# 3

# Vetores nos Espaços Bi e Tridimensionais

## Conteúdo do Capítulo



INTRODUÇÃO: Muitas quantidades físicas, tais como área, comprimento, massa e temperatura ficam completamente determinadas assim que for dada sua magnitude. Tais quantidades são denominadas ***escalares***. Outras quantidades físicas não ficam determinadas completamente enquanto não forem especificados tanto uma magnitude quanto uma direção e um sentido. Estas quantidades são denominadas ***vetoriais***. Por exemplo, o movimento do vento é usualmente descrito atribuindo-lhe uma velocidade e uma direção de onde sopra, digamos, um nordeste a 20 km/h. A velocidade do vento e sua direção e sentido formam um vetor chamado ***velocidade*** do vento. Outros exemplos de vetores são ***força*** e ***deslocamento***. Nosso objetivo neste capítulo é rever uma parte da teoria básica de vetores em duas e três dimensões.

***Nota.*** Os leitores familiarizados com o conteúdo deste capítulo podem seguir diretamente para o Capítulo 4 sem perda de continuidade.

# 3.1 INTRODUÇÃO AOS VETORES [GEOMÉTRICOS]

***Nesta seção introduzimos geometricamente os vetores nos espaços bi e tridimensionais, definimos operações algébricas com vetores e estabelecemos algumas das propriedades básicas destas operações algébricas.***

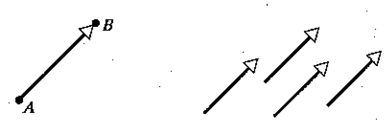
**Vetores Geométricos** Os vetores podem ser representados geometricamente como segmentos de reta orientados ou como flechas nos espaços bi e tridimensionais. A direção e o sentido da flecha especificam a direção e o sentido do vetor e o comprimento da flecha descreve sua magnitude. A cauda da flecha é chamada de ***ponto inicial*** do vetor e a ponta da flecha é o ***ponto final***. Simbolicamente, denotamos vetores por letras minúsculas em negrito (por exemplo, **a**, **k**, **v**, **w** e **x**). Quando tratarmos de vetores, chamamos os números de ***escalares***. Por enquanto, todos os nossos escalares serão números reais e serão denotados por letras minúsculas em itálico (por exemplo, $a$, $k$, $v$, $w$ e $x$).

Se o ponto inicial de um vetor **v** é $A$ e o ponto final é $B$, como na Figura 3.1.1$a$, então escrevemos

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

Vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido, tais como os da Figura 3.1.1$b$, são ditos ***equivalentes***. Como nós queremos que um vetor seja determinado somente pelo seu comprimento, direção e sentido, consideramos vetores equivalentes como sendo ***iguais*** mesmo quando estiverem localizados em posições diferentes. Se **v** e **w** são equivalentes, escrevemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$




($a$) O vetor $\overrightarrow{AB}$ ($b$) Vetores equivalentes
**Figura 3.1.1**

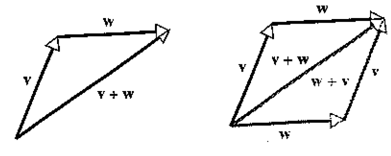
**Definição**

Sejam **v** e **w** dois vetores quaisquer. A ***soma*** de **v** com **w** é o vetor **v** + **w** determinado da seguinte maneira: posicione o vetor **w** de tal maneira que seu ponto inicial coincide com o ponto final do vetor **v**. O vetor **v** + **w** é representado pela flecha do ponto inicial de **v** ao ponto final de **w** (Figura 3.1.2$a$).

Na Figura 3.1.2$b$ construímos duas somas, **v** + **w** (flechas coloridas) e **w** + **v** (flechas cinza). É evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

e que a soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por **v** e **w** quando estes vetores são posicionados com o mesmo ponto inicial.




($a$) A soma **v** + **w** ($b$) **v** + **w** = **w** + **v**
**Figura 3.1.2**

O vetor de comprimento zero é chamado ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** e denotado por **0**. Definimos

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

para cada vetor **v**. Como não há uma direção natural para o vetor nulo, concordamos que, dependendo do problema, o vetor nulo tem a direção e sentido que for mais conveniente. Se **v** é um vetor não-nulo qualquer, então –**v**, o negativo de **v**, é definido como o vetor de mesma magnitude e direção de **v** mas de sentido oposto (Figura 3.1.3). Este vetor tem a propriedade

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

(Por que?) Além disto, definimos – **0** = **0**. A subtração de vetores é definida como segue.

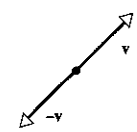



**Figura 3.1.3**

O negativo de v tem o mesmo comprimento e a mesma direção de v, mas sentido oposto.

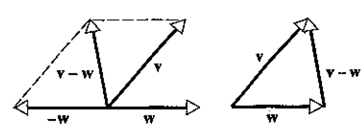
**Definição**

Se **v** e **w** são dois vetores quaisquer então a ***diferença*** de **w** por **v** é definida por

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

(Figura 3.1.4$a$).

Para obter a diferença **v** – **w** sem construir –**w**, posicione **v** e **w** de tal modo que seus pontos iniciais coincidam; o vetor do ponto final de **w** ao ponto final de **v** então é o vetor **v** – **w** (Figura 3.1.4$b$).




($a$) ($b$)
**Figura 3.1.4**

**Definição**

Se **v** é um vetor não-nulo e $k$ é um número real (escalar) não-nulo, então o ***produto*** $k$**v** é definido como o vetor de mesma direção de **v** cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de **v** e cujo sentido é o mesmo de **v** se $k > 0$ e oposto ao de **v** se $k < 0$. Nós definimos $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se $k = 0$ ou se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A Figura 3.1.5 ilustra a relação entre um vetor **v** e os vetores $\frac{1}{2}$**v**, (–1)**v**, 2**v** e (–3)**v**. Note que o vetor (–1)**v** tem o mesmo comprimento que **v**, mas sentido oposto. Assim, (–1)**v** é simplesmente o negativo de **v**, ou seja,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Um vetor da forma $k\mathbf{v}$ é chamado ***múltiplo escalar*** de **v**. Como é visível na Figura 3.1.5, vetores que são múltiplos escalares um do outro são paralelos. Reciprocamente, pode ser mostrado que vetores paralelos não-nulos são múltiplos escalares um do outro. Nós omitimos a prova.

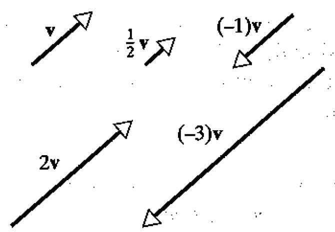



**Figura 3.1.5**

**Vetores em Sistemas de Coordenadas** A introdução de um sistema de coordenadas retangulares muitas vezes simplifica problemas envolvendo vetores. Por enquanto vamos restringir nossa discussão a vetores no espaço bidimensional (o plano). Seja **v** qualquer vetor no plano e suponha, como na Figura 3.1.6, que **v** tenha sido posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares. As coordenadas $(v_1, v_2)$ do ponto final de **v** são chamadas ***componentes de*** **v** e escrevemos

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

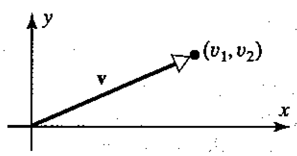



**Figura 3.1.6** $v_1$ e $v_2$ são os componentes de **v**.

Se vetores equivalentes **v** e **w** são colocados com seus pontos iniciais na origem, então é óbvio que seus pontos finais coincidem (pois os vetores têm o mesmo comprimento, direção e sentido); logo os vetores possuem os mesmos componentes. Reciprocamente, vetores com os mesmos componentes são equivalentes pois têm o mesmo comprimento, direção e sentido. Em resumo, dois vetores

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

são equivalentes se e somente se

$$v_1 = w_1 \quad \text{e} \quad v_2 = w_2$$

As operações vetoriais de adição e multiplicação por escalar são facilmente executáveis em termos de componentes. Como é ilustrado na Figura 3.1.7, se

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{1}$$

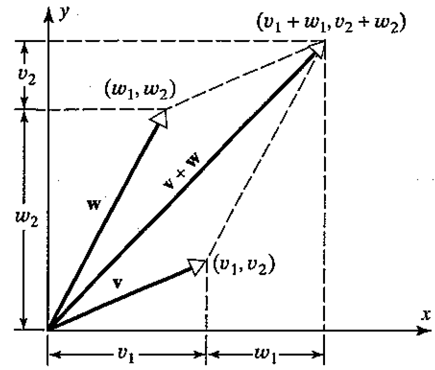



**Figura 3.1.7**

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $k$ é um escalar qualquer então pode ser mostrado, usando um argumento geométrico envolvendo triângulos semelhantes (Exercício 15), que

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{2}$$

(Figura 3.1.8). Assim, por exemplo, se **v** = (1, –2) e **w** = (7, 6) então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

e

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

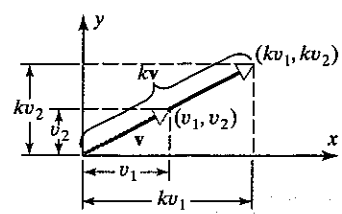


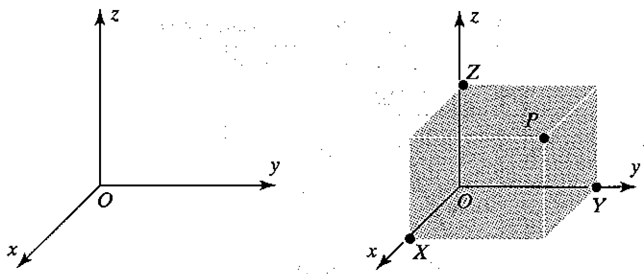

**Figura 3.1.8**

Como **v** – **w** = **v** + (–**w**), segue das Fórmulas (1) e (2) que

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

(Verifique.)

