5.3 INDEPENDÊNCIA LINEAR

Na seção anterior nós aprendemos que um conjunto de vetores S = {v₁, v₂,..., vᵣ} gera um dado espaço vetorial V se cada vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de S. Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor em V como uma combinação linear de vetores de um conjunto gerador. Nesta seção nós iremos estudar as condições sob as quais cada vetor de V só pode ser escrito exatamente de uma única maneira como combinação linear de um conjunto gerador de vetores. Conjuntos geradores com esta propriedade desempenham um papel fundamental no estudo de espaços vetoriais.

Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto não-vazio de vetores, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem pelo menos uma solução, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Se esta é a única solução, então o conjunto S é chamado ***linearmente independente***. Se existem outras soluções, então S é um conjunto ***linearmente dependente***.

EXEMPLO 1 Um Conjunto Linearmente Dependente

Se $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$, então o conjunto de vetores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente dependente, pois $3\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$. ♦

EXEMPLO 2 Um Conjunto Linearmente Dependente

Os polinômios

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \; \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2 \text{ e } \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

formam um conjunto linearmente dependente em P_3, pois $3\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = 0$. ♦

EXEMPLO 3 Conjuntos Linearmente Independentes

Considere os vetores $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ em R^3. Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

é dada por

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Isto implica que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ e $k_3 = 0$, de modo que o conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é linearmente independente. Um argumento similar pode ser usado para mostrar que os vetores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

formam um conjunto linearmente independente em R^3. ♦

EXEMPLO 4 Determinado Independência / Dependência Linear

Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

formam um conjunto linearmente dependente ou independente.

Solução.

Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

é dada por

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes, dá

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam um conjunto linearmente dependente se este sistema tiver uma solução não-trivial, ou um conjunto linearmente independente se só tiver a solução trivial. Resolvendo o sistema, obtemos

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}t, \quad k_2 = -\tfrac{1}{2}t, \quad k_3 = t$$

Assim, o sistema tem soluções não-triviais e $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam um conjunto linearmente dependente. Alternativamente, nós poderíamos mostrar a existência de soluções não-triviais sem resolver o sistema, mostrando que a matriz de coeficientes tem determinante zero e conseqüentemente é não-invertível (verifique). ♦

EXEMPLO 5 Um Conjunto Linearmente Independente em P_n

Mostre que os polinômios

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

formam um conjunto linearmente independente em P_n.

Solução.

Sejam $\mathbf{p}_0 = 1$, $\mathbf{p}_1 = x$, $\mathbf{p}_2 = x^2, \ldots, \mathbf{p}_n = x^n$ e suponha que alguma combinação linear destes polinômios é nula, digamos

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$$

ou, equivalentemente,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } (-\infty, \infty) \qquad (1)$$

Nós devemos mostrar que

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Para ver isto, lembre da Álgebra que um polinômio *não-nulo* de grau n tem no máximo n raízes distintas. Segue-se que $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, pois, caso contrário, teríamos por (1) que $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ é um polinômio não-nulo com infinitas raízes. ◆

O termo "linearmente dependente" sugere que os vetores de alguma maneira dependem um do outro. O próximo teorema mostra que isto realmente ocorre.

Teorema 5.3.1

Um conjunto S de dois ou mais vetores é:

(*a*) *linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de S.*

(*b*) *linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em S pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de S.*

Nós vamos provar a parte (*a*) e deixar a parte (*b*) como exercício.

Prova (*a*). Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um conjunto com dois ou mais vetores. Supondo que S é linearmente dependente, existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$, não todos nulos, tais que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Para sermos específicos, suponha que $k_1 \neq 0$. Então (2) pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

que expressa $\mathbf{v}_1$ como combinação linear dos outros vetores de S. Analogamente, se $k_j \neq 0$ em (2) para algum $j = 2, 3, \ldots, r$, então $\mathbf{v}_j$ pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de S.

