Discussão e Descoberta

35. (a) Suponha que **u** e **v** são vetores não-colineares com ponto inicial na origem do espaço tridimensional. Faça um esboço que ilustra como o vetor $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ está orientado em relação a **u** e a **v**.
    (b) O que você sabe dizer sobre os valores de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.
36. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, é correto cancelar **u** de ambos os lados da equação $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Explique seu raciocínio.
37. Há alguma coisa errada com uma das seguintes expressões. Qual delas é e o que está errado?
    $$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
38. O que você pode dizer sobre os vetores **u** e **v** se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$?
39. Dê alguns exemplos de regras algébricas que valem para a multiplicação de números reais mas que não valem para o produto vetorial de vetores?

3.5 RETAS E PLANOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Nesta seção nós utilizaremos vetores para deduzir equações de retas e planos no espaço tridimensional. Depois usaremos estas equações para resolver alguns problemas geométricos básicos.

Planos no Espaço Tridimensional Na Geometria Analítica, uma reta no espaço bidimensional pode ser especificada dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Similarmente, um plano no espaço tridimensional pode ser especificado dando-se sua inclinação e um de seus pontos. Um método conveniente para descrever a inclinação de um plano é especificar um vetor não-nulo, chamado um vetor ***normal***, que é perpendicular ao plano.

Suponha que queremos encontrar a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ e que tenha o vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. É evidente pela Figura 3.5.1 que o plano consiste precisamente dos pontos $P\,(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a **n**, ou seja,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{1}$$

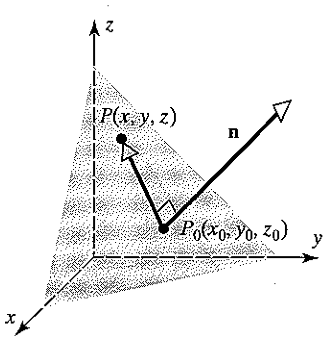

Figura 3.5.1 Plano com vetor normal.

Como $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a Equação (1) pode ser escrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

Esta é a forma ***ponto-normal*** da equação de uma reta.

EXEMPLO 1 Encontrando a Equação Ponto-Normal de um Plano

Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $(3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$.

Solução.

Por (2), a forma ponto-normal é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$ ♦

Multiplicando e agrupando os termos, (2) pode ser reescrita na forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde a, b, c e d são constantes, com a, b e c não todas nulas. Por exemplo, a equação no Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Como o próximo teorema indica, os planos no espaço tridimensional são representados por equações da forma $ax + by + cz + d = 0$.

Teorema 3.5.1

Se a, b, c e d são constantes e a, b e c não são todas nulas, então o gráfico da equação

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

é um plano com um vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

A equação (3) é uma equação linear em x, y e z, denominada a ***forma geral*** da equação de um plano.

Prova. Por hipótese, os coeficientes a, b e c não são todos nulos. Suponha, por enquanto, que $a \neq 0$. Então a equação $ax + by + cz + d = 0$ pode ser reescrita na forma $a\,(x + (d\,/\,a)) + by + cz = 0$. Mas isto é uma forma ponto-normal do plano passando pelo ponto $(-d\,/\,a, 0, 0)$ e tendo $\mathbf{n} = (a, b, c)$ como normal.

Se $a = 0$, então ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. Uma simples modificação do argumento acima dá conta destes casos. ■

Assim como as soluções de um sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

correspondem aos pontos da intersecção das retas $a\,x + b\,y = k_1$ e $c\,x + d\,y = k_2$ no plano xy, também as soluções de um sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \tag{4}$$

correspondem aos pontos de intersecção dos três planos $a\,x + b\,y + c\,z = k_1$, $d\,x + e\,y + f\,z = k_2$ e $g\,x + h\,y + i\,z = k_3$.

Na Figura 3.5.2 ilustramos as possibilidades geométricas que ocorrem quando (4) tem zero, uma ou infinitas soluções.

EXEMPLO 2 Equação de um Plano por Três Pontos

Encontre a equação de um plano passando pelos pontos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ e $P_3(3, -1, 2)$.

