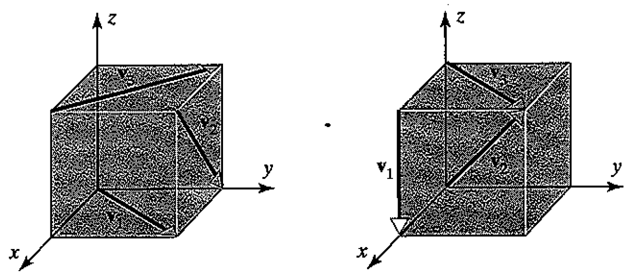
18. Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ da parte (*a*) da figura dada são linearmente independentes? E os da parte (*b*)? Explique.



(*a*) (*b*)

Figura Ex-18

19. Utilize identidades apropriadas, onde necessário, para determinar quais dos seguintes conjuntos de vetores em $F(-\infty, \infty)$ são linearmente dependentes.
   (a) $6,\ 3\,\text{sen}^2 x,\ 2\cos^2 x$ (b) $x,\ \cos x$ (c) $1,\ \text{sen}\,x,\ \text{sen}\,2x$
   (d) $\cos 2x,\ \text{sen}^2 x,\ \cos^2 x$ (e) $(3-x)^2,\ x^2-6x,\ 5$ (f) $0,\ \cos^3 \pi x,\ \text{sen}^5 3\pi x$
20. (***Para leitores que estudaram Cálculo.***) Use o wronskiano para mostrar que os seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.
   (a) $1,\ x,\ e^x$ (b) $\text{sen}\,x,\ \cos x,\ x\,\text{sen}\,x$ (c) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$ (d) $1,\ x,\ x^2$
21. Use a parte (*a*) do Teorema 5.3.1 para provar a parte (*b*).
22. Prove a parte (*b*) do Teorema 5.3.2.

Discussão e Descoberta

23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   (a) O conjunto das matrizes 2×2 que contêm exatamente dois 1 e dois 0 é um conjunto linearmente independente em M_{22}.
   (b) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto linearmente dependente, então cada vetor é um múltiplo escalar do outro.
   (c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente independente, então também o é o conjunto $\{k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$, para cada escalar não-nulo k.
   (d) A recíproca do Teorema 5.3.2*a* também vale.
24. Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores não-nulos, então cada vetor no conjunto pode ser obtido como uma combinação linear dos outros dois.
25. O Teorema 5.3.3 implica que quatro vetores não-nulos em R^3 devem ser linearmente dependentes. Dê um argumento geométrico informal para explicar este resultado.
26. (a) No Exemplo 3 nós mostramos que os vetores mutuamente ortogonais **i**, **j** e **k** formam um conjunto linearmente independente de vetores em R^3. Você acredita que qualquer conjunto de três vetores não nulos e mutuamente ortogonais em R^3 é linearmente independente? Justifique sua conclusão com um argumento geométrico.
   (b) Justifique sua conclusão com um argumento algébrico. [***Sugestão.*** Use produtos escalares.]

5.4 BASES E DIMENSÃO

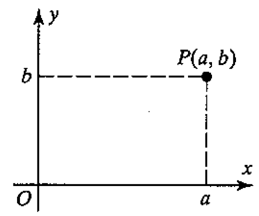
Em geral nós pensamos numa reta como sendo unidimensional, num plano como sendo bidimensional e no espaço à nossa volta como sendo tridimensional. O principal objetivo desta seção é tornar mais precisa esta noção intuitiva de "dimensão."

Sistemas de Coordenadas Não-retangulares

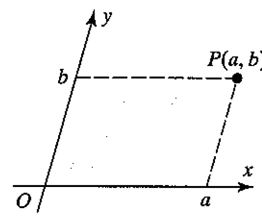
Na Geometria Analítica plana nós aprendemos a associar um ponto P no plano a um par de coordenadas (a, b) projetando P sobre um par de eixos coordenados perpendiculares (Figura 5.4.1*a*). Com este processo, é associado um único conjunto de coordenadas a cada ponto do plano e, reciprocamente, a cada par de coordenadas está associado um único ponto no plano. Nós descrevemos isto dizendo que o sistema de coordenadas estabelece uma ***correspondência biunívoca*** entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Embora os eixos coordenados perpendiculares sejam os mais comuns, podemos usar quaisquer duas retas não-paralelas para definir um sistema de coordenadas no plano. Por exemplo, na Figura 5.4.1*b* nós associamos um par de coordenadas (a, b) ao ponto P projetando-o paralelamente aos eixos coordenados não-paralelos. Analogamente, no espaço tridimensional, podemos definir um sistema de coordenadas utilizando quaisquer três retas não-coplanares.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários. Para começar, será útil reformular a noção de sistema de coordenadas nos espaços bi e tridimensionais usando vetores em vez de eixos coordenados para especificar o sistema de coordenadas. Isto pode ser feito substituindo cada eixo coordenado por um vetor de comprimento 1 que aponta na direção e no sentido positivo do eixo. Na Figura 5.4.2*a*, por exemplo, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são tais vetores. Como ilustramos na figura, se P é um ponto qualquer no plano, podemos projetar P paralelamente a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ para ter $\overrightarrow{OP}$ como a diagonal do paralelogramo determinado por $a\mathbf{v}_1$ e $b\mathbf{v}_2$ e portanto escrever o vetor $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