Reciprocamente, suponha que pelo menos um dos vetores em S' pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores. Para sermos específicos, suponha que

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

e portanto

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \cdots - c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Segue que S é linearmente dependente, pois a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

é satisfeita por

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -c_2, \ldots, \quad k_r = -c_r$$

onde nem todos os escalares são nulos. A prova é similar no caso em que é um outro vetor e não $\mathbf{v}_1$ que pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S. ■

EXEMPLO 6 De Novo o Exemplo 1

No Exemplo 1 nós vimos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$$

formam um conjunto linearmente dependente. Pelo Teorema 5.3.1, pelo menos um destes vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores. Neste exemplo, cada um dos três vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores, pois da equação $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ (ver Exemplo 1) decorre

$$\mathbf{v}_1 = -\tfrac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \tfrac{1}{3}\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$ ◆

EXEMPLO 7 De Novo o Exemplo 3

No Exemplo 3 nós vimos que os vetores $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ formam um conjunto linearmente independente. Pelo Teorema 5.3.1 segue que nenhum destes vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros dois. Para ver isto diretamente, suponha que $\mathbf{k}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j}$$

Em termos de componentes,

$$(0, 0, 1) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) \text{ ou } (0, 0, 1) = (k_1, k_2, 0)$$

Mas a última equação não é válida para nenhum valor de k_1 e k_2, de modo que $\mathbf{k}$ não pode ser expresso por uma combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Similarmente, $\mathbf{i}$ não pode ser expresso por uma combinação linear de $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ e $\mathbf{j}$ não pode ser expresso por uma combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$. ◆

O seguinte teorema fornece duas informações importantes sobre independência linear.

Teorema 5.3.2

(*a*) *Um conjunto finito de vetores que contém o vetor nulo é linearmente dependente.*

(b) *Um conjunto de exatamente dois vetores é linearmente independente se, e somente se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.*

Nós vamos provar a parte (*a*) e deixar a parte (*b*) como exercício.

Prova (*a*). Dados quaisquer vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{0}\}$ é linearmente dependente pois a equação

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r + 1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

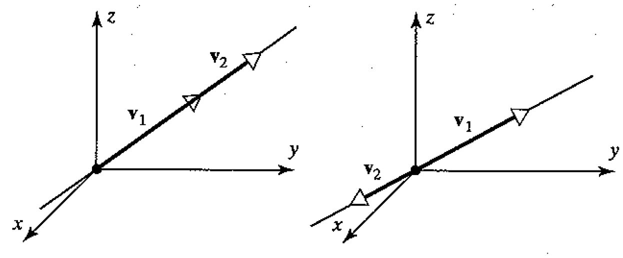
escreve $\mathbf{0}$ como uma combinação linear de vetores de S com coeficientes não todos nulos. ■

EXEMPLO 8 Usando o Teorema 5.3.2*b*

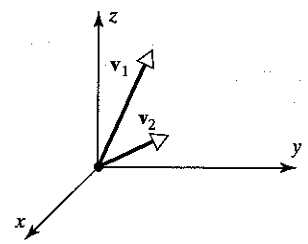
As funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \text{sen } x$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $F(-\infty, \infty)$, pois nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. ◆

Interpretação Geométrica da Independência Linear A independência linear tem uma interpretação geométrica útil em R^2 e R^3:

- Em R^2 ou R^3, um conjunto de dois vetores é linearmente independente se, e somente se, os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem (Figura 5.3.1).