Solução.

Como os três pontos estão no plano, suas coordenadas devem satisfazer a equação geral $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ do plano. Assim,

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema obtemos $a = -\frac{9}{16}t$, $b = -\frac{1}{16}t$, $c = \frac{5}{16}t$ e $d = t$. Tomando $t = -16$, por exemplo, resulta a equação desejada

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

Nós observamos que qualquer outra escolha de t fornece um múltiplo desta equação, de modo que qualquer valor de $t \neq 0$ também daria uma equação válida do plano.

Solução Alternativa.

Como os pontos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ e $P_3(3, -1, 2)$ estão no plano, os vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$ são paralelos ao plano. Portanto, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ é normal ao plano, já que é perpendicular a ambos $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Disto e por P_1 estar no plano, vemos que

$$9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 0 \quad \text{ou} \quad 9x + y - 5z - 16 = 0$$

é uma forma ponto-normal para a equação do plano. ♦

Forma Vetorial da Equação de um Plano A notação vetorial fornece uma alternativa útil de escrever a forma ponto-normal da equação de um plano. Observando a Figura 3.5.3, sejam $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor da origem ao ponto $P(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o vetor da origem ao ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e seja $\mathbf{n} = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano. Então $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, e assim a Fórmula (1) pode ser reescrita como

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{5}$$

Esta é chamada a ***forma vetorial da equação de um plano.***

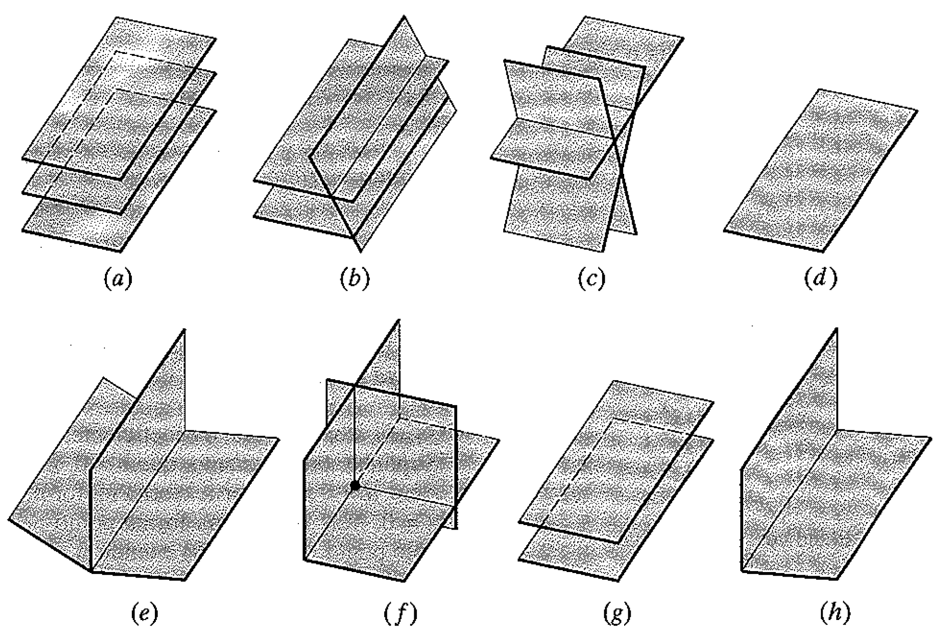

Figura 3.5.2 (*a*) Nenhuma solução (3 planos paralelos). (*b*) Nenhuma solução (2 planos paralelos). (*c*) Nenhuma solução (3 planos sem intersecção comum). (*d*) Infinitas soluções (3 planos coincidentes). (*e*) Infinitas soluções (3 planos cortando em uma reta). (*f*) Uma solução (3 planos cortando em um ponto). (*g*) Nenhuma solução (2 planos coincidentes paralelos a um terceiro plano). (*h*) Infinitas soluções (2 planos coincidentes cortando um terceiro plano).