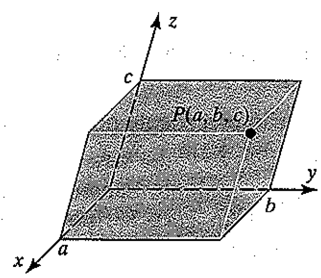
$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$



(*a*) As coordenadas de P num sistema de coordenadas retangulares no espaço bidimensional



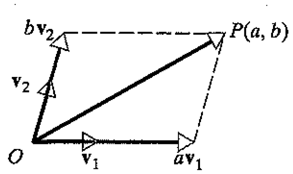
(*b*) As coordenadas de P num sistema de coordenadas não-retangulares no espaço bidimensional



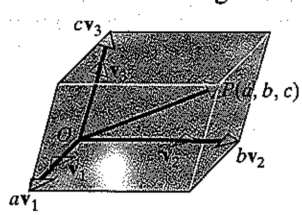
(*c*) As coordenadas de P num sistema de coordenadas não-retangulares no espaço tridimensional

Figura 5.4.1

É evidente que os números a e b desta fórmula vetorial são precisamente as coordenadas de P no sistema de coordenadas da Figura 5.4.1*b*. Analogamente, as coordenadas (a, b, c) do ponto P da Figura 5.4.1*c* podem ser obtidas escrevendo $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores indicados na Figura 5.4.2*b*.



(*a*)

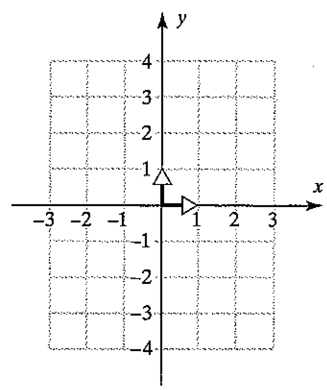


(*b*)

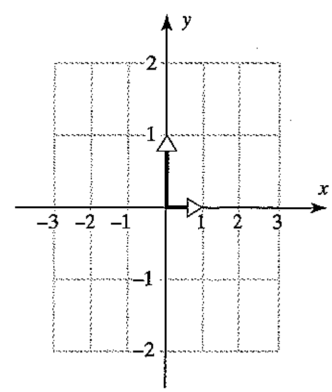
Figura 5.4.2

Enunciado informalmente, dizemos que os vetores que especificam um sistema de coordenadas são os "vetores de base" do sistema. Mesmo tendo usado vetores de base de comprimento 1 acima, veremos daqui a pouco que isto não é essencial—vetores não-nulos de qualquer comprimento são suficientes.

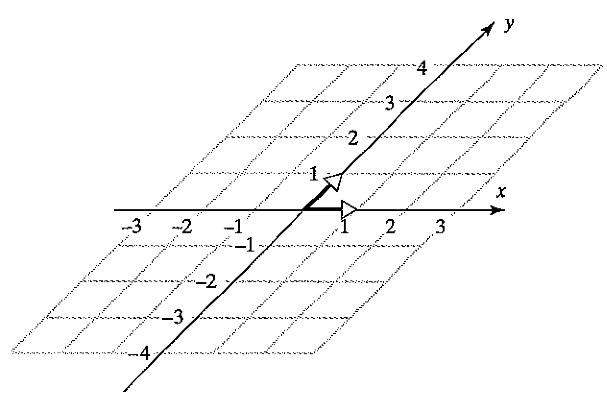
Um ingrediente essencial de qualquer sistema de coordenadas é a escala da medida de comprimento ao longo dos eixos coordenados. Em geral, tenta-se utilizar a mesma escala em cada eixo e espaçamos os pontos inteiros por uma unidade de distância. No entanto, isto nem sempre é prático ou adequado: Escalas diferentes, ou escalas em que os pontos inteiros estão a mais ou a menos do que uma unidade de distância, podem ser necessárias para encaixar um gráfico numa página impressa ou para representar quantidades físicas com unidades diferentes num mesmo sistema de coordenadas (por exemplo, tempo em segundos em um dos eixos e temperatura em centenas de graus no outro). Quando um sistema de coordenadas é especificado por um conjunto de vetores de base, então os comprimentos destes vetores correspondem às distâncias entre pontos inteiros sucessivos nos eixos coordenados (Figura 5.4.3). Assim, é o sentido dos vetores de base que define o sentido positivo nos eixos coordenados e o comprimento dos vetores de base é que estabelece a escala de medida.