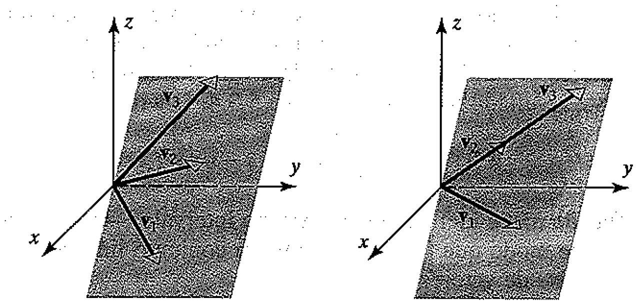
(a) Linearmente dependente (b) Linearmente dependente



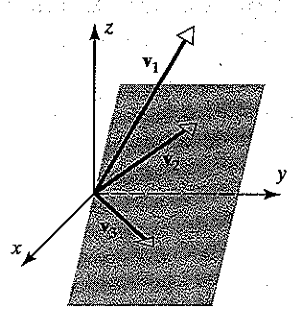
(c) Linearmente independente

Figura 5.3.1

- Em R^3, um conjunto de três vetores é linearmente independente se, e somente se, os vetores não estão num mesmo plano quando colocados com seus pontos iniciais na origem (Figura 5.3.2).



(a) Linearmente dependente (b) Linearmente dependente



(c) Linearmente independente

Figura 5.3.2

O primeiro resultado segue do seguinte fato: dois vetores são linearmente independentes se, e somente se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro. Geometricamente, isto equivale a afirmar que os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem.

O segundo resultado segue do seguinte fato: três vetores são linearmente independentes se, e somente se, nenhum dos três vetores é uma combinação linear dos outros dois. Geometricamente, isto equivale a afirmar que nenhum dos três vetores está no mesmo plano que os outros dois ou, alternativamente, que os três vetores não estão num plano comum quando colocados com seus pontos iniciais na origem (por que?).

O próximo teorema mostra que um conjunto linearmente independente em R^n pode conter no máximo n vetores.

Teorema 5.3.3

Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ um conjunto de vetores em R^n. Se $r > n$, então S é linearmente dependente.

Prova. Suponha que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\ \mathbf{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_r &= (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn}) \end{aligned}$$

Considere a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Como já foi ilustrado no Exemplo 4, se nós expressarmos ambos os lados desta equação em termos dos componentes e equacionarmos os componentes correspondentes, obteremos o sistema

$$\begin{aligned} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \cdots + v_{r1}k_r &= 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \cdots + v_{r2}k_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \cdots + v_{rn}k_r &= 0 \end{aligned}$$

Isto é um sistema homogêneo de n equações nas r incógnitas $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Como $r > n$, segue do Teorema 1.2.1 que o sistema tem soluções não-triviais. Isto mostra que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente dependente. ■

OBSERVAÇÃO. O teorema acima nos diz que um conjunto em R^2 com mais de dois vetores é linearmente dependente e que um conjunto em R^3 com mais de três vetores é linearmente dependente.

Requisito: Cálculo

Independência Linear de Funções Às vezes podemos deduzir a dependência linear de funções a partir de identidades conhecidas. Por exemplo, as funções

$$\mathbf{f}_1 = \text{sen}^2 x, \quad \mathbf{f}_2 = \cos^2 x \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_3 = 5$$

formam um conjunto linearmente dependente em $F(-\infty, \infty)$, pois a equação

$$5\mathbf{f}_1 + 5\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 = 5\,\text{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 5 = 5(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) - 5 = \mathbf{0}$$

expressa $\mathbf{0}$ como uma combinação linear de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ com coeficientes não todos zero. No entanto, estas identidades só podem ser aplicadas em situações especiais. Embora não exista um

Józef Maria Hoëné-Wrónski (1776–1853) foi um matemático e filósofo francês-polonês. Wrónski recebeu sua educação elementar em Poznán e Varsóvia. Ele serviu como oficial de artilharia no exército prussiano num levante nacional em 1794, sendo feito prisioneiro pelo exército russo; depois de solto, estudou filosofia em várias universidades alemãs. Ele tornou-se um cidadão francês em 1800 e mais tarde acabou radicado em Paris, onde desenvolveu pesquisa em análise matemática, que o levou a publicar alguns artigos controversos e, relacionado com isto, a um famoso julgamento sobre assuntos financeiros. Muitos anos depois, seu projeto de pesquisa sobre a determinação da longitude em alto mar foi recusado pelo Comitê Inglês de Longitude e Wrónski voltou-se para estudos em filosofia messiânica. Na década de 1830 ele investigou a exeqüibilidade de veículos movidos a esteiras competirem com trens, mas sem sorte, e viveu seus últimos anos na pobreza. A maior parte de seu trabalho matemático está repleto de erros e imprecisões, mas muitas vezes contém resultados e idéias isoladas valiosas. Alguns autores atribuem sua disposição para a controvérsia a tendências psicóticas e a um exagero na auto-avaliação da importância de seu trabalho.