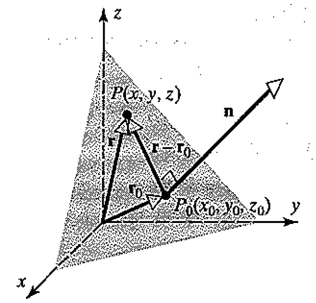

Figura 3.5.3

EXEMPLO 3 Equações Vetoriais de um Plano Usando (5)

A equação

$$(-1, 2, 5) \cdot (x - 6, y - 3, z + 4) = 0$$

é a equação vetorial do plano que passa pelo ponto (6, 3, –4) e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = (-1, 2, 5)$. ♦

Retas no Espaço Tridimensional Iremos mostrar agora como obter equações para as retas no espaço tridimensional. Suponha que l é a reta no espaço tridimensional pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e paralela ao vetor não-nulo $\mathbf{v} = (a, b, c)$. É evidente (Figura 3.5.4) que l consiste precisamente dos pontos $P(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a $\mathbf{v}$, ou seja, para os quais existe um escalar t tal que

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \tag{6}$$

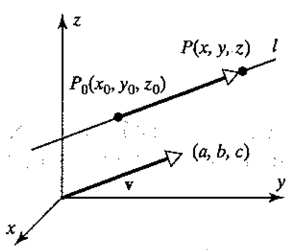

Figura 3.5.4 $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a $\mathbf{v}$.

Em termos de componentes, (6) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

do que segue que $x - x_0 = ta$, $y - y_0 = tb$, e $z - z_0 = tc$, de modo que

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

À medida que o parâmetro t varia de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto $P(x, y, z)$ traça a reta l. As equações

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{7}$$

são chamadas as ***equações paramétricas*** de l.

EXEMPLO 4 Equações Paramétricas de uma Reta

A reta pelo ponto (1, 2, –3) e paralela ao vetor $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$ tem equações paramétricas

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t \quad (-\infty < t < +\infty)$$ ♦

EXEMPLO 5 Intersecção de uma Reta e o Plano xy

(a) Encontre as equações paramétricas da reta l que passa pelos pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

(b) Em que ponto a reta corta o plano xy?

Solução (a). Como o vetor $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$ é paralelo a l e $P_1(2, 4, -1)$ é um ponto de l, a reta l é dada por

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Solução (b). A reta corta o plano xy no ponto em que $z = -1 + 8t = 0$, ou seja, onde $t = \frac{1}{8}$. A substituição deste valor de t nas equações paramétricas de l fornece o ponto

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{19}{8}, \tfrac{7}{2}, 0\right)$$

como ponto de corte. ♦

EXEMPLO 6 A Linha de Intersecção de Dois Planos

Encontre as equações paramétricas da reta de corte dos planos

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \quad \text{e} \quad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

Solução.

A reta de corte consiste de todos os pontos (x, y, z) que satisfazem as duas equações do sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 6 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema obtemos $x = \frac{26}{11} + \frac{16}{11}t$, $y = -\frac{6}{11} - \frac{2}{11}t$ e $z = t$. Assim, a reta de corte pode ser representada pelas equações paramétricas

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t, \quad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t, \quad z = t \quad (-\infty < t < +\infty)$$ ♦

Forma Vetorial da Equação de uma Reta A notação vetorial fornece uma alternativa útil de escrever as equações paramétricas de uma reta. Observando a Figura 3.5.5, sejam $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor da origem ao ponto $P(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o vetor da origem ao ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e seja $\mathbf{v} = (a, b, c)$ um vetor paralelo à reta. Então $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ e assim, a Fórmula (6) pode ser reescrita como

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

Tomando em consideração o intervalo de variação dos valores de t, isto pode ser reescrito como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{8}$$

Esta é chamada a ***forma vetorial da equação de uma reta*** no espaço tridimensional.