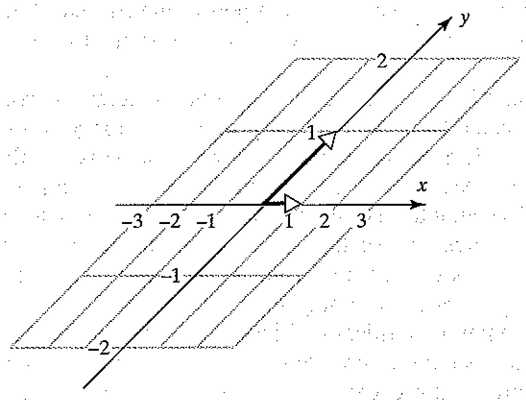
(*a*) Escalas idênticas. Eixos perpendiculares.



(*b*) Escalas diferentes. Eixos perpendiculares.



(*c*) Escalas idênticas. Eixos oblíquos.



(*d*) Escalas diferentes. Eixos oblíquos.

Figura 5.4.3

A seguinte definição-chave vai tornar estas idéias mais precisas e permitir estender o conceito de sistema de coordenadas a espaços vetoriais arbitrários.

Definição

Se V é um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as seguintes condições:

(a) S é linearmente independente.
(b) S gera V.

A base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários do sistema de coordenadas em espaços bi e tridimensionais. O teorema a seguir ajuda a elucidar esta afirmação.

Teorema 5.4.1 **Unicidade da Representação em Base**

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso da forma $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ de uma única maneira.

Prova. Como S gera V, segue da definição de conjunto gerador que cada vetor de V pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em S. Para ver por que só existe *uma* maneira de expressar um vetor como uma combinação linear dos vetores em S, suponha que um certo vetor possa ser escrito como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

e também como

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\mathbf{0} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

Como o lado direito desta equação é uma combinação linear dos vetores em S, a independência linear de S implica

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \ldots, \quad c_n - k_n = 0$$

ou seja,

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \ldots, \quad c_n = k_n$$

Assim, as duas expressões para $\mathbf{v}$ são a mesma. ∎

Coordenadas em Relação a uma Base Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V e se

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

é a expressão de um vetor $\mathbf{v}$ em termos desta base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são chamados as ***coordenadas*** de $\mathbf{v}$ em relação à base S. O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em R^n construído destas coordenadas é chamado ***vetor de coordenadas de* v *em relação a S*** e é denotado por

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

OBSERVAÇÃO. Deve ser notado que os vetores de coordenadas dependem não só da base S mas também da ordem na qual escrevemos os vetores da base; uma mudança na ordem dos vetores da base resulta numa mudança correspondente da ordem das entradas nos vetores de coordenadas.

EXEMPLO 1 A Base Canônica de R^3

No Exemplo 3 da seção precedente nós mostramos que se

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

então $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é um conjunto linearmente independente em R^3. Este conjunto também gera R^3, pois qualquer vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ em R^3 pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad (1)$$

Assim, S é uma base de R^3, denominada ***base canônica*** de R^3. Olhando para os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ em (1), segue que as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base canônica são a, b e c, de modo que

$$(\mathbf{v})_S = (a, b, c)$$

Comparando este resultado com (1), vemos que

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$$

Esta equação diz que os componentes de um vetor $\mathbf{v}$ em relação a um sistema de coordenadas retangulares xyz coincidem com as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base canônica; assim, tanto o sistema de coordenadas quanto a base produzem exatamente a mesma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço tridimensional e os ternos ordenados de números reais (Figura 5.4.4). ♦

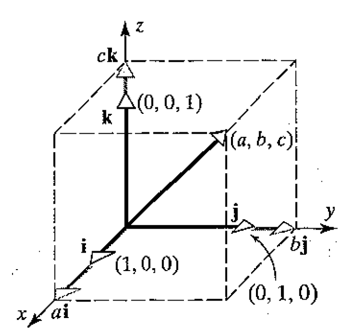


Figura 5.4.4

Os resultados do exemplo acima constituem um caso particular dos resultados do próximo exemplo.

EXEMPLO 2 A Base Canônica de R^n

No Exemplo 3 da seção precedente nós mostramos que se

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

então

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

é um conjunto linearmente independente em R^n. Além disto, este conjunto também gera R^n, pois qualquer vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \tag{2}$$

Assim, S é uma base de R^n, denominada ***base canônica*** de R^n. Segue de (2) que as coordenadas de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em relação à base canônica são $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de modo que

$$(\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Como no Exemplo 1, nós temos $\mathbf{v} = (\mathbf{v})_S$, de modo que são iguais um vetor $\mathbf{v}$ e seu vetor de coordenadas em relação à base canônica de R^n. ♦

OBSERVAÇÃO. Nós veremos num exemplo posterior que um vetor não é igual ao seu vetor de coordenadas; a igualdade que observamos nos dois exemplos acima é uma situação especial que ocorre somente com a base canônica de R^n.

OBSERVAÇÃO. Em R^2 e R^3, os vetores da base canônica costumam ser denotados por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ em vez de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Nós utilizaremos ambas notações, dependendo da situação.

EXEMPLO 3 Demonstrando que um Conjunto de Vetores é uma Base

Sejam $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$. Mostre que o conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de R^3.