método geral que possa ser utilizado para estabelecer a dependência ou independência linear de funções em $F(-\infty, \infty)$, nós iremos desenvolver um teorema que, às vezes, pode ser usado para mostrar que um dado conjunto de funções é linearmente independente.

Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x)$, $\mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ são funções $n-1$ vezes diferenciáveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então chamamos o determinante da matriz

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

o ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Como veremos a seguir, este determinante é útil para decidir se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ formam um conjunto linearmente independente de vetores no espaço vetorial $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

Suponha, por enquanto, que $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ são vetores linearmente dependentes em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Então existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *não todos zero*, tais que

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

para todos x no intervalo $(-\infty, \infty)$. Combinando esta equação com as equações obtidas por $n-1$ sucessivas derivações resulta

$$\begin{aligned} k_1 f_1(x) &+ k_2 f_2(x) &+ \cdots + k_n f_n(x) &= 0 \\ k_1 f_1'(x) &+ k_2 f_2'(x) &+ \cdots + k_n f_n'(x) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots & \vdots \quad & \quad \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) &+ k_2 f_2^{(n-1)}(x) &+ \cdots + k_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a dependência linear de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ implica que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem uma solução não-trivial para *cada* x no intervalo $(-\infty, \infty)$. Isto, por sua vez, implica que para cada x em $(-\infty, \infty)$, a matriz de coeficientes é não-invertível ou, equivalentemente, que seu determinante (o wronskiano) é zero para cada x em $(-\infty, \infty)$. Assim, se o wronskiano *não* é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ devem ser vetores linearmente independentes em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$. Isto é o que afirma o seguinte teorema.

Teorema 5.3.4

Se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ têm $n-1$ derivadas contínuas no intervalo $(-\infty, \infty)$ e se o wronskiano destas funções não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então estas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 9 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^1(-\infty, \infty)$

Mostre que as funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^1(-\infty, \infty)$.

Solução.

No Exemplo 8 nós mostramos que estes vetores formam um conjunto linearmente independente observando que nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro. Para fins ilustrativos, vamos obter este resultado usando o Teorema 5.3.4. O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \operatorname{sen} x$$

Esta função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifique), de modo que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ formam um conjunto linearmente independente de vetores. ♦

EXEMPLO 10 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^2(-\infty, \infty)$

Mostre que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ e $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^2(-\infty, \infty)$.

Solução.

O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

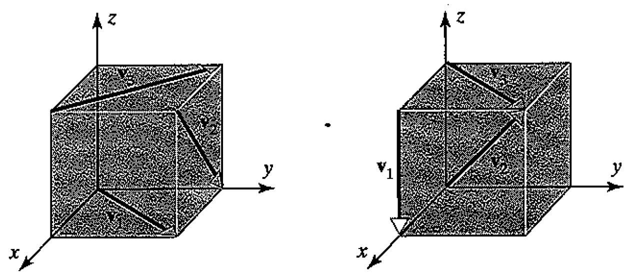
Esta função não é identicamente zero (mais que isto, esta função nunca se anula) no intervalo $(-\infty, \infty)$, de modo que $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ formam um conjunto linearmente independente de vetores. ♦

OBSERVAÇÃO. A recíproca do Teorema 5.3.4 é falsa. Se o wronskiano de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então nada pode ser deduzido sobre a independência linear de $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$; este conjunto de vetores pode ser linearmente independente ou linearmente dependente. (Omitimos os detalhes.)