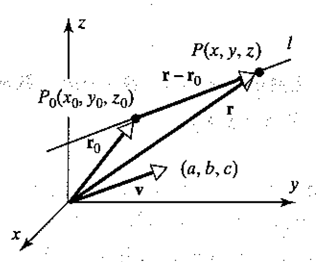

Figura 3.5.5 Interpretação vetorial de uma reta no espaço tridimensional.

EXEMPLO 7 Uma Reta Paralela a um Vetor Dado

A equação

$$(x, y, z) = (-2, 0, 3) + t(4, -7, 1)$$

é a equação vetorial da reta pelo ponto (–2, 0, 3) que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (4, -7, 1)$. ♦

Problemas Envolvendo Distância Concluímos esta seção discutindo dois "problemas de distância" básicos no espaço tridimensional:

Problemas:
(a) Obter a distância entre um ponto e um plano.
(b) Obter a distância entre dois planos paralelos.

Os dois problemas são relacionados. Se soubermos obter a distância entre um ponto e um plano, então podemos obter a distância entre dois planos paralelos calculando a distância entre qualquer um dos dois planos e um ponto arbitrário P_0 do outro (Figura 3.5.6).

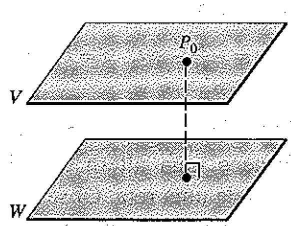

Figura 3.5.6 A distância entre os planos paralelos V e W é igual à distância entre P_0 e W.

Teorema 3.5.2 Distância entre um Ponto e um Plano

A distância D entre um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{9}$$

Prova. Seja $Q(x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer do plano. Posicione um vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ com ponto inicial em Q. Como está ilustrado na Figura 3.5.7, a distância D é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre $\mathbf{n}$. Assim, usando (10) da Seção 3.3,

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

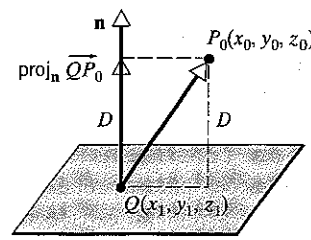

Figura 3.5.7 A distância de P_0 ao plano.

Mas

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Logo

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{10}$$

Como o ponto $Q(x_1, y_1, z_1)$ está no plano, suas coordenadas devem satisfazer a equação do plano; portanto

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ou

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substituindo esta expressão em (10) obtemos (9). ■

OBSERVAÇÃO. Note a semelhança entre (9) e a fórmula para a distância entre um ponto e uma reta no plano [ver (13) da Seção 3.3].

EXEMPLO 8 Distância entre um Ponto e um Plano

Encontre a distância D entre o ponto (1, –4, –3) e o plano $2x - 3y + 6z = -1$.

Solução.

Para aplicar (9), primeiro reescrevemos a equação do plano na forma

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

Então

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$ ♦

Dados dois planos, ou bem eles se cortam, e então podemos perguntar pela sua reta de corte, como no Exemplo 6, ou bem são paralelos, e então podemos perguntar pela distância entre eles. O próximo exemplo ilustra o segundo caso.

EXEMPLO 9 Distância entre Planos Paralelos

Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos pois seus vetores normais, (1, 2, –2) e (2, 4, –4), são paralelos. Encontre a distância entre estes planos.

Solução.

Para obter a distância D entre os planos, podemos selecionar um ponto arbitrário em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Colocando $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ neste plano. A partir de (9), a distância entre P_0 e o plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$ ♦

Conjunto de Exercícios 3.5

1. Encontre a forma ponto-normal da equação do plano passando por P e tendo normal $\mathbf{n}$.

(a) $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$ (b) $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$
(c) $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

2. Escreva as equações dos planos do Exercício 1 na forma geral.

3. Encontre uma forma ponto-normal.

(a) $-3x + 7y + 2z = 10$ (b) $x - 4z = 0$

4. Encontre a equação do plano que passa pelos pontos dados.

(a) $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$ (b) $P(5, 4, 3)$, $Q(4, 3, 1)$, $R(1, 5, 4)$

