tal que $A^T = -A$.

21. Uma matriz quadrada A é chamada ***simétrica*** se $A^T = A$ e ***anti-simétrica*** se $A^T = -A$. Mostre que se B é uma matriz quadrada, então

(a) BB^T e $B + B^T$ são simétricas. (b) $B - B^T$ é anti-simétrica.

22. Se A é uma matriz quadrada e n é um inteiro positivo, é verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$?

23. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [***Sugestão.*** Resolva $AX = I$ igualando entradas correspondentes de ambos os lados.]

24. Prove:
   (a) a parte (*b*) do Teorema 1.4.1
   (b) a parte (*i*) do Teorema 1.4.1
   (c) a parte (*m*) do Teorema 1.4.1
25. Aplique as partes (*d*) e (*m*) do Teorema 1.4.1 às matrizes A, B e $(-1)\,C$ para deduzir o resultado da parte (*f*).
26. Prove o Teorema 1.4.2.
27. Considere as leis de expoentes $A^r A^s = A^{r+s}$ e $(A^r)^s = A^{rs}$.
   (a) Mostre que se A é uma matriz quadrada, estas leis são válidas para quaisquer inteiros não negativos r e s.
   (b) Mostre que se A é invertível, estas leis valem para quaisquer inteiros negativos r e s.
28. Mostre que se A é invertível e k é um escalar não-nulo qualquer, então $(kA)^n = k^n A^n$ para qualquer inteiro n.
29. (a) Mostre que se A é invertível e $AB = AC$, então $B = C$.
   (b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.
30. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.1.
   [***Sugestão.*** Suponha que A é $m \times n$, B é $n \times p$ e C é $p \times q$. A ij-ésima entrada do lado esquerdo é $l_{ij} = a_{i1}[BC]_{1j} + a_{i2}[BC]_{2j} + \cdots + a_{in}[BC]_{nj}$ e a ij-ésima entrada do lado direito é $r_{ij} = [AB]_{i1}c_{1j} + [AB]_{i2}c_{2j} + \cdots + [AB]_{ip}c_{pj}$. Verifique que $l_{ij} = r_{ij}$.]

Discussão e Descoberta

31. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
   (a) Dê um exemplo em que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2\,A\,B + B^2$.
   (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A + B)^2 = A^2 + B^2 +$ ____________.
32. Sejam A e B matrizes quadradas de mesmo tamanho.
   (a) Dê um exemplo em que $(A + B)\,(B - A) \neq A^2 - B^2$.
   (b) Preencha a lacuna para criar uma identidade que é válida para quaisquer A e B. $(A + B)\,(B - A) =$ ____________.
33. No sistema dos números reais, a equação $a^2 = 1$ tem exatamente duas soluções. Encontre pelo menos oito matrizes 3×3 que satisfazem a equação $A^2 = I_3$. [***Sugestão.*** Procure soluções entre as matrizes com entradas zero fora da diagonal principal.]
34. Uma afirmação do tipo "Se p, então q" é logicamente equivalente à afirmação "Se não q, então não p." (A segunda afirmação é chamada a ***contraposição lógica*** da primeira.) Por exemplo, a contraposição lógica da afirmação "Se está chovendo, então o chão está molhado" é "Se o chão não está molhado, então não está chovendo."
   (a) Encontre a contraposição lógica da afirmação: Se A^T é singular, então A é singular.
   (b) A afirmação é verdadeira ou falsa? Explique.
35. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.
   (a) $(AB)^2 = A^2 B^2$ deve ser verdadeiro.
   (b) $(A - B)^2 = (B - A)^2$ deve ser verdadeiro.
   (c) $(AB^{-1})\,(BA^{-1}) = I_n$ deve ser verdadeiro.
   (d) Nunca é verdade que $AB = BA$.

1.5 MATRIZES ELEMENTARES E UM MÉTODO PARA ENCONTRAR A^{-1}

Nesta seção nós vamos desenvolver um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz invertível. Nós também discutiremos algumas das propriedades básicas de matrizes invertíveis.

Nós começamos com a definição de um tipo especial de matriz que pode ser usada para executar uma operação elementar sobre linhas por multiplicação matricial.

Definição

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma ***matriz elementar***.

EXEMPLO 1 Matrizes Elementares e Operações sobre Linhas

Abaixo listamos quatro matrizes elementares e as operações sobre linhas que as produzem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda linha de I_2 por -3	Permute a segunda linha de I_4 com a quarta.	Some 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira.	Multiplique a primeira linha de I_3 por 1.

♦

Quando uma matriz A é multiplicada *à esquerda* por uma matriz elementar E, o efeito é o de executar uma operação elementar sobre linhas de A. Isto é enunciado no próximo teorema, cuja prova deixamos para os exercícios.

Teorema 1.5.1 **Operações sobre Linhas por Multiplicação Matricial**

Se a matriz elementar E resulta de efetuar uma certa operação sobre linhas em I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em A.