**Vetores no Espaço Tridimensional** Assim como os vetores no plano podem ser descritos por pares de números reais, os vetores no espaço podem ser descritos por ternos de números reais utilizando um sistema de ***coordenadas retangulares***. Para construir um tal sistema de coordenadas, selecionamos um ponto $O$, denominado a ***origem*** e escolhemos três retas mutuamente perpendiculares passando pela origem, denominadas ***eixos coordenados***. Designe estes eixos $x$, $y$ e $z$ e selecione um sentido positivo para cada eixo coordenado, bem como uma unidade de comprimento para medir tamanhos (Figura 3.1.9*a*). Cada par de eixos coordenados determina um plano chamado ***plano coordenado***. Referimo-nos aos planos coordenados como os planos $xy$, $xz$ e $yz$. A cada ponto $P$ no espaço tridimensional associamos um terno $(x, y, z)$ de números, chamados ***coordenadas de*** $\boldsymbol{P}$, como segue: passe três planos por $P$ paralelos aos planos coordenados e denote os pontos de intersecção destes planos com os três eixos coordenados por $X$, $Y$ e $Z$ (Figura 3.1.9*b*).




(*a*) (*b*)

**Figura 3.1.9**

As coordenadas de $P$ são definidas pelos comprimentos orientados

$$x = OX, \quad y = OY, \quad z = OZ$$

Na Figura 3.1.10*a* nós construímos o ponto cujas coordenadas são (4, 5, 6) e na Figura 3.1.10*b* o ponto cujas coordenadas são (–3, 2, –4).

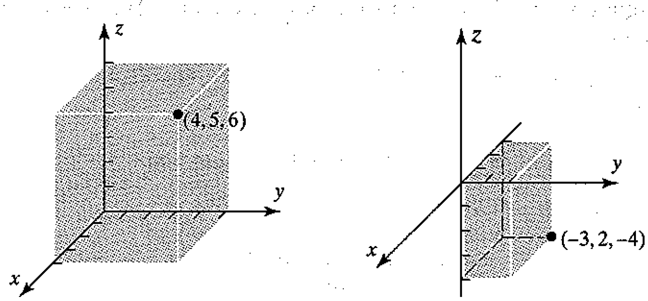
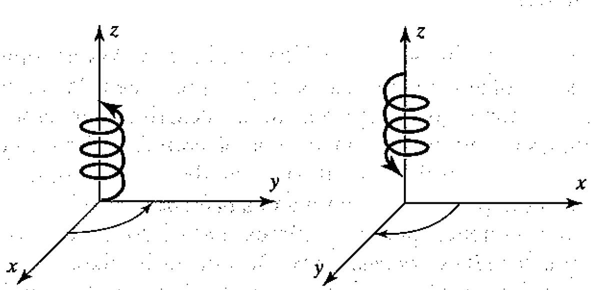



**Figura 3.1.10**

Os sistemas de coordenadas retangulares no espaço tridimensional dividem-se em duas categorias: os de ***mão direita*** e os de ***mão esquerda***. Um sistema de mão direita tem a propriedade de um parafuso comum, apontando na direção positiva do eixo $z$; ele avança se o eixo $x$ positivo é girado 90° na direção do eixo $y$ positivo (Figura 3.1.11*a*); o sistema é de mão esquerda se o parafuso retroceder (Figura 3.1.11*b*).




(*a*) Mão direita (*b*) Mão esquerda

**Figura 3.1.11**

OBSERVAÇÃO. Neste livro somente usaremos sistemas de coordenadas de mão direita.

Se um vetor **v** no espaço tridimensional for posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, como na Figura 3.1.12, então as coordenadas do ponto final são chamadas os ***componentes*** de **v** e escrevemos

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

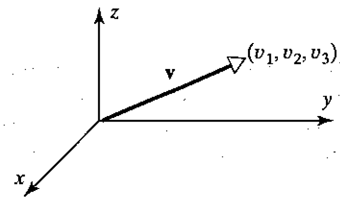



**Figura 3.1.12**

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são dois vetores no espaço tridimensional, então os seguintes resultados podem ser estabelecidos usados argumentos similares aos utilizados para vetores no plano.

**v** e **w** são equivalentes se, e somente se, $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ e $v_3 = w_3$
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$, onde $k$ é um escalar qualquer

## EXEMPLO 1 Operando com Vetores Usando Componentes

Se $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$ então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \quad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \quad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1),$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1)$$ ♦

Às vezes um vetor não está posicionado com seu ponto inicial na origem. Se o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ tem o ponto inicial $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ou seja, os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ são obtidos subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas do ponto final. Isto pode ser visto usando a Figura 3.1.13: o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é a diferença dos vetores $\overrightarrow{OP_2}$ e $\overrightarrow{OP_1}$, de modo que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

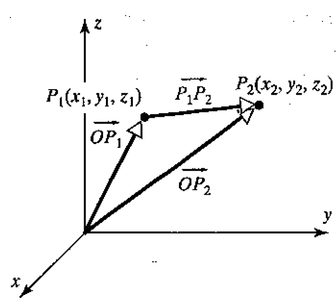



**Figura 3.1.13**

## EXEMPLO 2 Obtendo os Componentes de um Vetor

Os componentes do vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ com ponto inicial $P_1\,(2, -1, 4)$ e final $P_2\,(7, 5, -8)$ são

$$\mathbf{v} = (7-2, 5-(-1), (-8)-4) = (5, 6, -12)$$ ♦

No espaço bidimensional o vetor com ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

**Translação de Eixos** A solução de muitos problemas pode ser simplificada pela translação dos eixos coordenados para obter novos eixos paralelos aos originais.

Na Figura 3.1.14*a* nós transladamos os eixos de um sistema de coordenadas $xy$ para obter um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem $O'$ está no ponto $(x, y) = (k, l)$. Um ponto $P$ no espaço bidimensional tem agora tanto coordenadas $(x, y)$ quanto coordenadas $(x', y')$. Para ver como as duas coordenadas estão relacionadas, considere o vetor $\overrightarrow{O'P}$ (Figura 3.1.14*b*). No sistema $xy$, seu ponto inicial está em $(k, l)$ e seu ponto final está em $(x, y)$, de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x-k, y-l)$. No sistema $x'y'$ seu ponto inicial está em $(0, 0)$ e seu ponto final em $(x', y')$, de modo que $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$, e portanto

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l$$

Estas fórmulas são chamadas ***equações de translação***.

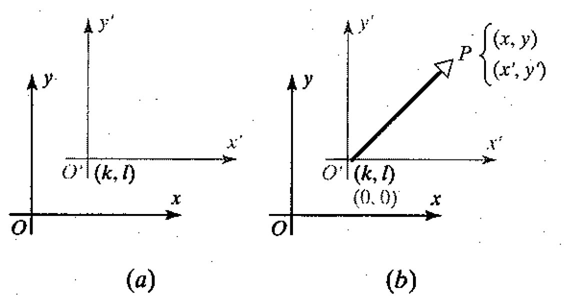



**Figura 3.1.14**

**EXEMPLO 3 Utilizando as Equações de Translação**

Suponha que um sistema de coordenadas $xy$ é transladado para um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem tem coordenadas $xy$ dadas por $(k, l) = (4, 1)$.

(a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto com coordenadas $xy$ dadas por $P(2, 0)$.

(b) Encontre as coordenadas $xy$ do ponto com coordenadas $x'y'$ dadas por $Q(-1, 5)$.

*Solução (a).* As equações de translação são

$$x' = x - 4, \qquad y' = y - 1$$

e portanto as coordenadas $x'y'$ de $P(2, 0)$ são $x' = 2 - 4 = -2$ e $y' = 0 - 1 = -1$.

*Solução (b).* As equações de translação em (a) podem ser reescritas como

$$x = x' + 4, \qquad y = y' + 1$$

e portanto as coordenadas $xy$ de $Q$ são $x = -1 + 4 = 3$ e $y = 5 + 1 = 6$. ♦

As equações de translação no espaço tridimensional são

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l, \qquad z' = z - m$$

onde $(k, l, m)$ são as coordenadas $xyz$ da origem das coordenadas $x'y'z'$.

## Conjunto de Exercícios 3.1

**1.** Desenhe um sistema de coordenadas de mão direita e marque os pontos cujas coordenadas são

(a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$ (d) $(3, 4, -5)$
(e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, 4, -5)$ (g) $(3, -4, -5)$ (h) $(-3, -4, -5)$
(i) $(-3, 0, 0)$ (j) $(3, 0, 3)$ (k) $(0, 0, -3)$ (l) $(0, 3, 0)$

**2.** Esboce os seguintes vetores com ponto inicial na origem:

(a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ (c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (5, -4)$ (e) $\mathbf{v}_5 = (3, 0)$
(f) $\mathbf{v}_6 = (0, -7)$ (g) $\mathbf{v}_7 = (3, 4, 5)$ (h) $\mathbf{v}_8 = (3, 3, 0)$ (i) $\mathbf{v}_9 = (0, 0, -3)$

**3.** Encontre os componentes do vetor de ponto inicial $P_1$ e ponto final $P_2$.

(a) $P_1(4, 8), P_2(3, 7)$ (b) $P_1(3, -5), P_2(-4, -7)$ (c) $P_1(-5, 0), P_2(-3, 1)$
(d) $P_1(0, 0), P_2(a, b)$ (e) $P_1(3, -7, 2), P_2(-2, 5, -4)$ (f) $P_1(-1, 0, 2), P_2(0, -1, 0)$
(g) $P_1(a, b, c), P_2(0, 0, 0)$ (h) $P_1(0, 0, 0), P_2(a, b, c)$