Solução.

Para mostrar que o conjunto S gera R^3, nós devemos mostrar que um vetor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ qualquer pode ser expresso como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

dos vetores em S. Expressando esta equação em termos de componentes, temos

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)$$

ou, igualando componentes correspondentes,

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Assim, para mostrar que S gera R^3, nós devemos mostrar que o sistema (3) tem solução para qualquer escolha de $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Para mostrar que S é linearmente independente, nós devemos mostrar que a única solução de

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{4}$$

é $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Como acima, se (4) é expresso em termos de componentes, a verificação da independência reduz-se a mostrar que o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

tem somente a solução trivial. Observe que os sistemas (3) e (5) têm a mesma matriz de coordenadas. Assim, pelas partes (*b*), (*e*) e (*g*) do Teorema 4.3.4, nós podemos provar simultaneamente que S é linearmente independente e que gera R^3 demonstrando que a matriz de coeficientes dos sistemas (3) e (5) tem determinante não-zero. Escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{nós obtemos} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

e portanto S é uma base de R^3. ♦

EXEMPLO 4 Representando um Vetor Usando Duas Bases

Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base de R^3 do exemplo precedente.

(a) Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ em relação a S.

(b) Encontre o vetor $\mathbf{v}$ em R^3 cujo vetor de coordenadas em relação à base S é $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

Solwção (a). Nós devemos encontrar escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ (verifique). Portanto

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Solução (b). Usando a definição de vetor de coordenadas $(\mathbf{v})_S$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$ ♦

EXEMPLO 5 A Base Canônica de P_n

(a) Mostre que $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base para o espaço vetorial P_n dos polinômios da forma $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

(b) Encontre o vetor de coordenadas do polinômio $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ em relação à base $S = \{1, x, x^2\}$ de P_2.

Solução (a). No Exemplo 11 da Seção 5.2 nós mostramos que S gera P_n e no Exemplo 5 da Seção 5.3 nós mostramos que S é um conjunto linearmente independente. Assim, S é uma base de P_n; esta base é chamada a ***base canônica*** de P_n.

Solução (*b*). As coordenadas de $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ são os coeficientes escalares dos vetores 1, x e x^2 da base, de modo que $(\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2)$. ♦

EXEMPLO 6 A Base Canônica de M_{mn}

Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O conjunto $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ é uma base do espaço vetorial M_{22} das matrizes 2×2. Para ver que S gera M_{22}, observe que um vetor (uma matriz)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

arbitrário pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

Para ver que S é linearmente independente, suponha que

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

ou seja,

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $a = b = c = d = 0$ e portanto S é linearmente independente. A base S deste exemplo é chamada a *base canônica* de M_{22}. Mais geralmente, a ***base canônica*** de M_{mn} consiste das mn matrizes distintas com uma única entrada 1 e todas as demais entradas iguais a zero. ♦

EXEMPLO 7 Uma Base para o Subespaço ger [*S*]

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto *linearmente independente* em um espaço vetorial V, então S é uma base do subespaço gerado ger (S) pois o conjunto S gera ger (S) por definição de ger (S). ♦

Definição

Um espaço vetorial não-nulo V é chamado ***de dimensão finita*** se contém um conjunto finito $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores que constitui uma base de V. Se não existir um tal conjunto, dizemos que V é ***de dimensão infinita***. Além disto, consideramos o espaço vetorial nulo como sendo de dimensão finita.

EXEMPLO 8 Alguns Espaços de Dimensão Finita e Infinita

Pelos Exemplos 2, 5 e 6, os espaços vetoriais R^n, P_n e M_{mn} são de dimensão finita. Os espaços $F(-\infty, \infty)$, $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, \infty)$ são de dimensão infinita (Exercício 23). ♦

Nosso próximo teorema dá a chave para o conceito de dimensão.

Teorema 5.4.2

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base qualquer de V.

(*a*) *Um conjunto com mais do que n vetores é linearmente dependente.*

(*b*) *Um conjunto com menos do que n vetores não gera V.*

Prova **(*a*).** Seja $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores em V, onde $m > n$. Nós queremos mostrar que S' é linearmente dependente. Como $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base, cada $\mathbf{w}_i$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores em S, digamos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{6}$$

Para mostrar que S' é linearmente dependente, nós devemos encontrar escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, não todos zero, tais que

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{7}$$

Usando as equações de (6), podemos reescrever (7) como

$$\begin{aligned} &(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 \\ &\quad + (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2m})\mathbf{v}_2 \\ &\quad\quad \ddots \\ &\quad\quad + (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Assim, pela independência linear de S, o problema de provar que S' é um conjunto linearmente independente reduz-se a mostrar que existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, não todos zero, que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m &= 0 \\ \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

No entanto, (8) tem mais incógnitas do que equações, de modo que a prova está completa, pois o Teorema 1.2.1 garante a existência de soluções não-triviais.