EXEMPLO 2 Usando Matrizes Elementares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere a matriz elementar

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta de somar 3 vezes a primeira linha de I_3 à terceira linha. O produto EA é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é precisamente a mesma matriz que resulta quando nós somamos 3 vezes a primeira linha de A à terceira linha. ♦

OBSERVAÇÃO. O Teorema 1.5.1 é principalmente de interesse teórico e será usado para desenvolver alguns resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares. Em termos de contas, é preferível efetuar operações sobre linhas diretamente do que multiplicar à esquerda por uma matriz elementar.

Se uma operação elementar sobre linhas é aplicada a uma matriz identidade I para produzir uma matriz elementar E, então existe uma segunda operação que, aplicada a E, produz de volta a matriz I. Por exemplo, se E é obtida multiplicando a i–ésima linha de I por uma constante não-nula c, então I pode ser recuperada se a i–ésima linha de E é multiplicada por $1/c$. As várias possibilidades estão listadas na Tabela 1. As operações do lado direito desta tabela são chamadas ***operações inversas*** das correspondentes operações do lado esquerdo.

TABELA 1

Operações sobre linhas de I que produzem E	Operações sobre linhas de E que reproduzem I
Multiplique a linha i por $c \neq 0$	Multiplique a linha i por $1/c$
Troque entre si as linhas i e j	Troque entre si as linhas i e j
Some c vezes a linha i à linha j	Some $-c$ vezes a linha i à linha j

EXEMPLO 3 Operações e Operações Inversas sobre Linhas

Em cada um dos exemplos a seguir, foi afetuada uma operação elementar na matriz identidade 2×2 para obter uma matriz elementar E e, em seguida, E foi restaurada à matriz identidade aplicando a operação inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda linha por 7. Multiplique a segunda linha por 1/7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permute a primeira linha com a segunda. Permute a primeira linha com a segunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Some 5 vezes a segunda linha à primeira Some – 5 vezes a segunda linha à primeira ♦

O próximo teorema dá uma importante propriedade de matrizes elementares.

Teorema 1.5.2

Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é, também, uma matriz elementar.

Prova. Se E é uma matriz elementar, então E é o resultado de alguma operação elementar sobre linhas de I. Seja E_0 a matriz que resulta quando é efetuada a operação inversa em I. Aplicando o Teorema 1.5.1 e lembrando que operações e suas inversas se cancelam mutuamente, segue que

$$E_0E = I \text{ e } EE_0 = I$$

Assim, a matriz elementar E_0 é a inversa de E. ■

O próximo teorema estabelece algumas relações fundamentais entre invertibilidade, sistemas lineares homogêneos, formas escalonadas reduzidas por linhas e matrizes elementares. Estes resultados são extremamente importantes e vão ser usados muitas vezes nas próximas seções.

Teorema 1.5.3 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

Prova. Nós vamos provar a equivalência destas afirmações estabelecendo a cadeia de implicações: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

***(a)* ⇒ *(b)*.** Suponha que A é invertível e seja $\mathbf{x}_0$ uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; assim, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Multiplicando ambos os lados desta equação pela matriz A^{-1} dá $A^{-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{-1}\mathbf{0}$, ou então, $(A^{-1}A)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou ainda, $I\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Assim, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

***(b)* ⇒ *(c)*.** Seja $A\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$ a forma matricial do sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{1}$$

e suponha que o sistema só admite a solução trivial. Se nós resolvermos por eliminação de Gauss-Jordan, então o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada será

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = 0 \end{array} \tag{2}$$

Assim, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

de (1) pode ser reduzida à matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de (2) por uma seqüência de operações elementares sobre linhas. Se nós desconsiderarmos a última coluna (de zeros) em cada uma destas matrizes, poderemos concluir que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.

***(c)* ⇒ *(d)*.** Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n, de modo que A pode ser reduzida a I_n por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas. Pelo Teorema 1.5.1, cada uma destas operações pode ser efetuada por uma matriz elementar apropriada. Assim, nós podemos encontrar matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{3}$$

Pelo Teorema 1.5.2, as matrizes $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são invertíveis. Multiplicando ambos os lados da Equação (3) pela esquerda sucessivamente por $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$, nós obtemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{4}$$

Pelo Teorema 1.5.2, esta equação expressa A como um produto de matrizes elementares.

***(d)* ⇒ *(a)*.** Se A é um produto de matrizes elementares, então dos Teoremas 1.4.6 e 1.5.2 segue que a matriz A é um produto de matrizes invertíveis, e portanto invertível. ■

Equivalência por Linhas Se uma matriz B pode ser obtida de uma matriz A efetuando uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas, então obviamente podemos recuperar B de volta de A efetuando as inversas destas operações elementares sobre linhas na ordem inversa. As matrizes que podem ser obtidas uma da outra por uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas são ditas matrizes ***equivalentes por linhas***. Com esta terminologia, segue das partes (*a*) e (*c*) do Teorema 1.5.3 que uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade $n \times n$.