**4.** Encontre um vetor não-nulo $\mathbf{u}$ com ponto inicial $P(-1, 3, -5)$ tal que

(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$

(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$

5. Encontre um vetor não-nulo **u** com ponto final $Q$ (3, 0, –5) tal que
   (a) **u** tem a mesma direção e sentido que **v** = (4, –2, –1)
   (b) **u** tem a mesma direção mas sentido oposto ao de **v** = (4, –2, –1)
6. Sejam **u** = (–3, 1, 2), **v** = (4, 0, –8) e **w** = (6, –1, –4). Encontre os componentes de
   (a) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u}+2\mathbf{v}$ (c) $-\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (d) $5(\mathbf{v}-4\mathbf{u})$ (e) $-3(\mathbf{v}-8\mathbf{w})$ (f) $(2\mathbf{u}-7\mathbf{w})-(8\mathbf{v}+\mathbf{u})$
7. Sejam **u**, **v** e **w** os vetores do Exercício 6. Encontre os componentes do vetor **x** que satisfaz $2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}=7\mathbf{x}+\mathbf{w}$.
8. Sejam **u**, **v** e **w** os vetores do Exercício 6. Encontre escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ tais que $c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=(2, 0, 4)$.
9. Mostre que não existem escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ tais que
$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4).$$
10. Encontre todos os escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ tais que
$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0).$$
11. Sejam $P$ o ponto (2, 3, –2) e $Q$ o ponto (7, –4, 1).
   (a) Encontre o ponto médio do segmento de reta que liga $P$ a $Q$.
   (b) Encontre o ponto no segmento de reta que liga $P$ a $Q$ que está a $\frac{3}{4}$ do caminho de $P$ a $Q$.
12. Suponha que um sistema de coordenadas $xy$ é transladado a um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem $O'$ tem coordenadas (2, –3) no sistema $xy$.
   (a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto $P$ cujas coordenadas $xy$ são (7, 5).
   (b) Encontre as coordenadas $xy$ do ponto $Q$ cujas coordenadas $x'y'$ são (–3, 6).
   (c) Desenhe os eixos coordenados $xy$ e $x'y'$ e marque os pontos $P$ e $Q$.
13. Suponha que um sistema de coordenadas $xyz$ é transladado a um sistema de coordenadas $x'y'z'$. Seja **v** um vetor cujos componentes no sistema $xyz$ são $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Mostre que **v** tem os mesmos componentes no sistema $x'y'z'$.
14. Encontre os componentes de **u**, **v**, **u** + **v** e **u** – **v** para os vetores dados na figura.

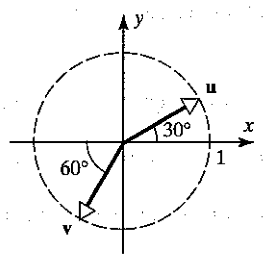



**Figura Ex-14**

15. Prove geometricamente que se $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, então $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$. (Restrinja a prova ao caso $k > 0$ ilustrado na Figura 3.1.8. A prova completa envolve vários casos que dependem do sinal de $k$ e do quadrante no qual cai o vetor.)

## Discussão e Descoberta

16. Considerando a Figura 3.1.13, discuta a interpretação geométrica do vetor
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$
17. Desenhe uma figura que mostra quatro vetores não-nulos cuja soma é zero.
18. Se você tivesse quatro vetores não-nulos dados, como você construiria geometricamente um quinto vetor que é igual à soma dos quatro dados? Faça um desenho para ilustrar seu método.

# 3.2 NORMA DE UM VETOR; ARITMÉTICA VETORIAL

***Nesta seção nós estabeleceremos as regras básicas da aritmética vetorial.***

**Propriedades das Operações Vetoriais** O seguinte teorema enumera as mais importantes propriedades de vetores nos espaços bi e tridimensionais.

**Teorema 3.2.1 Propriedades da Aritmética Vetorial**

*Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores de um espaço bi ou tridimensional e* $k$ *e* $l$ *são escalares, então valem as seguintes relações.*

(*a*) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
(*b*) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
(*c*) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$
(*d*) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
(*e*) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$
(*f*) $l(\mathbf{u}+\mathbf{v})=l\mathbf{u}+l\mathbf{v}$
(*g*) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$
(*h*) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Antes de discutir a prova, observamos que nós desenvolvemos duas abordagens de vetores: uma *geométrica* na qual os vetores são representados por flechas ou segmentos orientados de reta e outra *analítica*, na qual os vetores são representados por pares ou ternos de números chamados componentes. Como uma conseqüência, as equações no Teorema 3.2.1 podem ser provadas tanto geométrica quanto analiticamente. Para ilustrar isto, vamos provar (*b*) de ambas maneiras. As demais provas são deixadas como exercícios.

***Prova da parte* (*b*) (*analítica*).** Nós veremos a prova para vetores no espaço tridimensional; a prova para o espaço bidimensional é similar. Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= [(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)]+(w_1,w_2,w_3)\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)+(w_1,w_2,w_3)\\ &= ([u_1+v_1]+w_1, [u_2+v_2]+w_2, [u_3+v_3]+w_3)\\ &= (u_1+[v_1+w_1], u_2+[v_2+w_2], u_3+[v_3+w_3])\\ &= (u_1,u_2,u_3)+(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)\\ &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})\end{aligned}$$

***Prova da parte* (*b*) (*geométrica*).** Sejam **u**, **v** e **w** representados por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, e $\overrightarrow{RS}$ conforme ilustrado na Figura 3.2.1. Então

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = \overrightarrow{QS} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \overrightarrow{PS}$$

Também

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} \quad \text{e} \quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$$

Logo,

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$ ■

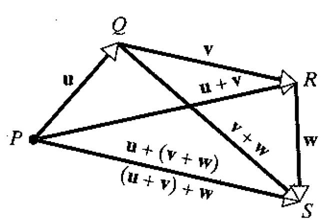



**Figura 3.2.1** Os vetores **u** + (**v** + **w**) e (**u** + **v**) + **w** são iguais.

OBSERVAÇÃO. Tendo em vista a parte (*b*) deste teorema, o símbolo **u** + **v** + **w** não é ambíguo, pois a mesma soma é obtida não importa onde coloquemos os parênteses. Além disto, se os vetores **u**, **v** e **w** são enfileirados com o ponto inicial do seguinte no ponto final do anterior, então a soma **u** + **v** + **w** é o vetor desde o ponto inicial de **u** até o ponto final de **w** (Figura 3.2.1).

**Norma de um Vetor** O comprimento de um vetor **u** é muitas vezes chamado ***norma*** de **u** e é denotado por $\|\mathbf{u}\|$. Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ no espaço bidimensional é

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2} \tag{1}$$

(Figura 3.2.2*a*). Seja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor no espaço tridimensional. Usando a Figura 3.2.2*b* e duas aplicações do Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Assim,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \tag{2}$$

Um vetor de norma 1 é chamado ***vetor unitário***.

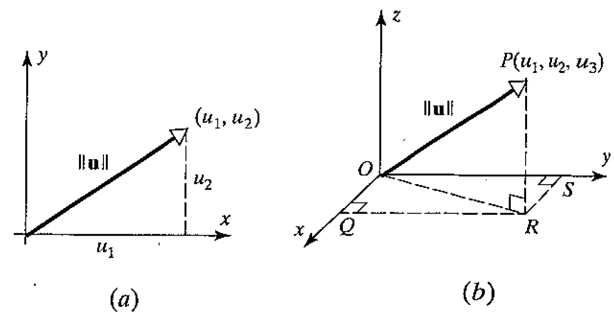



**Figura 3.2.2**

Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos no espaço tridimensional, então a ***distância*** $d$ entre eles é a norma do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ (Figura 3.2.3). Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

segue de (2) que

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{3}$$

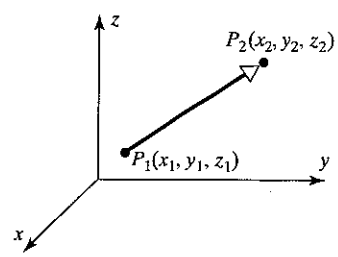



**Figura 3.2.3** A distância entre $P_1$ e $P_2$ é a norma do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Similarmente, se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos no espaço bidimensional, então a distância entre eles é dada por

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{4}$$

## EXEMPLO 1 Obtendo Norma e Distância

A norma do vetor $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$ é

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2+(2)^2+(1)^2} = \sqrt{14}$$

A distância $d$ entre os pontos $P_1(2, -1, -5)$ e $P_2(4, -3, 1)$ é

$$d = \sqrt{(4-2)^2+(-3+1)^2+(1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$ ♦

Da definição do produto $k\mathbf{v}$, o comprimento do vetor $k\mathbf{v}$ é $|k|$ vezes o comprimento do vetor $\mathbf{v}$. Em forma de equação, esta afirmação diz que

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| \tag{5}$$

Esta fórmula útil é aplicável tanto no espaço bi quanto tridimensional.

## Conjunto de Exercícios 3.2

1. Encontre a norma de $\mathbf{v}$.
   (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 3)$ (c) $\mathbf{v} = (-5, 0)$
   (d) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$ (e) $\mathbf{v} = (-7, 2, -1)$ (f) $\mathbf{v} = (0, 6, 0)$
2. Encontre a distância entre $P_1$ e $P_2$.
   (a) $P_1(3, 4)$, $P_2(5, 7)$ (b) $P_1(-3, 6)$, $P_2(-1, -4)$
   (c) $P_1(7, -5, 1)$, $P_2(-7, -2, -1)$ (d) $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(6, 0, 3)$
3. Sejam $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$. Em cada parte calcule a expressão dada.
   (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$
   (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (e) $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$
4. Seja $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$. Encontre todos os escalares $k$ tais que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.
5. Sejam $\mathbf{u} = (7, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (9, 6, 6)$, $\mathbf{w} = (2, 1, -8)$, $k = -2$ e $l = 5$. Verifique que estes vetores e escalares satisfazem as seguintes identidades do Teorema 3.2.1.
   (a) parte (*b*) (b) parte (*e*) (c) parte (*f*) (d) parte (*g*)
6. (a) Mostre que se $\mathbf{v}$ é qualquer vetor não-nulo, então $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ é um vetor unitário.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (3, 4)$.
   (c) Use o resultado da parte (a) para encontrar um vetor unitário de mesma direção mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (-2, 3, -6)$.
7. (a) Mostre que os componentes do vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ mostrado na figura são $v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ e $v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$.
   (b) Use o resultado da parte (a) para encontrar os componentes de $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são os vetores dados na figura.