Prova **(*b*).** Seja $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores em V, onde $m < n$. Nós queremos mostrar que S' não gera V. A prova será por contradição: Nós vamos mostrar que supondo que S' gera V leva a uma contradição da independência linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Se S' gera V, então cada vetor em V é uma combinação linear dos vetores em S'. Em particular, cada vetor $\mathbf{v}_i$ da base é uma combinação linear dos vetores em S', digamos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ \mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{aligned} \tag{9}$$

Para obter nossa contradição, nós mostraremos que existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$, não todos zero, tais que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{10}$$

No entanto, observe que (9) e (10) têm a mesma forma que (6) e (7) exceto pela permutação de m com n e dos vetores $\mathbf{w}$ com os vetores $\mathbf{v}$. Assim, a conta que nos levou a (8) agora fornece

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tem mais incógnitas do que equações, de modo que possui soluções não-triviais pelo Teorema 1.2.1. ■

Segue do teorema acima que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base qualquer de um espaço vetorial V, então todos os conjuntos em V que simultaneamente geram V e são linearmente independentes devem ter precisamente n vetores. Assim, todas as bases de V devem ter o mesmo número de vetores do que a base arbitrária S. Isto prova o próximo resultado, que é um dos mais importantes resultados em Álgebra Linear.

Teorema 5.4.3

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Para ver como este teorema é relacionado com o conceito de "dimensão," recorde que a base canônica de R^n tem n vetores (Exemplo 2). Assim, o Teorema 5.4.3 implica que todas as bases de R^n têm n vetores. Em particular, todas as bases de R^3 têm 3 vetores, todas as bases de R^2 têm 2 vetores e todas as bases de R^1 ($= R$) têm um vetor. Intuitivamente, R^3 é tridimensional, R^2 (um plano) é bidimensional e R (uma reta) é unidimensional. Assim, o número de vetores numa base é o mesmo que a dimensão, para os espaços familiares. Isto sugere a seguinte definição.

Definição

A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita V é definida como o número de vetores de uma base de V e denotada por $\dim(V)$. Além disto, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

OBSERVAÇÃO. Daqui em diante nós seguimos uma convenção comum de considerar o conjunto vazio como sendo a base do espaço vetorial nulo. Isto é consistente com a definição dada, pois o conjunto vazio não tem vetores e o espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

EXEMPLO 9 Dimensão de alguns Espaços Vetoriais

$\dim(R^n) = n$	[A base canônica tem n vetores (Exemplo 2).]
$\dim(P_n) = n + 1$	[A base canônica tem $n + 1$ vetores (Exemplo 5).]
$\dim(M_{mn}) = mn$	[A base canônica tem $m\,n$ vetores (Exemplo 6).] ♦

EXEMPLO 10 Dimensão de um Espaço-Solução

Determine uma base e a dimensão do espaço-solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-3x_4} + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solução.

No Exemplo 7 da Seção 1.2 foi mostrado que a solução geral deste sistema é

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

Portanto, podemos escrever os vetores-solução como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

geram o espaço-solução. Como também são linearmente independentes (verifique), resulta que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base e o espaço-solução é bidimensional. ♦

Alguns Teoremas Fundamentais Nós dedicaremos o restante desta seção a uma série de teoremas que revelam a sutil inter-relação entre os conceitos de gerador, independência linear, base e dimensão. Estes teoremas não são um exercício fútil de matemática teórica—eles são essenciais ao entendimento de espaços vetoriais e neles são baseadas muitas das aplicações práticas da Álgebra Linear.

O próximo teorema, que nós chamamos de *Teorema de Mais-Menos* (nossa própria nomenclatura), estabelece dois princípios básicos dos quais dependem a maioria dos teoremas a seguir.

Teorema 5.4.4 **Teorema de Mais-Menos**

Seja S um conjunto não-vazio de vetores em um espaço vetorial V.

(*a*) *Se S é um conjunto linearmente independente e se* **v** *é um vetor em V que está fora do* ger (S), *então o conjunto* $S \cup \{\mathbf{v}\}$ *que resulta acrescentando* **v** *a S é ainda linearmente independente.*

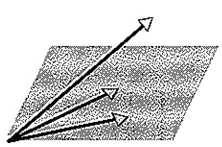
(*b*) *Se* **v** *é um vetor em S que pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores de S e se* $S - \{\mathbf{v}\}$ *denota o conjunto obtido removendo* **v** *de S, então S e* $S - \{\mathbf{v}\}$ *geram o mesmo espaço, ou seja,*

$$\text{ger}(S) = \text{ger}(S - \{\mathbf{v}\})$$

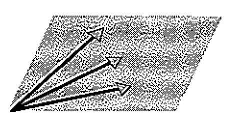
Nós iremos adiar a prova para o final da seção, para poder passar de imediato às conseqüências do teorema. No entanto, podemos visualizar o teorema em R^3 como segue:

(*a*) Um conjunto S de dois vetores linearmente independentes em R^3 gera um plano pela origem. Se nós aumentarmos S acrescentando um vetor **v** qualquer de fora deste plano (Figura 5.4.5*a*), então o conjunto resultante de três vetores é ainda linearmente independente pois nenhum dos três vetores é coplanar com os outros dois.