5. Determine se os planos são paralelos.

(a) $4x - y + 2z = 5$ e $7x - 3y + 4z = 8$
(b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ e $3x - 12y - 9z - 7 = 0$
(c) $2y = 8x - 4z + 5$ e $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

6. Determine se a reta e o plano são paralelos.

(a) $x = -5 - 4t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + 2t;\ \ x + 2y + 3z - 9 = 0$
(b) $x = 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 - t;\ \ 4x - y + 2z = 1$

7. Determine se os planos são perpendiculares.

(a) $3x - y + z - 4 = 0,\ x + 2z = -1$ (b) $x - 2y + 3z = 4,\ -2x + 5y + 4z = -1$

8. Determine se a reta e o plano são perpendiculares.

(a) $x = -2 - 4t,\ y = 3 - 2t,\ z = 1 + 2t;\ \ 2x + y - z = 5$
(b) $x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ z = 5 + 3t;\ \ 6x + 6y - 7 = 0$

9. Encontre as equações paramétricas para a reta passando por P e paralela a $\mathbf{n}$.

(a) $P(3, -1, 2)$; $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ (b) $P(-2, 3, -3)$; $\mathbf{n} = (6, -6, -2)$
(c) $P(2, 2, 6)$; $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$

10. Encontre as equações paramétricas para a reta passando pelos pontos dados.

(a) $(5, -2, 4)$, $(7, 2, -4)$ (b) $(0, 0, 0)$, $(2, -1, -3)$

11. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.

(a) $7x - 2y + 3z = -2$ e $-3x + y + 2z + 5 = 0$ (b) $2x + 3y - 5z = 0$ e $y = 0$

12. Encontre a forma vetorial da equação do plano passando por P_0 e tendo normal $\mathbf{n}$.

(a) $P_0(-1, 2, 4)$; $\mathbf{n} = (-2, 4, 1)$ (b) $P_0(2, 0, -5)$; $\mathbf{n} = (-1, 4, 3)$
(c) $P_0(5, -2, 1)$; $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ (d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (a, b, c)$

13. Determine se os planos são paralelos.

(a) $(-1, 2, 4) \cdot (x - 5, y + 3, z - 7) = 0$; $(2, -4, -8) \cdot (x + 3, y + 5, z - 9) = 0$

(b) $(3, 0, -1) \cdot (x + 1, y - 2, z - 3) = 0$; $(-1, 0, 3) \cdot (x + 1, y - z, z - 3) = 0$

14. Determine se os planos são perpendiculares.

(a) $(-2, 1, 4) \cdot (x - 1, y, z + 3) = 0$; $(1, -2, 1) \cdot (x + 3, y - 5, z) = 0$

(b) $(3, 0, -2) \cdot (x + 4, y - 7, z + 1) = 0$; $(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

15. Encontre a forma vetorial da equação da reta passando por P_0 e paralela a **v**.

(a) $P_0(-1, 2, 3)$; $\mathbf{v} = (7, -1, 5)$ (b) $P_0(2, 0, -1)$; $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $P_0(2, -4, 1)$; $\mathbf{v} = (0, 0, -2)$ (d) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{v} = (a, b, c)$

16. Mostre que a reta

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(a) está no plano $6x + 4y - 4z = 0$

(b) está abaixo do plano $5x - 3y + 3z = 1$ e é paralela a este plano

(c) está acima do plano $6x + 2y - 2z = 3$ e é paralela a este plano

17. Encontre uma equação para o plano passando por $(-2, 1, 7)$ que é perpendicular à reta $x - 4 = 2t$, $y + 2 = 3t$, $z = -5t$.

18. Encontre uma equação do

(a) plano xy

(b) plano xz

(c) plano yz

19. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) que é

(a) paralelo ao plano xy

(b) paralelo ao plano yz

(c) paralelo ao plano xz

20. Encontre uma equação para o plano passando pela origem e que é paralelo ao plano $7x + 4y - 2z + 3 = 0$.

21. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(3, -6, 7)$ que é paralelo ao plano $5x - 2y + z - 5 = 0$.

