Definição 1. Se A é uma matriz $n \times n$, um número λ é dito *auto-valor de* A se existe um vetor **não-nulo** $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Nesse caso nós dizemos que x é um *auto-vetor de* A *associado ao auto-valor* λ.

Segue da definição que λ é um auto-valor da matriz A se, e somente se,

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0,$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ (do mesmo "tamanho"da matriz A).
Agora note que $(\lambda I - A)x = 0$ é um sistema linear com n equações e n incógnitas homogênio. De fato, observe que se

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

então nós temos que

$$(\lambda I - A)x = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 + \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 + \cdots - a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2} + \cdots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Logo, $(\lambda I - A)x = 0$ é um sistema linear $n \times n$ homogênio.
Sabemos que um sistema linear homogênio (SLH) ou tem uma única solução, que é a solução nula, ou tem infinitas soluções. Sabemos também que um sistema linear tem uma única solução se, e somente se, a matriz associada ao sistema é invertível. Assim se $Bx = 0$ é um SLH e B é uma matriz invertível, então

$$Bx = 0 \Leftrightarrow B^{-1}(Bx) = B^{-1}0 \Leftrightarrow (B^{-1}B)x = 0 \Leftrightarrow Ix = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Portanto o vetor nulo $x = 0$ é a única solução do sistema $Bx = 0$ onde B é invertível. E, além disso, nós sabemos que a matriz B é invertível se, e somente se, $\det(B) \neq 0$.
Sendo assim, segue da Definição 1 que a matriz $\lambda I - A$, que é a matriz associada ao SLH $(\lambda I - A)x = 0$, não pode ser invertível, uma vez que estamos exigindo (por definição) que o vetor x deve ser não-nulo.
Sendo assim, concluímos que os números λ que satisfazem a Definição 1 são aqueles cujo

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

A última condição nos sugere a seguinte definição:

Definição 2. Se A é uma matriz $n \times n$, o *polinômio característico* $c_A(\lambda)$ de A é definido por

$$c_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Note que $c_A(\lambda)$ é de fato um polinômio na variável λ e, desde que A seja $n \times n$, $c_A(\lambda)$ tem grau n.

Teorema 1. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

1. *Os auto-valores de A são as raízes do polinômio característico $c_A(\lambda)$, isto é, são os valores λ cujo*
$$c_A(\lambda) = 0;$$

2. *Os auto-vetores x de A associado ao auto-valor λ são as soluções não-nulas do SLH*
$$(\lambda I - A)x = 0$$
dado em $(*)$.

Exemplo 1. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vamos determinar o polinômio característico, os auto-valores e auto-vetores de A.

1°) Determinamos a matriz $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

2°) Vamos calcular $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Portanto, o polinômio característico da matriz A é: $\boxed{c_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8}$.

3°) Vamos calcular as raízes de $c_A(\lambda)$, isto é, vamos calcular para quais valores de λ $c_A(\lambda) = 0$.

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 4 \;\; \lambda_2 = -2.$$

Portanto os auto-valores de A são

$$\boxed{\lambda_1 = 4 \;\; \lambda_2 = -2}\,.$$

4°) Agora vamos calcular os auto-vetores de A associados aos auto-valores λ_1 e λ_2. Para tanto, vamos estudar as soluções dos sistemas

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \;\text{ e }\; (\lambda_2 I - A)x_2 = 0$$

a) $(\lambda_1 I - A)x_1 = 0$:

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - 3 & -5 \\ -1 & \lambda_1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 - 3 & -5 \\ -1 & 4 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui podemos resolver o sistema da forma convencional, isto é,

$$\begin{cases} x_{11} - 5x_{21} = 0 \\ -x_{11} + 5x_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = 5x_{21} \\ x_{11} = 5x_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \text{se } \; x_{21} = t \text{ então } \; x_{11} = 5t.$$

Assim, $x_1 = \begin{bmatrix} 5t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$.

b) $(\lambda_2 I - A)x_2 = 0$:

$$(\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_2 - 3 & -5 \\ -1 & \lambda_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 - 3 & -5 \\ -1 & -2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou podemos resolver o sistema via escalonamento, isto é,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5}L_1]{L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \;\; x_{12} + x_{22} = 0 \Leftrightarrow x_{22} = -x_{12}$$

$$\Leftrightarrow \;\; \text{se } \; x_{22} = t \; \text{ então } \; x_{12} = -t.$$

Assim, $x_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$.

Portanto, $\boxed{x_1 = t_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_2 = t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, onde $t_1, t_2 \neq 0$ são os auto-vetores de A associados aos auto-valores λ_1 e λ_2, respectivamente. □

No exemplo acima, fica claro que A possui infinitos auto-vetores associados aos auto-valores λ_1 e λ_2. De fato, para todo valor real $t_1, t_2 \neq 0$ nós temos um auto-vetor associado. Isto é, qualquer múltiplo não-nulo dos vetores $x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é outro auto-vetor associado à λ_1 e λ_2, respectivamente. (*Obs.: Alguns múltiplos podem ser mais convenientes do que outros.*)

Assim, no exemplo anterior, podemos dizer que $x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são os auto-vetores básicos de A associados aos auto-valores λ_1 e λ_2.