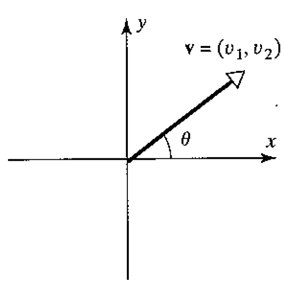



**Figura Ex-7 [a]**

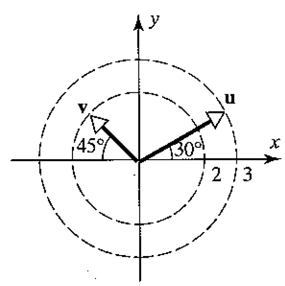



**Figura Ex-7 [b]**

8. Sejam $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ para os quais $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.
9. Prove geometricamente que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores no espaço bi ou tridimensional então $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
10. Prove analiticamente as partes (*a*), (*c*) e (*e*) do Teorema 3.2.1.
11. Prove analiticamente as partes (*d*), (*g*) e (*h*) do Teorema 3.2.1.

## Discussão e Descoberta

12. É possível ter a igualdade $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ na desigualdade enunciada no Exercício 9? Explique seu raciocínio.
13. (a) Qual relação deve satisfazer o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ para estar eqüidistante da origem e do plano $xz$? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de $a$, $b$ e $c$.
    (b) Qual relação deve satisfazer o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ para estar mais longe da origem do que do plano $xz$? Verifique se a relação que você deu vale para valores positivos e negativos de $a$, $b$ e $c$.
14. (a) O que a desigualdade $\|\mathbf{x}\| < 1$ diz sobre o ponto $\mathbf{x}$?
    (b) Obtenha uma desigualdade que descreve o conjunto de pontos $\mathbf{x}$ que estão fora do círculo de raio 1 centrado no ponto $\mathbf{x}_0$.

**15.** Os triângulos na figura dada deveriam sugerir uma prova geométrica do Teorema 3.2.1(*f*) para o caso $k > 0$. Dê a prova.

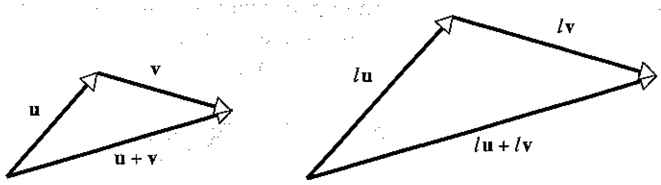



**Figura Ex-15**

## 3.3 PRODUTO ESCALAR; PROJEÇÕES

***Nesta seção nós iremos discutir uma maneira importante de multiplicar vetores nos espaços bi e tridimensionais. Depois daremos algumas aplicações desta multiplicação à geometria.***

**Produto Escalar de Vetores** Sejam **u** e **v** dois vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e suponha que estes vetores foram posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem. Pelo ***ângulo entre* u *e* v** nós entendemos o ângulo $\theta$ determinado por **u** e **v** que satisfaz $0 \le \theta \le \pi$ (Figura 3.3.1).

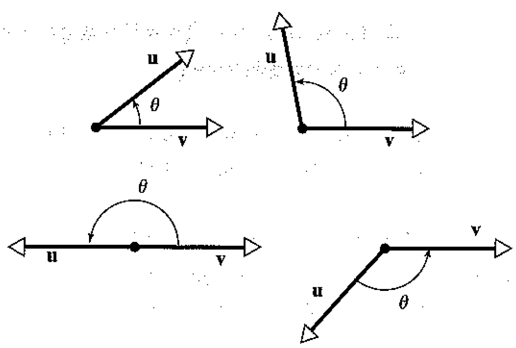



**Figura 3.3.1** O ângulo $\theta$ entre **u** e **v** satisfaz $0 \le \theta \le \pi$.

**Definição**

Se **u** e **v** são vetores no espaço bi ou tridimensional e $\theta$ é o ângulo entre **u** e **v**, então o ***produto escalar*** **u** · **v**, ou ***produto interno euclidiano***, é definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta & \text{se } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{se } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{1}$$

**EXEMPLO 1 Produto Escalar**

Conforme indicado na Figura 3.3.2, o ângulo entre os vetores **u** = (0, 0, 1) e **v** = (0, 2, 2) é de 45°. Logo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \quad \blacklozenge$$

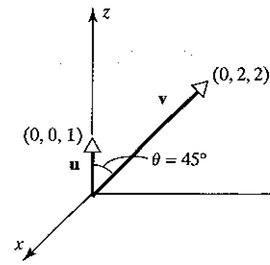



**Figura 3.3.2**

**Produto Escalar em termos de Componentes** Para efeitos de cálculo, é desejável ter uma fórmula que dê o produto escalar de dois vetores em termos dos componentes do vetor. Nós iremos deduzir uma fórmula destas para vetores no espaço tridimensional; a dedução em duas dimensões é similar.

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dois vetores não-nulos. Se o ângulo entre **u** e **v** é $\theta$, conforme Figura 3.3.3, então a lei dos cossenos dá

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{2}$$

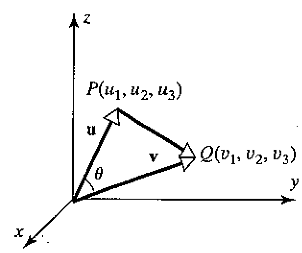



**Figura 3.3.3**

Como $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, podemos rescrever (2) como

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

Substituindo

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

e

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

e simplificando, obtemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3}$$

Embora esta fórmula tenha sido deduzida supondo que **u** e **v** são não-nulos, ela também é válida se **u** = **0** ou se **v** = **0** (verifique).

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ são dois vetores no espaço bidimensional então a fórmula correspondente a (3) é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{4}$$

**Obtendo o Ângulo entre Vetores** Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores não-nulos, então a Fórmula (1) pode ser escrita como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{5}$$

### EXEMPLO 2 Produto Escalar Usando [3]

Considere os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$. Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e determine o ângulo $\theta$ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

*Solução.*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Para os vetores dados nós temos $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$, de modo que, por (5),

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Assim, $\theta = 60°$. ♦

### EXEMPLO 3 Um Problema Geométrico

Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

*Solução.*

Seja $k$ o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas conforme indicado na Figura 3.3.4. Se tomarmos os vetores $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$, então o vetor

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é a diagonal do cubo. O ângulo $\theta$ entre $\mathbf{d}$ e a aresta $\mathbf{u}_1$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Assim,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}74°$$ ♦

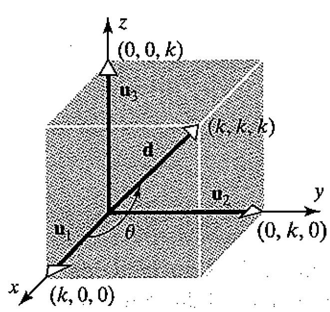



**Figura 3.3.4**

O teorema seguinte mostra com o produto escalar pode ser usado para obter informação sobre o ângulo entre dois vetores; além disto, estabelece uma relação importante entre a norma e o produto escalar.

> **Teorema 3.3.1**
>
> *Sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vetores no espaço bi ou tridimensional.*
>
> (*a*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$; *ou seja,* $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$
>
> (*b*) *Se os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são não-nulos e* $\theta$ *é o ângulo entre eles, então*
>
> $\theta$ *é agudo* *se, e somente se,* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
>
> $\theta$ *é obtuso* *se, e somente se,* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
>
> $\theta = \pi/2$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

*Prova* (*a*). Como o ângulo $\theta$ entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}$ é 0, temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{v}\|^2\cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2$$

*Prova* (*b*). Como $\theta$ satisfaz $0 \le \theta \le \pi$, temos: $\theta$ é agudo se, e somente se, $\cos\theta > 0$; $\theta$ é obtuso se, e somente se, $\cos\theta < 0$; $\theta = \pi/2$ se, e somente se, $\cos\theta = 0$. Mas $\cos\theta$ tem o mesmo sinal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, já que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, $\|\mathbf{u}\| > 0$ e $\|\mathbf{v}\| > 0$. Logo, decorre o resultado. ■

### EXEMPLO 4 Obtendo o Produto Escalar a partir de Componentes

Se $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$, então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

Assim, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formam um ângulo obtuso, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formam um ângulo agudo e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são perpendiculares. ♦

**Vetores Ortogonais** Vetores perpendiculares são também chamados vetores ***ortogonais***. Tendo em vista o Teorema 3.3.1*b*, dois vetores *não-nulos* são ortogonais se, e somente se, seu produto escalar é zero. Se concordarmos em considerar os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como perpendiculares se um deles ou ambos forem o vetor nulo $\mathbf{0}$, então poderemos afirmar, sem exceção, que *dois vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais* (*perpendiculares*) *se, e somente se,* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Para indicar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais nós escrevemos $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

### EXEMPLO 5 Um Vetor Perpendicular a uma Reta

Mostre que o vetor não-nulo $\mathbf{n} = (a, b)$ é perpendicular à reta $ax + by + c = 0$ no espaço bidimensional.

*Solução.*

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da reta, de modo que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Como o vetor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ é paralelo à reta dada (Figura 3.3.5), basta mostrar que $\mathbf{n}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são perpendiculares. Subtraindo as equações em (6) obtemos

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

que pode ser expresso na forma

$$(a, b) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

Assim, $\mathbf{n}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são perpendiculares. ♦

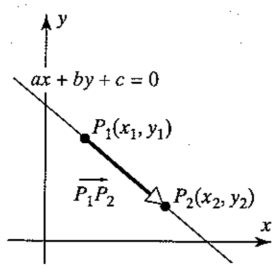



**Figura 3.3.5**

O próximo teorema lista as propriedades mais importantes do produto escalar, que são úteis no cálculo com vetores.