22. Encontre o ponto de corte da reta

$$x - 9 = -5t, \quad y + 1 = -t, \quad z - 3 = t$$

e o plano $2x - 3y + 4z + 7 = 0$.

23. Encontre uma equação para o plano que contém a reta $x = -1 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = 2 - t$ e que é perpendicular ao plano $2x - 4y + 2z = 9$.

24. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(2, 4, -1)$ que contém a interseção dos planos $x - y - 4z = 2$ e $-2x + y + 2z = 3$.

25. Mostre que os pontos $(-1, -2, -3)$, $(-2, 0, 1)$, $(-4, -1, -1)$ e $(2, 0, 1)$ estão num mesmo plano.

26. Encontre equações paramétricas para a reta passando pelo ponto $(-2, 5, 0)$ que é paralela aos planos $2x + y - 4z = 0$ e $-x + 2y + 3z + 1 = 0$.

27. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(-2, 1, 5)$ que é perpendicular aos planos $4x - 2y + 2z = -1$ e $3x + 3y - 6z = 5$.

28. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(2, -1, 4)$ que é perpendicular à reta de interseção dos planos $4x + 2y + 2z = -1$ e $3x + 6y + 3z = 7$.

29. Encontre uma equação para o plano que é perpendicular ao plano $8x - 2y + 6z = 1$ e que passa pelos pontos $P_1(-1, 2, 5)$ e $P_2(2, 1, 4)$.

30. Mostre que as retas

$$x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 7 + t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

são paralelas e encontre uma equação para o plano que elas determinam.

31. Encontre uma equação para o plano passando pelo ponto $(1, -1, 2)$ que contém a reta $x = t$, $y = t + 1$, $z = -3 + 2t$.

32. Encontre uma equação para o plano que contém a reta $x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 2t$ e é paralelo à reta de corte dos planos $-x + 2y + z = 0$ e $x + z + 1 = 0$.

33. Encontre uma equação para o plano cujos pontos são todos eqüidistantes de $(-1, -4, -2)$ e $(0, -2, 2)$.

34. Mostre que a reta

$$x - 5 = -t, \quad y + 3 = 2t, \quad z + 1 = -5t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

é paralela ao plano $-3x + y + z - 9 = 0$.

35. Mostre que as retas

$$x - 3 = 4t, \quad y - 4 = t, \quad z - 1 = 0 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

e

$$x + 1 = 12t, \quad y - 7 = 6t, \quad z - 5 = 3t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

são concorrentes e encontre o ponto de corte.

36. Encontre uma equação do plano que contém as retas do Exercício 35.

37. Encontre as equações paramétricas para a reta de corte dos planos dados.

(a) $-3x + 2y + z = -5$ e $7x + 3y - 2z = -2$
(b) $5x - 7y + 2z = 0$ e $y = 0$

38. Mostre que o plano que corta os eixos coordenados em $x = a$, $y = b$ e $z = c$ tem equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

desde que a, b e c sejam não-nulos.

39. Obtenha a distância entre o ponto e o plano.
(a) $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$
(b) $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$
(c) $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

40. Obtenha a distância entre os planos paralelos dados.
(a) $3x - 4y + z = 1$ e $6x - 8y + 2z = 3$
(b) $-4x + y - 3z = 0$ e $8x - 2y + 6z = 0$
(c) $2x - y + z = 1$ e $2x - y + z = -1$

41. Mostre que se a, b e c são não-nulos, então a reta

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

consiste de todos os pontos (x, y, z) que satisfazem

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas são as ***equações simétricas*** da reta.

42. Encontre as equações simétricas das retas das partes (a) e (b) do Exercício 9. [***Observação.*** Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

43. Em cada parte, encontre equações de dois planos cuja interseção é a reta dada.
(a) $x = 7 - 4t, \quad y = -5 - 2t, \quad z = 5 + t \quad (-\infty < t < +\infty)$
(b) $x = 4t, \quad y = 2t, \quad z = 7t \quad (-\infty < t < +\infty)$

[***Sugestão.*** Cada igualdade das equações simétricas de uma reta representa um plano contendo a reta. Veja o Exercício 41 para a terminologia.]