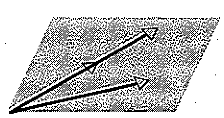
(*b*) Se S é um conjunto de três vetores não-colineares em R^3 que estão num mesmo plano comum pela origem (Figura 5.4.5*b*, *c*), então os três vetores geram o plano. No entanto, se nós removermos de S qualquer vetor **v** que é uma combinação linear dos outros dois, os dois vetores que permanecem continuam gerando o plano.



(*a*) Nenhum dos três vetores está no mesmo plano que os outros dois.



(*b*) Qualquer um dos vetores pode ser removido e os dois restantes continuam gerando o plano.



(*c*) Qualquer um dos dois vetores colineares pode ser removido e os dois restantes continuam gerando o plano.

Figura 5.4.5

Em geral, para mostrar que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, nós devemos mostrar que os vetores são linearmente independentes e que geram V. No entanto, se soubermos que V tem dimensão n (de modo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tem o número correto de vetores de uma base), então basta verificar *ou* que são linearmente independentes *ou* que geram—a outra condição é automaticamente satisfeita. Este é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 5.4.5

Se V é um espaço vetorial n–dimensional e se S é um conjunto em V com exatamente n vetores, então S é uma base de V se S ou gera V ou é linearmente independente.

Prova. Suponha que S tem exatamente n vetores e que gera V. Para provar que S é uma base nós devemos mostrar que S é um conjunto linearmente independente. Se isto não for o caso, então algum vetor **v** de S é uma combinação linear dos demais vetores de S. Removendo este vetor de S, segue pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4*b*) que o conjunto resultante de $n - 1$ vetores ainda gera V. Mas isto é impossível, pois do Teorema 5.4.2*b* segue que nenhum conjunto com menos do que n vetores pode gerar um espaço vetorial n–dimensional. Assim, S é linearmente independente.

Suponha que S tem n vetores e que é um conjunto linearmente independente. Para provar que S é uma base nós devemos mostrar que S gera V. Se isto não for o caso, então algum vetor **v** de V não está no ger (S). Acrescentando este vetor a S, segue pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4*a*) que o conjunto resultante de $n + 1$ vetores ainda é linearmente independente. Mas isto é impossível, pois do Teorema 5.4.2*a* segue que nenhum conjunto com mais do que n vetores em um espaço vetorial n–dimensional pode ser linearmente independente. Assim, S gera V. ■

EXEMPLO 11 Verificando uma Base

(a) Mostre por inspeção que $\mathbf{v}_1 = (-3, 7)$ e $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ formam uma base de R^2.

(b) Mostre por inspeção que $\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 7)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 4)$ formam uma base de R^3.

Solução (*a*). Como nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro, os dois vetores formam um conjunto linearmente independente no espaço bidimensional R^2 e portanto constituem uma base, pelo Teorema 5.4.5.

Solução (*b*). Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formam um conjunto linearmente independente no plano xz (por que?). O vetor $\mathbf{v}_3$ está fora do plano xz e portanto o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ também é linearmente independente. Como R^3 é tridimensional, o Teorema 5.4.5 implica que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de R^3. ♦

O próximo teorema mostra que em espaços vetoriais V de dimensão finita, cada conjunto gerador contém nele uma base de V e qualquer conjunto linearmente independente é parte de alguma base de V.

Teorema 5.4.6

Seja S um conjunto finito de vetores em um espaço vetorial V de dimensão finita.

(*a*) *Se S gera V mas não é uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.*

(*b*) *Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S pode ser ampliado para uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.*

***Prova** (a).* Se S é um conjunto de vetores que gera V mas não é uma base de V, então S é um conjunto linearmente dependente. Assim, algum vetor $\mathbf{v}$ de S pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores de S. Pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4*b*) nós podemos remover $\mathbf{v}$ de S e o conjunto resultante S' ainda gera V. Se S' é linearmente independente, então S' é uma base de V e podemos parar. Se S' é linearmente dependente, então podemos remover algum vetor apropriado de S' para obter um conjunto S'' que ainda gera V. Nós podemos continuar removendo vetores desta maneira até chegar num conjunto de vetores em S que é linearmente independente e que gera V. Este subconjunto de S é uma base de V.

***Prova** (b).* Suponha que $\dim(V) = n$. Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S não gera V e portanto existe algum vetor $\mathbf{v}$ em V que não está no ger (S). Pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4*a*) nós podemos acrescentar $\mathbf{v}$ a S e o conjunto resultante S' ainda é linearmente independente. Se S' gera V, então S' é uma base de V e podemos parar. Se S' não gera V, então podemos acrescentar algum vetor apropriado a S' para obter um conjunto S'' que ainda é linearmente independente. Nós podemos continuar acrescentando vetores desta maneira até chegar num conjunto de n vetores linearmente independentes em V. Este conjunto será uma base de V pelo Teorema 5.4.5. ■

Na próxima seção nós daremos exemplos numéricos para ilustrar este teorema.