Conjunto de Exercícios 5.3

1. Explique por que os conjuntos de vetores dados são linearmente dependentes. (Resolva este problema somente inspecionando os conjuntos.)
   (a) $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$ e $\mathbf{u}_2 = (5, -10, -20)$ em R^3 (b) $\mathbf{u}_1 = (3, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (-4, 7)$ em R^2
   (c) $\mathbf{p}_1 = 3 - 2x + x^2$ e $\mathbf{p}_2 = 6 - 4x + 2x^2$ em P_2 (d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ em M_{22}
2. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em R^3 são linearmente dependentes?
   (a) $(4, -1, 2)$, $(-4, 10, 2)$ (b) $(-3, 0, 4)$, $(5, -1, 2)$, $(1, 1, 3)$
   (c) $(8, -1, 3)$, $(4, 0, 1)$ (d) $(-2, 0, 1)$, $(3, 2, 5)$, $(6, -1, 1)$, $(7, 0, -2)$
3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em R^4 são linearmente dependentes?
   (a) $(3, 8, 7, -3)$, $(1, 5, 3, -1)$, $(2, -1, 2, 6)$, $(1, 4, 0, 3)$
   (b) $(0, 0, 2, 2)$, $(3, 3, 0, 0)$, $(1, 1, 0, -1)$
   (c) $(0, 3, -3, -6)$, $(-2, 0, 0, -6)$, $(0, -4, -2, -2)$, $(0, -8, 4, -4)$
   (d) $(3, 0, -3, 6)$, $(0, 2, 3, 1)$, $(0, -2, -2, 0)$, $(-2, 1, 2, 1)$
4. Quais dos seguintes conjuntos de vetores em P_2 são linearmente dependentes?
   (a) $2 - x + 4x^2$, $3 + 6x + 2x^2$, $2 + 10x - 4x^2$ (b) $3 + x + x^2$, $2 - x + 5x^2$, $4 - 3x^2$
   (c) $6 - x^2$, $1 + x + 4x^2$ (d) $1 + 3x + 3x^2$, $x + 4x^2$, $5 + 6x + 3x^2$, $7 + 2x - x^2$
5. Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores em R^3 com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num plano.
   (a) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$ (b) $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$
6. Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores em R^3 com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão numa mesma reta.
   (a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 6, 0)$ (b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$
   (c) $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$
7. (a) Mostre que os vetores $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em R^3.
   (b) Expresse cada vetor como uma combinação linear dos outros dois.
8. Para quais valores reais de λ os vetores
   $$\mathbf{v}_1 = \left(\lambda, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \lambda, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \lambda\right)$$
   formam um conjunto linearmente dependente em R^3?
9. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, então também o são $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_3\}$.
10. Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, então também o é qualquer subconjunto não vazio de S.
11. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial V e se $\mathbf{v}_4$ é um vetor qualquer em V, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ também é linearmente dependente.
12. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores em um espaço vetorial V e se $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ são quaisquer vetores em V, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente dependente.
13. Mostre que qualquer conjunto com mais do que três vetores de P_2 é linearmente dependente.
14. Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto linearmente independente e $\mathbf{v}_3$ não pertence a ger $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.
15. Prove: Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, os vetores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ formam um conjunto linearmente dependente.
16. Prove: O espaço gerado por dois vetores em R^3 é ou uma reta pela origem, ou um plano pela origem, ou a própria origem.
17. Sob quais condições é um conjunto de um único vetor linearmente independente?

18. Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ da parte (*a*) da figura dada são linearmente independentes? E os da parte (*b*)? Explique.