44. Dois planos que se cortam no espaço tridimensional determinam dois ângulos de interseção, um agudo ($0 \leq \theta \leq 90°$) e seu suplemento $180° - \theta$ (veja figura). Se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são vetores não-nulos normais aos planos, então o ângulo entre $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ é θ ou $180° - \theta$, dependendo dos sentidos das normais (veja figura). Em cada parte, encontre o ângulo agudo de interseção dos planos até o grau mais próximo.
(a) $x = 0$ e $2x - y + z - 4 = 0$
(b) $x + 2y - 2z = 5$ e $6x - 3y + 2z = 8$
[***Observação.*** É necessária uma calculadora.]

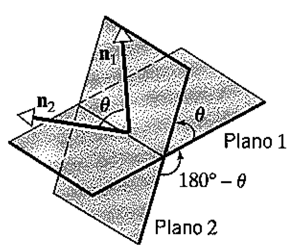

Figura Ex-44

45. Encontre o ângulo agudo entre o plano $x - y - 3z = 5$ e a reta $x = 2 - t$, $y = 2t$, $z = 3t - 1$ até o grau mais próximo. [***Sugestão.*** Veja o Exercício 44.]

Discussão e Descoberta

46. O que as retas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - t\mathbf{v}$ têm em comum? Explique.

47. Qual é a relação entre a reta $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$ e o plano $ax + by + cz = 0$? Explique seu raciocínio.

48. Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ vetores da origem aos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, respectivamente. O que a equação

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

representa geometricamente? Explique seu raciocínio.

49. Escreva as equações paramétricas para duas retas perpendiculares que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0).

Requisito: Recurso Computacional

Exercícios Computacionais do Capítulo 3

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

Seção 3.1

T1. (***Vetores***) Leia em seu manual sobre como entrar com vetores e como soma-los, subtrai-los e multiplicá-los por escalares. Então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 1.

T2. (***Desenhando vetores***) Se você está usando um recurso que desenha retas no espaço bi ou tridimensional, tente desenhar alguns segmentos de reta com pontos iniciais e finais escolhidos. Você também pode querer ver se seu recurso consegue desenhar pontas de flechas, e neste caso pode fazer os segmentos de retas parecerem vetores geométricos.

Seção 3.3

T1. (***Produto escalar e norma***) Alguns programas possuem comandos para calcular produtos escalares e normas enquanto outros só calculam o produto escalar. Nestes últimos, as normas podem ser obtidas da fórmula $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Leia em seu manual sobre como realizar o produto escalar (e norma, se disponível) e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 2.

T2. (***Projeções***) Veja se você consegue programar seu recurso computacional para calcular proj **u** quando o usuário entrar com os vetores **a** e **b**. Confira seu trabalho fazendo seu programa realizar os cálculos do Exemplo 6.

Seção 3.4

T1. (***Produto vetorial***) Leia em seu manual sobre realizar o produto vetorial e então use seu recurso para fazer os cálculos do Exemplo 1.

T2. (***Fórmula do produto vetorial***) Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para confirmar a Fórmula (1a).

T3. (***Propriedades do produto vetorial***) Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para provar as afirmações do Teorema 3.4.1.

T4. (***Área de um triângulo***) Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir a área do triângulo no espaço tridimensional determinado por três pontos quando o usuário entrar com as coordenadas destes pontos. Confira seu trabalho calculando a área do triângulo do Exemplo 4.

T5. (***Fórmula do produto misto***) Se você está usando um sistema algébrico computacional, use-o para provar a Fórmula (7) mostrando que a diferença entre os dois lados é zero.

T6. (***Volume de um paralelepípedo***) Veja se você consegue programar seu recurso computacional para produzir o volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores **u**, **v** e **w** quando o usuário entrar com estes vetores. Confira seu trabalho resolvendo o Exercício 10 do Conjunto de Exercícios 3.4.