**Teorema 3.3.2** **Propriedades do Produto Escalar**

*Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores no espaço bi ou tridimensional e* $l$ *é um escalar, então:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
(*c*) $l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (l\mathbf{v})$
(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ *se* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *se* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

***Prova.*** Nós iremos provar (*c*) para vetores no espaço tridimensional e deixar as demais provas como exercícios. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$; então

$$\begin{aligned} l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= l(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= (lu_1)v_1 + (lu_2)v_2 + (lu_3)v_3 \\ &= (l\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (l\mathbf{v})$$ ■

**Uma Projeção Ortogonal** Em muitas aplicações é de interesse "decompor" um vetor $\mathbf{u}$ na soma de dois componentes, um paralelo a um vetor não-nulo especificado $\mathbf{a}$ e o outro perpendicular a $\mathbf{a}$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ são posicionados com seus pontos iniciais coincidindo com um ponto $Q$, podemos decompor o vetor $\mathbf{u}$ como segue (Figura 3.3.6): baixamos uma perpendicular da ponta de $\mathbf{u}$ para a reta ao longo de $\mathbf{a}$ e construímos o vetor $\mathbf{w}_1$ de $Q$ ao pé desta perpendicular. Em seguida tomamos a diferença

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

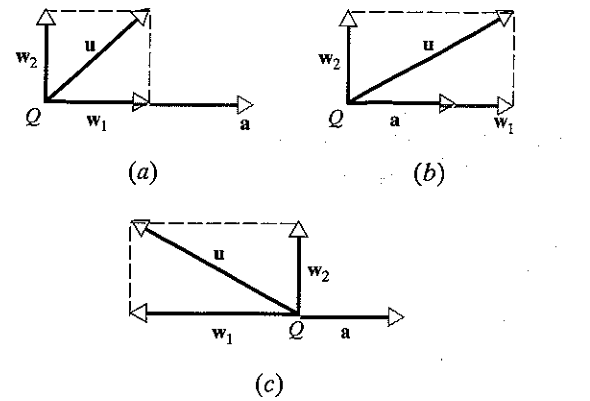



**Figura 3.3.6** O vetor $\mathbf{u}$ é a soma de $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, onde $\mathbf{w}_1$ é paralelo ao vetor $\mathbf{a}$ e $\mathbf{w}_2$ é perpendicular a $\mathbf{a}$.

Conforme indicado na Figura 3.3.6, o vetor $\mathbf{w}_1$ é paralelo ao vetor $\mathbf{a}$, o vetor $\mathbf{w}_2$ é perpendicular ao vetor $\mathbf{a}$ e

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

O vetor $\mathbf{w}_1$, chamado ***projeção ortogonal de u sobre*** $\mathbf{a}$, ou então ***componente vetorial de u ao longo do vetor*** $\mathbf{a}$, é denotado por

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} \tag{7}$$

O vetor $\mathbf{w}_2$ é chamado ***componente vetorial de u ortogonal ao vetor*** $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, este vetor pode ser escrito com a notação de (7) como

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$$

O seguinte teorema dá fórmulas para calcular os vetores $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$.

**Teorema 3.3.3**

*Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{a}$ *são vetores no espaço bi ou tridimensional e se* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *então*

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad \textit{(componente vetorial de } \mathbf{u} \textit{ ao longo de } \mathbf{a}\textit{)}$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad \textit{(componente vetorial de } \mathbf{u} \textit{ ortogonal a } \mathbf{a}\textit{)}$$

*Prova.* Sejam $\mathbf{w}_1 = \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$. Como $\mathbf{w}_1$ é paralelo a $\mathbf{a}$, deve ser um múltiplo escalar de $\mathbf{a}$, e portanto pode ser escrito na forma $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$. Assim

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2 \tag{8}$$

Tomando o produto escalar de $\mathbf{a}$ com ambos os lados de (8) e usando os Teoremas 3.3.1*a* e 3.3.2 resulta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} \tag{9}$$

Mas $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$, pois $\mathbf{w}_2$ é perpendicular a $\mathbf{a}$; portanto (9) dá

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Como $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$, obtemos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$ ■

## EXEMPLO 6 O Componente Vetorial de u ao longo de a

Sejam $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$. Encontre o componente vetorial de **u** ao longo de **a** e o componente vetorial de **u** ortogonal a **a**.

*Solução.*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

Portanto o componente vetorial de **u** ao longo de **a** é

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \tfrac{15}{21}(4,-1,2) = \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right)$$

e o componente vetorial de **u** ortogonal a **a** é

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u} = (2,-1,3) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right)$$

Para conferir, o leitor pode querer verificar que os vetores $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$ e **a** são perpendiculares mostrando que o seu produto escalar é zero. ♦

Uma fórmula para o comprimento do componente vetorial de **u** ao longo de **a** pode ser obtida escrevendo

$$\begin{aligned}\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| &= \left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| \\ &= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\right|\|\mathbf{a}\| && \longleftarrow \text{Fórmula (5) da Seção 3.2} \\ &= \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| && \longleftarrow \text{Pois } \|\mathbf{a}\|^2 > 0\end{aligned}$$

o que fornece

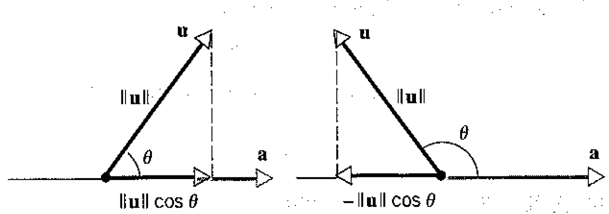
$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{10}$$

Se $\theta$ denota o ângulo entre **u** e **a**, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{a}\|\cos\theta$, de modo que (10) pode também ser escrito da forma

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta| \tag{11}$$

(Verifique.) Uma interpretação geométrica deste resultado é dado na Figura 3.3.7.

Como um exemplo, nós usaremos métodos vetoriais para deduzir uma fórmula para a distância de um ponto no plano a uma reta.




(*a*) $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ (*b*) $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

**Figura 3.3.7**

## EXEMPLO 7 A Distância entre um Ponto e uma Reta

Encontre uma fórmula para a distância $D$ entre o ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a reta $ax + by + c = 0$.

*Solução.*

Seja $Q(x_1, y_1)$ um ponto qualquer da reta e posicione o vetor $\mathbf{n} = (a, b)$ com seu ponto inicial em $Q$.

Como sabemos do Exemplo 5, o vetor **n** é perpendicular à reta (Figura 3.3.8). Conforme indicado na figura, a distância $D$ é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre **n**; assim, por (10),

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\,\overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

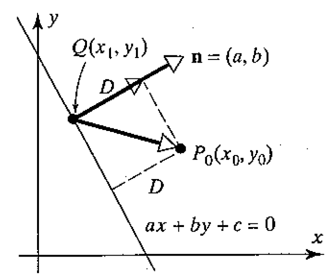



**Figura 3.3.8**

Mas

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1)$$
$$\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de modo que

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{12}$$

Como o ponto $Q(x_1, y_1)$ está na reta, suas coordenadas devem satisfazer a equação da reta, ou seja,

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \text{ou} \quad c = -ax_1 - by_1$$

Substituindo esta expressão em (12) fornece a fórmula

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{13}$$ ♦

## EXEMPLO 8 Usando a Fórmula da Distância

Segue da fórmula (13) que a distância $D$ do ponto $(1, -2)$ à reta $3x + 4y - 6 = 0$ é

$$D = \frac{|(3)(1) + 4(-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$ ♦

## Conjunto de Exercícios 3.3

**1.** Encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, 3),\ \mathbf{v} = (5, -7)$ (b) $\mathbf{u} = (-6, -2),\ \mathbf{v} = (4, 0)$
(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4),\ \mathbf{v} = (3, 3, 3)$ (d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3),\ \mathbf{v} = (1, 7, -4)$

**2.** Em cada parte do Exercício 1, encontre o cosseno do ângulo $\theta$ entre **u** e **v**.

**3.** Determine se **u** e **v** fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou são ortogonais.

(a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4),\ \mathbf{v} = (2, 0, -3)$ (b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1),\ \mathbf{v} = (1, 1, 1)$
(c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4),\ \mathbf{v} = (3, 1, 6)$ (d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8),\ \mathbf{v} = (5, 3, 7)$

**4.** Encontre a projeção ortogonal de **u** em **a**.

(a) $\mathbf{u} = (6, 2),\ \mathbf{a} = (3, -9)$ (b) $\mathbf{u} = (-1, -2),\ \mathbf{a} = (-2, 3)$
(c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7),\ \mathbf{a} = (1, 0, 5)$ (d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0),\ \mathbf{a} = (4, 3, 8)$

**5.** Em cada parte do Exercício 4, encontre o componente vetorial de **u** ortogonal a **a**.

**6.** Em cada parte, encontre $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\|$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -2),\ \mathbf{a} = (-4, -3)$ (b) $\mathbf{u} = (5, 6),\ \mathbf{a} = (2, -1)$
(c) $\mathbf{u} = (3, 0, 4),\ \mathbf{a} = (2, 3, 3)$ (d) $\mathbf{u} = (3, -2, 6),\ \mathbf{a} = (1, 2, -7)$

**7.** Sejam $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 6, 3)$ e $k = -4$. Verifique o Teorema 3.3.2 para estas quantidades.

**8.** (a) Mostre que $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (-b, a)$ são vetores ortogonais.
(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar dois vetores ortogonais a $\mathbf{v} = (2, -3)$.
(c) Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a $(-3, 4)$.

**9.** Sejam $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, -1)$ e $\mathbf{w} = (7, 1)$. Calcule as seguintes expressões.

(a) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (b) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}\|$ (c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

**10.** Encontre cinco vetores não-nulos distintos que são ortogonais a $\mathbf{u} = (5, -2, 3)$.

**11.** Use vetores para encontrar os cossenos dos ângulos internos do triângulo de vértices $(0, -1)$, $(1, -2)$ e $(4, 1)$.