(*a*) (*b*)

Figura Ex-18

19. Utilize identidades apropriadas, onde necessário, para determinar quais dos seguintes conjuntos de vetores em $F(-\infty, \infty)$ são linearmente dependentes.
   (a) $6,\ 3\,\mathrm{sen}^2 x,\ 2\cos^2 x$ (b) $x,\ \cos x$ (c) $1,\ \mathrm{sen}\,x,\ \mathrm{sen}\,2x$
   (d) $\cos 2x,\ \mathrm{sen}^2 x,\ \cos^2 x$ (e) $(3-x)^2,\ x^2-6x,\ 5$ (f) $0,\ \cos^3 \pi x,\ \mathrm{sen}^5 3\pi x$
20. ***(Para leitores que estudaram Cálculo.)*** Use o wronskiano para mostrar que os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.
   (a) $1,\ x,\ e^x$ (b) $\mathrm{sen}\,x,\ \cos x,\ x\,\mathrm{sen}\,x$ (c) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$ (d) $1,\ x,\ x^2$
21. Use a parte (*a*) do Teorema 5.3.1 para provar a parte (*b*).
22. Prove a parte (*b*) do Teorema 5.3.2.

Discussão e Descoberta

23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   (a) O conjunto das matrizes 2×2 que contêm exatamente dois 1 e dois 0 é um conjunto linearmente independente em M_{22}.
   (b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto linearmente dependente, então cada vetor é um múltiplo escalar do outro.
   (c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente independente, então também o é o conjunto $\{k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$, para cada escalar não-nulo k.
   (d) A recíproca do Teorema 5.3.2*a* também vale.
24. Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores não-nulos, então cada vetor no conjunto pode ser obtido como uma combinação linear dos outros dois.
25. O Teorema 5.3.3 implica que quatro vetores não-nulos em R^3 devem ser linearmente dependentes. Dê um argumento geométrico informal para explicar este resultado.
26. (a) No Exemplo 3 nós mostramos que os vetores mutuamente ortogonais **i**, **j** e **k** formam um conjunto linearmente independente de vetores em R^3. Você acredita que qualquer conjunto de três vetores não nulos e mutuamente ortogonais em R^3 é linearmente independente? Justifique sua conclusão com um argumento geométrico.
   (b) Justifique sua conclusão com um argumento algébrico. [***Sugestão.*** Use produtos escalares.]

5.4 BASES E DIMENSÃO

Em geral nós pensamos numa reta como sendo unidimensional, num plano como sendo bidimensional e no espaço à nossa volta como sendo tridimensional. O principal objetivo desta seção é tornar mais precisa esta noção intuitiva de "dimensão."

Sistemas de Coordenadas Não-retangulares

Na Geometria Analítica plana nós aprendemos a associar um ponto P no plano a um par de coordenadas (a, b) projetando P sobre um par de eixos coordenados perpendiculares (Figura 5.4.1*a*). Com este processo, é associado um único conjunto de coordenadas a cada ponto do plano e, reciprocamente, a cada par de coordenadas está associado um único ponto no plano. Nós descrevemos isto dizendo que o sistema de coordenadas estabelece uma ***correspondência biunívoca*** entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Embora os eixos coordenados perpendiculares sejam os mais comuns, podemos usar quaisquer duas retas não-paralelas para definir um sistema de coordenadas no plano. Por exemplo, na Figura 5.4.1*b* nós associamos um par de coordenadas (a, b) ao ponto P projetando-o paralelamente aos eixos coordenados não-paralelos. Analogamente, no espaço tridimensional, podemos definir um sistema de coordenadas utilizando quaisquer três retas não-coplanares.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários. Para começar, será útil reformular a noção de sistema de coordenadas nos espaços bi e tridimensionais usando vetores em vez de eixos coordenados para especificar o sistema de coordenadas. Isto pode ser feito substituindo cada eixo coordenado por um vetor de comprimento 1 que aponta na direção e no sentido positivo do eixo. Na Figura 5.4.2*a*, por exemplo, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são tais vetores. Como ilustramos na figura, se P é um ponto qualquer no plano,