Pode ser provado (Exercício 29) que qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita é de dimensão finita. Nós concluímos esta seção com um teorema que mostra que a dimensão de um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita V não pode exceder a dimensão do próprio espaço V e que a única maneira de um subespaço ter a mesma dimensão que o próprio espaço V é sendo igual ao espaço todo. A Figura 5.4.6 ilustra esta idéia em R^3. Nesta figura, observe que os subespaços sucessivamente maiores aumentam de dimensão.

Figura 5.4.6

Teorema 5.4.7

Se W é um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $\dim(W) \leq \dim(V)$; *além disto, se* $\dim(W) = \dim(V)$, *então* $W = V$.

Prova. Como V é de dimensão finita, W também é de dimensão finita pelo Exercício 29. Suponha, então, que $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ é uma base de W. Ou S também é uma base de V ou não. Se for, então $\dim(W) = \dim(V) = m$. Se não for, então pelo Teorema 5.4.6*b* podemos acrescentar vetores ao conjunto linearmente independente S para torná-lo uma base de V e portanto $\dim(W) < \dim(V)$. Em qualquer caso, $\dim(W) \leq \dim(V)$. Se $\dim(W) = \dim(V)$, então S é um conjunto de m vetores linearmente independentes no espaço vetorial V de dimensão m; logo, S é uma base de V pelo Teorema 5.4.5. Isto implica que $W = V$ (por que?). ■

Provas Adicionais

Prova do Teorema 5.4.4a. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores em V e que $\mathbf{v}$ é um vetor em V que está fora do ger (S). Para mostrar que $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}\}$ é um conjunto linearmente independente, nós devemos mostrar que os únicos escalares que satisfazem a equação

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r + k_{r+1}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{11}$$

são $k_1 = k_2 = \cdots = k_{r+1} = 0$. Mas nós devemos ter $k_{r+1} = 0$ pois, caso contrário, nós poderíamos resolver (11) em $\mathbf{v}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, contradizendo a nossa hipótese que $\mathbf{v}$ está fora do ger (S). Assim, (11) simplifica para

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{12}$$

o que implica, pela independência linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, que

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

Prova do Teorema 5.4.4b. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto de vetores em V e, para sermos específicos, suponha que $\mathbf{v}_r$ é uma combinação de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$, digamos,

$$\mathbf{v}_r = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \tag{13}$$

Nós queremos mostrar que se $\mathbf{v}_r$ é removido de S, então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$ que resta ainda gera ger (S), ou seja, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{w}$ em ger (S) pode ser expresso como uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\}$. Mas se $\mathbf{w}$ é um vetor em ger (S) então $\mathbf{w}$ pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r\mathbf{v}_r$$

ou então, substituindo (13),

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} + k_r(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1})$$

que dá $\mathbf{w}$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}$. ■

Conjunto de Exercícios 5.4

1. Explique por que os seguintes conjuntos de vetores *não* são bases dos espaços vetoriais indicados. (Faça este exercício por inspeção.)

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 7)$ de R^2

(b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ de R^3

(c) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x - 1$ de P_2

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ de M_{22}

2. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de R^2?

(a) $(2, 1), (3, 0)$ (b) $(4, 1), (-7, -8)$ (c) $(0, 0), (1, 3)$ (d) $(3, 9), (-4, -12)$

3. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de R^3?

(a) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$ (b) $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$

(c) $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$ (d) $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$

4. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são bases de P_2?

(a) $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$ (b) $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$

(c) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$ (d) $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$

5. Mostre que o conjunto de vetores dados é uma base de M_{22}.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Seja V o espaço gerado por $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \operatorname{sen}^2 x$, $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(a) Mostre que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não é uma base de V.

(b) Encontre uma base de V.

7. Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$ (b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

8. Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

9. Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{p}$ em relação à base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

(a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

10. Encontre o vetor de coordenadas de A em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 11–16, determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema.

11. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

17. Determine bases dos seguintes subespaços de R^3.

(a) o plano $3x - 2y + 5z = 0$

(b) o plano $x - y = 0$

(c) a reta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$

(d) todos os vetores da forma (a, b, c) com $b = a + c$

18. Determine as dimensões dos seguintes subespaços de R^4.
(a) todos os vetores da forma $(a, b, c, 0)$
(b) todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $d = a + b$ e $c = a - b$
(c) todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $a = b = c = d$

19. Determine a dimensão do subespaço de P_3 consistindo de todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para os quais $a_0 = 0$.

20. Encontre um vetor da base canônica que pode ser acrescentado ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de R^3.
(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -2)$ (b) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$

21. Encontre vetores da base canônica que podem ser acrescentado ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de R^4.
$$\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3),\ \mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$$

22. Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ também é uma base, onde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

23. (a) Mostre que podemos encontrar $n + 1$ vetores linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$, para cada inteiro positivo n. [***Sugestão.*** Procure polinômios.]
(b) Use o resultado da parte (a) para provar que $F(-\infty, \infty)$ tem dimensão infinita.
(c) Prove que $C(-\infty, \infty)$, $C^m(-\infty, \infty)$ e $C^\infty(-\infty, \infty)$ são espaços vetoriais de dimensão infinita.