**12.** Mostre que $A\ (3, 0, 2)$, $B\ (4, 3, 0)$ e $C\ (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?

**13.** Encontre um vetor unitário que é ortogonal a ambos $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

**14.** Sejam $\mathbf{p} = (2, k)$ e $\mathbf{q} = (3, 5)$. Encontre $k$ tal que
(a) **p** e **q** são paralelos
(b) **p** e **q** são ortogonais
(a) o ângulo entre **p** e **q** é $\pi / 3$
(a) o ângulo entre **p** e **q** é $\pi / 4$

**15.** Use a Fórmula (13) para calcular a distância entre o ponto e a reta.
(a) $4x + 3y + 4 = 0;\ (-3, 1)$
(b) $y = -4x + 2;\ (2, -5)$
(c) $3x + y = 5;\ (1, 8)$

**16.** Mostre que vale a identidade $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

**17.** Mostre que vale a identidade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ .

**18.** Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas faces.

**19.** Sejam **i**, **j** e **k** os vetores unitários ao longo dos eixos $x$, $y$ e $z$ positivos de um sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional. Se $\mathbf{v} = (a, b, c)$ é um vetor não-nulo, então os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ entre **v** e **i**, **j** e **k**, respectivamente, são chamados ***ângulos diretores*** de **v** (veja a figura) e os números cos $\alpha$, cos $\beta$ e cos $\gamma$ são os ***cossenos diretores*** de **v**.
(a) Mostre que $\cos \alpha = a / \|\mathbf{v}\|$.
(b) Encontre cos $\beta$ e cos $\gamma$.
(c) Mostre que $\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\| = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.
(d) Mostre que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

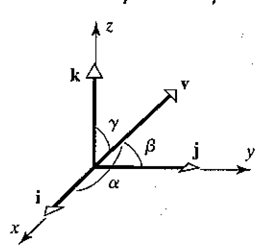



**Figura Ex-19**

20. Use o resultado do Exercício 19 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 cm faz com as arestas da caixa. [*Observação*. É necessária uma calculadora.]

21. Em relação ao Exercício 19, mostre que dois vetores não-nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ do espaço tridimensional são perpendiculares se, e somente se, seus cossenos diretores satisfazem
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$

22. Mostre que se $\mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1+k_2\mathbf{w}_2$, para quaisquer escalares $k_1$ e $k_2$.

23. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam $k=\|\mathbf{u}\|$ e $l=\|\mathbf{v}\|$. Mostre que o vetor $\mathbf{w}=l\mathbf{u}+k\mathbf{v}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

## Discussão e Descoberta

24. Em cada parte, há alguma coisa errada com a expressão. O que é?
(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ (d) $k\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

25. É possível ter $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}=\text{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a}$? Explique seu raciocínio.

26. Se $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, é correto cancelar $\mathbf{u}$ de ambos os lados da equação $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ e concluir que $\mathbf{v}=\mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.

27. Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores não-nulos mutuamente ortogonais no espaço tridimensional e suponha que você conhece os produtos escalares destes três vetores com um vetor $\mathbf{r}$ do espaço tridimensional. Obtenha uma expressão para $\mathbf{r}$ em termos de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e dos produtos escalares. [*Sugestão*. Procure obter uma expressão do tipo $\mathbf{r}=b_1\mathbf{u}+b_2\mathbf{v}+b_3\mathbf{w}$.]

28. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais do espaço bi ou tridimensional. Qual é o teorema famoso descrito pela equação $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$? Faça uma figura para corroborar sua resposta.

# 3.4 PRODUTO VETORIAL

***Em muitas aplicações de vetores a problemas geométricos, físicos e de engenharia é de interesse construir um vetor no espaço tridimensional que é perpendicular a dois vetores dados. Nesta seção nós iremos mostrar como fazer isto.***

**Produto Vetorial de Vetores** Lembre da Seção 3.3 que o produto escalar de dois vetores nos espaços bi e tridimensionais produz um escalar. Nós iremos definir agora um tipo de multiplicação vetorial que produz um vetor como produto, mas que é aplicável somente ao espaço tridimensional.

**Definição**

Se $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ e $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ são vetores no espaço tridimensional, então o produto vetorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é o vetor definido por
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1) \tag{1a}$$
ou em notação de determinante,
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right) \tag{1b}$$

OBSERVAÇÃO. Em vez de memorizar (1b), você pode obter os componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como segue:

- Forme a matriz $2\times 3$ dada por $\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{bmatrix}$, cuja primeira linha contém os componentes de $\mathbf{u}$ e cuja segunda linha contém os componentes de $\mathbf{v}$.
- Para obter o primeiro componente de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, delete a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, delete a segunda coluna e tome o negativo do determinante; e para obter o terceiro componente, delete a terceira coluna e tome o determinante.

**EXEMPLO 1 Calculando um Produto Vetorial**

Encontre $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u}=(1,2,-2)$ e $\mathbf{v}=(3,0,1)$.

*Solução.*

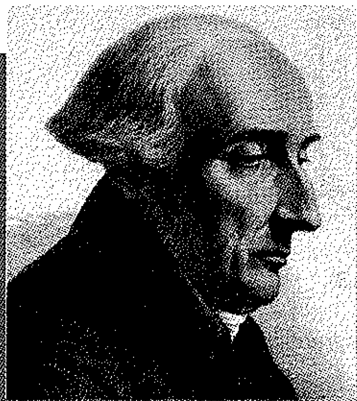
Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, nós temos
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}\right)$$
$$=(2,-7,-6)$$ ♦

Existe uma diferença importante entre o produto escalar e o produto vetorial de dois vetores—o produto escalar é um escalar e o produto vetorial é um vetor. O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial e também mostra que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

**Teorema 3.4.1 Relações entre os Produtos Escalar e Vetorial**

*Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores no espaço tridimensional, então*:

(*a*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ***é ortogonal a*** $\mathbf{u}$)
(*b*) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ***é ortogonal a*** $\mathbf{v}$)
(*c*) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (***identidade de Lagrange***)
(*d*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ (***relação entre os produtos vetorial e escalar***)
(*e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$ (***relação entre os produtos vetorial e escalar***)



**Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) foi um matemático e astrônomo franco-italiano. Embora seu pai quisesse que ele se tornasse um advogado, Lagrange foi atraído para a Matemática e Astronomia depois de ler um trabalho do astrônomo Halley. Aos 16 anos começou a estudar Matemática por conta própria e aos 19 foi designado para um cargo de professor na Escola de Artilharia Real de Turim. No ano seguinte ele resolveu alguns problemas famosos usando métodos novos que acabaram florescendo em um ramo da Matemática chamado *Cálculo das Variações*. Estes métodos e sua aplicação a problemas de Mecânica Celeste foram tão monumentais que aos 25 anos Lagrange era considerado por muitos de seus contemporâneos como o maior matemático vivo. Um dos trabalhos mais famosos de Lagrange é *Mécanique Analytique*, no qual ele reduziu a teoria da Mecânica a umas poucas fórmulas gerais das quais todas as demais equações podiam ser deduzidas.

Um grande admirador de Lagrange foi Napoleão, que o cobriu de honrarias. Apesar de sua fama, Lagrange foi um homem tímido e modesto. Quando morreu, foi enterrado com honras no Panteão.

*Prova (a).* Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\\ &= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0\end{aligned}$$

*Prova (b).* Similar a *(a)*.

*Prova (c).* Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \quad (2)$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \quad (3)$$

a prova pode ser concluída desenvolvendo os lados direitos de (2) e (3) e verificando sua igualdade.

*Prova (d) e (e).* Veja os Exercícios 26 e 27. ■

## EXEMPLO 2 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Perpendicular a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$

Considere os vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ e } \mathbf{v} = (3, 0, 1)$$

No Exemplo 1 mostramos que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

Como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

e

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como garante o Teorema 3.4.1. ♦

As principais propriedades aritméticas do produto vetorial são as enumeradas no próximo teorema.

**Teorema 3.4.2** **Propriedades do Produto Vetorial**

*Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores no espaço tridimensional e* $l$ *é um escalar qualquer, então:*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
(*d*) $l(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (l\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (l\mathbf{v})$
(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

As demonstrações seguem imediatamente da Fórmula (1b) e das propriedades dos determinantes; por exemplo, (*a*) pode ser demonstrada como segue:

*Prova (a).* Trocando-se $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$ em (1b), trocam as linhas dos três determinantes no lado direito de (1b) e portanto troca o sinal de cada componente do produto vetorial. Assim, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. ■

As provas das demais partes são deixadas como exercícios.

## EXEMPLO 3 Vetores Unitários Canônicos

Considere os vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Estes vetores têm, cada um, comprimento 1 e estão sobre os eixos coordenados (Figura 3.4.1). Eles são chamados ***vetores unitários canônicos*** do espaço tridimensional. Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ do espaço tridimensional pode ser expresso em termos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, pois podemos escrever

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

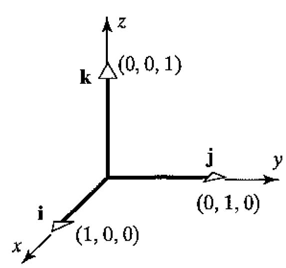



**Figura 3.4.1** Os vetores unitários canônicos.

Por exemplo,

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

De (1b) obtemos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$ ♦

O leitor não deveria encontrar dificuldades para estabelecer os seguintes resultados:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \end{array}$$

A Figura 3.4.2 é útil para lembrar destes resultados. Olhando para este diagrama, vemos que o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido horário é o vetor seguinte e o produto vetorial de dois vetores tomados no sentido anti-horário é o negativo do vetor seguinte.

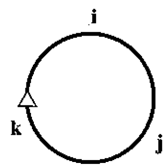



**Figura 3.4.2**

**O Produto Vetorial em Formato de Determinante** Também é importante notar que um produto vetorial pode ser representado simbolicamente na forma de um determinante 3 × 3:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \quad (4)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, então

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

o que confere com o resultado obtido no Exemplo 1.