Um Método para Inverter Matrizes Como nossa primeira aplicação do Teorema 1.5.3, vamos estabelecer um método para determinar a inversa de uma matriz invertível. Multiplicando (3) pela direita por A^{-1}, dá

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{5}$$

que informa que A^{-1} pode ser obtida multiplicando I_n sucessivamente à esquerda pelas matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Como cada multiplicação à esquerda por uma destas matrizes elementares efetua uma operação sobre linhas, resulta, comparando as Equações (3) e (5), que *a seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz A a I_n também reduz I_n a A^{-1}*. Assim, temos o seguinte resultado:

Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, nós devemos encontrar uma seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz A à identidade e depois efetuar esta mesma seqüência de operações em I_n para obter A^{-1}.

Um método simples para executar este procedimento é dado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4 Usando Operações sobre Linhas para Encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós queremos reduzir A à matriz identidade por operações sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a I para produzir A^{-1}. Para conseguir isto, nós vamos adjuntar a matriz identidade à direita de A, com isto produzindo uma matriz da forma

$$[A \mid I]$$

Em seguida nós iremos aplicar operações sobre linhas desta matriz até que o lado esquerdo esteja reduzido a I; estas operações vao converter o lado direito a A^{-1}, de modo que a matriz final terá a forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

As contas são as seguintes:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e −1 vezes a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos 2 vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós multiplicamos a terceira linha por −1.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos 3 vezes a terceira linha à segunda e −3 vezes a terceira à primeira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos −2 vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

♦

Muitas vezes nós não sabemos, de antemão, se uma dada matriz é ou não invertível. Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ não é invertível, então ela não pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas [parte (*c*) do Teorema 1.5.3]. Dito de outra maneira, a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros. Assim, se o procedimento do último exemplo for tentado em uma matriz que não é invertível, então em algum ponto das contas vai aparecer uma linha de zeros *no lado esquerdo*. Pode-se então concluir que a dada matriz não é invertível e parar as contas.

EXEMPLO 5 Mostrando que uma Matriz não É Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4 dá

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível. ♦

EXEMPLO 6 Uma Conseqüência da Invertibilidade

No Exemplo 4 nós mostramos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz invertível. Do Teorema 1.5.3 segue que o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\;\; + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tem somente a solução trivial. ♦

Conjunto de Exercícios 1.5

1. Quais das seguintes matrizes são elementares?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontre uma operação sobre linhas que retorna a matriz elementar dada a uma matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que

(a) $E_1 A = B$ (b) $E_2 B = A$ (c) $E_3 A = C$ (d) $E_2 C = A$

4. No Exercício 3, é possível encontrar uma matriz elementar E tal que $E\,B = C$? Justifique sua resposta.

Nos Exercícios 5–7, use o método mostrado nos Exemplos 4 e 5 para encontrar a inversa da matriz dada se a matriz é invertível e confira sua resposta por multiplicação.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes 4×4, onde k_1, k_2, k_3, k_4 e k_5 são todos não-nulos.

(a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2 E_1 A = I$.

(b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.

(c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

10. Em cada parte, efetue a operação sobre linhas dada na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

multiplicando A à esquerda por uma matriz elementar conveniente. Confira sua resposta em cada caso executando a operação sobre linhas diretamente em A.

(a) Permute a primeira e terceira linhas.

(b) Multiplique a segunda linha por $\frac{1}{3}$.

(c) Some duas vezes a segunda linha à primeira.

11. Expresse a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

no formato $A = E\,F\,G\,R$, onde E, F e G são matrizes elementares e R está em forma escalonada por linhas.

12. Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, então pelo menos uma entrada da terceira linha deve ser um zero.

13. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para qualquer valor das entradas.

14. Prove que se A é uma matriz $m \times n$, então existe uma matriz invertível C tal que $C\,A$ está em forma escalonada reduzida por linhas.

15. Prove que se A é uma matriz invertível e B é equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

16. (a) Prove: Se A e B são matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e somente se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

(b) Mostre que A e B são equivalentes por linhas e encontre uma seqüência de operações elementares por linhas que produz B a partir de A, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Prove o Teorema 1.5.1.

Discussão e Descoberta

18. Suponha que A é alguma matriz invertível desconhecida, mas que você conhece uma seqüência de operações elementares por linhas que produz a matriz identidade quando efetuada sucessivamente em A. Explique como você pode usar a informação disponível para encontrar A.

19. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Toda matriz quadrada pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

(b) O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar.

(c) Se A é uma matriz invertível e um múltiplo da primeira linha de A é somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

(d) Se A é invertível e $A\,B = 0$, então é necessariamente verdade que $B = 0$.

20. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros.

(c) Se A^{-1} pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogêneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(d) Se A é uma matriz $n \times n$ singular e B resulta da permutação de duas linhas de A, então B pode ser ou não ser singular.

21. Você acredita que existe uma matriz A de tamanho 2×2 tal que

$$A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

para todos valores de a, b, c e d ? Explique seu raciocínio.