24. Seja S uma base de um espaço vetorial n–dimensional V. Mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em V, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ formam um conjunto linearmente independente em R^n e reciprocamente.

25. Usando a notação do Exercício 24, mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ geram V, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ geram R^n e reciprocamente.

26. Encontre uma base do subespaço de P_2 gerado pelos vetores dados.
(a) $-1 + x - 2x^2,\ 3 + 3x + 6x^2,\ 9$ (b) $1 + x,\ x^2,\ -2 + 2x$
(c) $1 + x - 3x^2,\ 2 + 2x - 6x^2,\ 3 + 3x - 9x^2$

[***Sugestão.*** Seja S a base canônica de P_2 e trabalhe com os vetores de coordenadas em relação a S; repare nos Exercícios 24 e 25.]

27. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares xy e um sistema de coordenadas $x'y'$ com eixos oblíquos. Supondo que em todos os eixos foram utilizadas escalas de uma unidade, encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas xy estão dadas.
(a) $(1, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) (a, b)

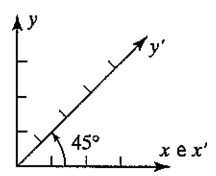


Figura Ex-27

28. A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares xy determinado pelos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ da base canônica e um sistema de coordenadas $x'y'$ determinado pelos vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ de uma outra base. Encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas xy estão dadas.
(a) $(\sqrt{3}, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) (a, b)

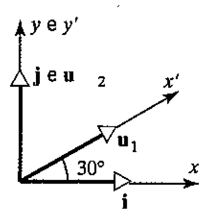


Figure Ex-28

29. Prove: Qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem dimensão finita.

Discussão e Descoberta

30. A base de M_{22} que fornecemos no Exemplo 6 é formada por matrizes não-invertíveis. Você acredita que exista uma base de M_{22} consistindo de matrizes invertíveis? Justifique sua resposta.

31. (a) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ diagonais tem dimensão ______
(b) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ simétricas tem dimensão ______
(c) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ triangulares superiores tem dimensão ______

32. (a) Para uma matriz A 3×3, explique em palavras por que o conjunto $I_3, A, A^2, \ldots, A^9$ precisa ser linearmente independente se as dez matrizes forem distintas.
(b) Enuncie um resultado correspondente para matrizes A $n \times n$.
33. Enuncie as duas partes do Teorema 5.4.2 na forma de contraposição lógica. [Veja o Exercício 34 da Seção 1.4.]
34. (a) A equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em n incógnitas. Faça uma conjectura sobre a dimensão do espaço-solução desta equação.
(b) Confirme sua conjectura encontrando uma base.
35. (a) Mostre que o conjunto W dos polinômios em P_2 tais que $p(1) = 0$ é um subespaço de P_2.
(b) Faça uma conjectura sobre a dimensão de W.
(c) Confirme sua conjectura encontrando uma base de W.

5.5 ESPAÇO-LINHA, ESPAÇO-COLUNA E ESPAÇO-NULO

Nesta seção nós estudaremos três espaços vetoriais importantes associados com matrizes. Nosso trabalho aqui nos fornecerá um entendimento mais profundo da relação entre as soluções de um sistema linear de equações e as propriedades da matriz de coeficientes.

Nós começamos com algumas definições.

Definição

Para uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

em R^n formados pelas linhas de A são chamados os ***vetores-linha*** de A e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em R^m formados pelas colunas de A são chamados os ***vetores-coluna*** de A.

EXEMPLO 1 Vetores-Linha e -Coluna de uma Matriz 2 × 3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Os vetores-linha de A são

$$\mathbf{r}_1 = [2 \quad 1 \quad 0] \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = [3 \quad -1 \quad 4]$$

e os vetores-coluna de A são

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ◆

A seguinte definição define três espaços vetoriais importantes associados com uma matriz.

Definição

Se A é uma matriz $m \times n$, então o subespaço de R^n gerado pelos vetores-linha de A é chamado ***espaço-linha*** de A e o subespaço de R^m gerado pelos vetores-coluna de A é chamado ***espaço-coluna*** de A. O espaço-solução do sistema homogêneo de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é um subespaço de R^n, é chamado o ***espaço-nulo*** de A.

Nesta seção e na próxima nós estaremos ocupados com as duas seguintes questões gerais:

- Quais relações existem entre as soluções de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o espaço-linha, o espaço-coluna e o espaço-nulo da matriz de coeficientes A?
- Quais relações existem entre o espaço-linha, o espaço-coluna e o espaço-nulo de uma matriz A?

Para investigar a primeira destas questões, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Segue da Fórmula (10) da Seção 1.3 que se $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ denotam os vetores-coluna de A, então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear destes vetores-coluna com coeficientes de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{1}$$

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{2}$$