**Advertência** Não é verdade, em geral, que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$. Por exemplo,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

e

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

de modo que

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})\neq(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}$$

Nós sabemos do Teorema 3.4.1 que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-nulos, pode ser mostrado que o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pode ser determinado usando a "regra da mão direita"[1] (Figura 3.4.3): seja $\theta$ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e suponha que $\mathbf{u}$ é girado pelo ângulo $\theta$ até coincidir com $\mathbf{v}$. Se os dedos da mão direita se fecharem apontando no sentido desta rotação, então o polegar indica (aproximadamente) o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

[1] Lembre que nós somente consideramos sistemas de coordenadas de mão direita neste texto. Se estivéssemos usando sistemas de mão esquerda, usaríamos aqui uma "regra da mão esquerda."

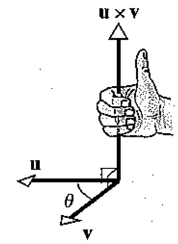



**Figura 3.4.3**

O leitor pode considerar instrutivo treinar esta regra com os produtos

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

## Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores no espaço tridimensional, então a norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem uma interpretação geométrica útil. A identidade de Lagrange, dada no Teorema 3.4.1, afirma que

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \quad (5)$$

Se $\theta$ denota o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$, de modo que (5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, segue que sen $\theta \geq 0$, e portanto isto pode ser reescrito como

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (6)$$

Mas $\|\mathbf{v}\|$ sen $\theta$ é a altura do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (Figura 3.4.4). Assim, por (6), a área $A$ deste paralelogramo é dada por

$$A=(\text{base})\,(\text{altura})=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\mathrm{sen}\,\theta=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$$

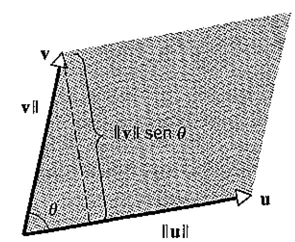



**Figura 3.4.4**

Este resultado também é válido se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são colineares, pois então o paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem área zero e por (6) temos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, já que, neste caso, $\theta = 0$. Assim, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.3** **Área de um Paralelogramo**

*Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores no espaço tridimensional, então $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ é igual à área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.*

**EXEMPLO 4 Área de um Triângulo**

Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ e $P_3(0, 4, 3)$.

*Solução.*

A área $A$ do triângulo é $\frac{1}{2}$ da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 3.4.5). Usando o método discutido no Exemplo 2 da Seção 3.1, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$. Segue que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

e conseqüentemente

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2}$$ ◆

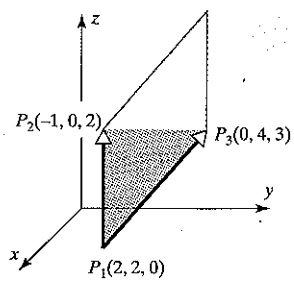



**Figura 3.4.5**

**Definição**

Se **u**, **v** e **w** são vetores no espaço tridimensional então

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado ***produto misto*** de **u**, **v** e **w**.

O produto misto de $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ pode ser calculado a partir da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Isto segue da Fórmula (4), pois

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 5 Calculando um Produto Misto**

Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

*Solução.*

Por (7),

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 60 + 4 - 15 = 49 \end{aligned}$$ ◆

OBSERVAÇÃO. O símbolo $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ não faz sentido por que nós não podemos formar o produto vetorial de um escalar com um vetor. Assim, não há ambigüidade escrevendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ em vez de $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. No entanto, por clareza, em geral manteremos os parênteses.

Segue de (7) que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

pois os determinantes $3 \times 3$ que representam estes produtos podem ser obtidos um do outro por *duas* trocas de linhas. (Verifique.) Estas relações podem ser lembradas movendo os vetores **u**, **v** e **w** no sentido horário em torno dos vértices do triângulo da Figura 3.4.6.

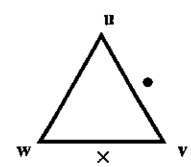



**Figura 3.4.6**

**Interpretação Geométrica de Determinantes** O próximo teorema fornece uma interpretação geométrica útil de determinantes $2 \times 2$ e $3 \times 3$.

**Teorema 3.4.4**

(*a*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

*é igual à área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado pelos vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. (*Veja Figura 3.4.7a.*)

(*b*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

*é igual ao volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. (*Veja Figura 3.4.7b.*)

*Prova* (*a*). A chave para a prova é usar o Teorema 3.4.3. Contudo, aquele teorema refere-se a vetores no espaço tridimensional, enquanto $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ são vetores do espaço bidimensional. Para superar este "problema de dimen-

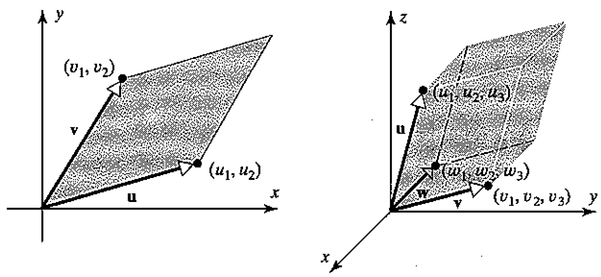



**Figura 3.4.7**

são", veremos **u** e **v** como vetores do plano $xy$ de um sistema de coordenadas $xyz$ (Figura 3.4.8$a$), no qual estes vetores são escritos como $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Assim,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}$$

Decorre agora do Teorema 3.4.3 e de $\|\mathbf{k}\| = 1$ que a área $A$ do paralelogramo determinado por **u** e **v** é

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \mathbf{k} \right\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| \|\mathbf{k}\| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova.

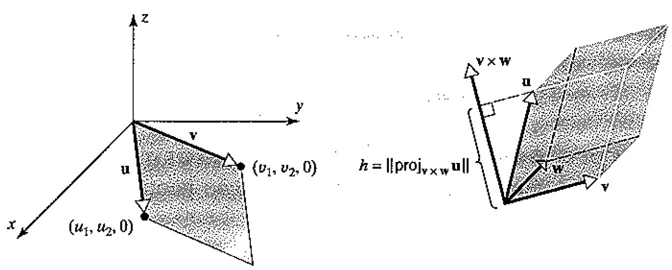



**Figura 3.4.8**

*Prova (b).* Conforme mostramos na Figura 3.4.8$b$, tomamos o paralelogramo determinado por **v** e **w** como a base do paralelepípedo determinado por **u**, **v** e **w**. Segue do Teorema 3.4.3 que a área da base é $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ e, como ilustra a Figura 3.4.8$b$, a altura $h$ do paralelepípedo é o comprimento da projeção ortogonal de **u** sobre $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Logo, pela Fórmula (10) da Seção 3.3,

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\, \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Assim, o volume $V$ do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base}) \cdot \text{altura} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

E portanto, por (7),

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

completando a prova. ■

OBSERVAÇÃO. Se $V$ denota o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **u**, **v** e **w**, então o Teorema 3.4.4 e a Fórmula (7) garantem que

$$V = \begin{bmatrix} \text{volume do paralelepípedo} \\ \text{determinado por } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{e } \mathbf{w} \end{bmatrix} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \qquad (8)$$

Disto, e do Teorema 3.3.1$b$, nós podemos concluir que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

onde os resultados + ou − dependem de **u** fazer um ângulo agudo ou obtuso com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

A Fórmula (8) leva a um teste útil para verificar se três dados vetores ficam em um mesmo plano ou não. Como três vetores não-coplanares determinam um paralelepípedo de volume positivo, decorre de (8) que $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$ se, e somente se, os vetores **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano. Assim, temos o resultado seguinte.

**Teorema 3.4.5**

*Se os três vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ têm o mesmo ponto inicial, então eles ficam em um mesmo plano se, e somente se,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Independência entre Produto Vetorial e Coordenadas** No início, definimos um vetor como sendo um segmento de reta orientado ou uma flecha nos espaços bi e tridimensionais; sistemas de coordenadas e componentes foram introduzidos mais tarde a fim de simplificar os cálculos com vetores. Assim, um vetor tem uma "existência matemática" independentemente da introdução ou não de um sistema de coordenadas. Além disto, os componentes de um vetor não são determinados somente pelo vetor; eles também dependem do sistema de coordenadas escolhido. Por exemplo, na Figura 3.4.9 nós fornecemos um vetor fixo **v** do plano e dois sistemas de coordenadas distintos. No sistema de coordenadas $xy$, os componentes de **v** são (1, 1) e no sistema de coordenadas $x'y'$ eles são $(\sqrt{2}, 0)$.

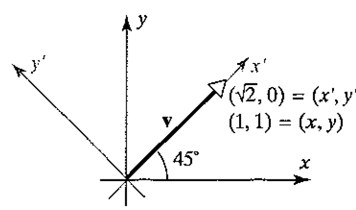



**Figura 3.4.9**

Isto levanta uma questão importante sobre nossa definição de produto vetorial. Já que definimos o produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ em termos de componentes de **u** e **v** e uma vez que estes componentes dependem do sistema de coordenadas escolhido, poderia ser possível que dois vetores **u** e **v** *fixados* tivessem produtos vetoriais distintos em sistemas de coordenadas diferentes.

Felizmente, isto não ocorre e, para ver porque, nós só precisamos lembrar que

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- O sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é determinado pela regra da mão direita.
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Estas três propriedades determinam o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ completamente: a primeira e a segunda propriedades determinam a direção e sentido e a terceira propriedade determina o comprimento. Como estas propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dependem somente dos comprimentos e das posições relativas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e não do particular sistema de coordenadas de mão direita que estamos usando, o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ permanecerá inalterado se introduzirmos um outro sistema de coordenadas de mão direita. Assim, nós dizemos que a definição de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ***independente de coordenadas***. Este resultado é importante para físicos e engenheiros que, muitas vezes, trabalham com vários sistemas de coordenadas em um mesmo problema.

### EXEMPLO 6 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é Independente do Sistema de Coordenadas

Considere dois vetores perpendiculares $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cada um de comprimento 1 (Figura 3.4.10*a*). Se nós introduzirmos um sistema de coordenadas $xyz$ como indicado na Figura 3.4.10*b*, então

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

No entanto, introduzindo um sistema de coordenadas como mostra a Figura 3.4.10*c*, temos

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

e portanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

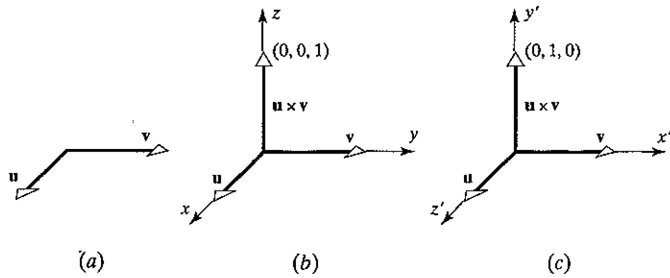



**Figura 3.4.10**

No entanto, a partir das Figuras 3.4.10*b* e 3.4.10*c* é claro que o vetor (0, 0, 1) no sistema $xyz$ coincide com o vetor (0, 1, 0) no sistema $x'y'z'$. Assim, obtemos o mesmo vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, tanto usando coordenadas do sistema $xyz$ quanto usando coordenadas do sistema $x'y'z'$. ♦

## Conjunto de Exercícios 3.4

**1.** Sejam $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$ e $\mathbf{w} = (2, 6, 7)$. Calcule

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

**2.** Encontre um vetor que é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

**3.** Encontre a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$
(c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

**4.** Encontre a área do triângulo de vértices $P$, $Q$ e $R$.

(a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(4, 6, 2)$ (b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(6, 1, 8)$

**5.** Verifique o Teorema 3.4.1 para os vetores $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$.

**6.** Verifique as partes (*a*), (*b*) e (*c*) do Teorema 3.4.2 para $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$ e $k = -5$.

**7.** Encontre um vetor $\mathbf{v}$ que é ortogonal ao vetor $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$.

**8.** Encontre o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$
(b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

**9.** Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Encontre

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

**10.** Obtenha o volume do paralelepípedo de lados $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$ (b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

**11.** Determine se **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano quando seus pontos iniciais coincidem.

(a) $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$

(b) $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (4, -8, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = (3, -4, 12)$

**12.** Encontre todos os vetores unitários paralelos ao plano *yz* que são perpendiculares ao vetor $(3, -1, 2)$.

**13.** Encontre todos os vetores unitários do plano determinado por $\mathbf{u} = (3, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ que são perpendiculares ao vetor $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$.

**14.** Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Mostre que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

**15.** Simplifique $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

**16.** Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ e $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.

**17.** (a) Obtenha a área do triângulo de vértices $A\ (1, 0, 1)$, $B\ (0, 2, 3)$ e $C\ (2, 0, 1)$.

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a altura do vértice $C$ ao lado $A\,B$.

**18.** Mostre que se **u** é um vetor de um ponto qualquer de uma reta a um ponto $P$ fora da reta e se **v** é um vetor paralelo à reta, então a distância entre $P$ e a reta é dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \,/\, \|\mathbf{v}\|$.

**19.** Use o resultado do Exercício 18 para encontrar a distância entre o ponto $P$ e a reta pelos pontos $A$ e $B$:

(a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ (b) $P(4, 3, 0)$, $A(2, 1, -3)$, $B(0, 2, -1)$

**20.** Prove: Se $\theta$ é o ângulo entre **u** e **v** e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, então $\operatorname{tg} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \,/\, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

**21.** Considere o paralelepípedo de lados $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (1, 3, 3)$.

(a) Encontre a área da face determinada por **u** e **v**.

(b) Encontre o ângulo entre **u** e o plano contendo a face determinada por **v** e **w**.

[***Observação***. O ***ângulo entre um vetor e um plano*** é definido pelo complemento do ângulo $\theta$ entre o vetor e a normal do plano, tomando $0 \leq \theta \leq \pi / 2$.]

**22.** Encontre um vetor **n** perpendicular ao plano determinado pelos pontos $A\ (0, -2, 1)$, $B\ (1, -1, -2)$ e $C\ (-1, 1, 0)$. [Veja observação no Exercício 21.]

**23.** Sejam **m** e **n** os vetores cujos componentes no sistema *xyz* da Figura 3.4.10 são $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.

(a) Encontre os componentes de **m** e **n** no sistema $x'y'z'$ da Figura 3.4.10.

(b) Calcule $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando os componentes do sistema *xyz*.

(c) Calcule $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ usando os componentes do sistema $x'y'z'$.

(d) Mostre que os vetores obtidos em (b) e (c) são iguais.

**24.** Prove as seguintes identidades.

(a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

**25.** Sejam **u**, **v** e **w** vetores não-nulos com o mesmo ponto inicial no espaço tridimensional mas tais que dois quaisquer deles não são colineares. Mostre que

(a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no mesmo plano determinado por **v** e **w**.

(b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está no mesmo plano determinado por **u** e **v**.

**26.** Prove a parte (*d*) do Teorema 3.4.1. [***Sugestão***. Prove o resultado primeiro no caso $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, depois o caso $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e, por último, o caso $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Finalmente, prove o caso geral $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escrevendo $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$.]

**27.** Prove a parte (*e*) do Teorema 3.4.1. [***Sugestão***. Aplique a parte (*a*) do Teorema 3.4.2 ao resultado da parte (*d*) do Teorema 3.4.1.]

**28.** Sejam $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$. Calcule $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ usando a técnica do Exercício 26; depois confira seu resultado calculando o produto diretamente.

**29.** Prove: Se **a**, **b**, **c** e **d** estão num mesmo plano, então $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

**30.** É um teorema da geometria sólida que o volume de um tetraedro é dado por $\frac{1}{3}$ (área da base) · (altura). Use este resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores **a**, **b** e **c** é $\frac{1}{6}|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ (veja figura dada).

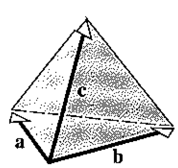



**Figura Ex-30**

**31.** Use o resultado do Exercício 30 para encontrar o volume do tetraedro de vértices $P$, $Q$, $R$ e $S$.

(a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 0, 1)$, $S(3, -2, 3)$

(b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$

**32.** Prove a parte (*b*) do Teorema 3.4.2.

**33.** Prove as partes (*c*) e (*d*) do Teorema 3.4.2.

**34.** Prove as partes (*e*) e (*f*) do Teorema 3.4.2.

## Discussão e Descoberta

35. (a) Suponha que **u** e **v** são vetores não-colineares com ponto inicial na origem do espaço tridimensional. Faça um esboço que ilustra como o vetor **w** = **v** × (**u** × **v**) está orientado em relação a **u** e a **v**.
(b) O que você sabe dizer sobre os valores de **u** · **w** e **v** · **w**? Explique seu raciocínio.
36. Se **u** ≠ **0**, é correto cancelar **u** de ambos os lados da equação **u** × **v** = **u** × **w** e concluir que **v** = **w**? Explique seu raciocínio.
37. Há alguma coisa errada com uma das seguintes expressões. Qual delas é e o que está errado?
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}),\qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\times\mathbf{w},\qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$
38. O que você pode dizer sobre os vetores **u** e **v** se **u** × **v** = **0**?
39. Dê alguns exemplos de regras algébricas que valem para a multiplicação de números reais mas que não valem para o produto vetorial de vetores?

# 3.5 RETAS E PLANOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

***Nesta seção nós utilizaremos vetores para deduzir equações de retas e planos no espaço tridimensional. Depois usaremos estas equações para resolver alguns problemas geométricos básicos.***

**Planos no Espaço Tridimensional** Na Geometria Analítica, uma reta no espaço bidimensional pode ser especificada dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Similarmente, um plano no espaço tridimensional pode ser especificado dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Um método conveniente para descrever a inclinação de um plano é especificar um vetor não-nulo, chamado um vetor ***normal***, que é perpendicular ao plano.

Suponha que queremos encontrar a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ e que tenha o vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. É evidente pela Figura 3.5.1 que o plano consiste precisamente dos pontos $P\,(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a **n**, ou seja,

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{1}$$

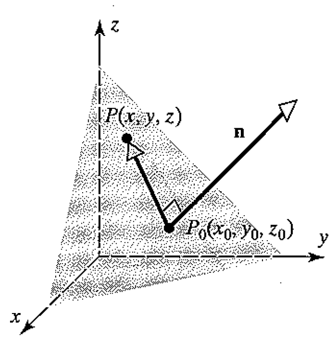



**Figura 3.5.1** Plano com vetor normal.

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a Equação (1) pode ser escrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

Esta é a forma ***ponto-normal*** da equação de uma reta.

**EXEMPLO 1 Encontrando a Equação Ponto-Normal de um Plano**

Encontre a equação do plano que passa pelo ponto (3, –1, 7) e é perpendicular ao vetor **n** = (4, 2, –5).

*Solução.*

Por (2), a forma ponto-normal é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$ ◆

Multiplicando e agrupando os termos, (2) pode ser reescrita na forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde $a$, $b$, $c$ e $d$ são constantes, com $a$, $b$ e $c$ não todas nulas. Por exemplo, a equação no Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Como o próximo teorema indica, os planos no espaço tridimensional são representados por equações da forma $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

**Teorema 3.5.1**

*Se a, b, c e d são constantes e a, b e c não são todas nulas, então o gráfico da equação*

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \tag{3}$$

*é um plano com um vetor normal* $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

A equação (3) é uma equação linear em $x$, $y$ e $z$, denominada a ***forma geral*** da equação de um plano.

*Prova.* Por hipótese, os coeficientes $a$, $b$ e $c$ não são todos nulos. Suponha, por enquanto, que $a \neq 0$. Então a equação $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ pode ser reescrita na forma $a\,(x + (d\,/\,a)) + b\,y + c\,z = 0$. Mas isto é uma forma ponto-normal do plano passando pelo ponto $(-d\,/\,a, 0, 0)$ e tendo $\mathbf{n} = (a, b, c)$ como normal.

Se $a = 0$, então ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Uma simples modificação do argumento acima dá conta destes casos. ■

Assim como as soluções de um sistema de equações lineares