13
APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA VECTORIAL À GEOMETRIA ANALÍTICA

13.1. Introdução

Neste capitulo trataremos das aplicações da álgebra vectorial ao estudo das retas, planos e seções cónicas. No capitulo 14 a álgebra vectorial combina-se com os métodos do cálculo e apresentam-se outras aplicações ao estudo das curvas e a certos problemas de mecânica.

O estudo da geometria como um sistema dedutivo, como foi concebido por Euclides cerca de 300 anos a. C., começa com um conjunto de axiomas ou postulados que definem as propriedades dos pontos e das retas. Os conceitos de "ponto" e "reta" tomam-se como noções primitivas e permanecem indefinidos. Outros conceitos são apresentados em termos de pontos e retas, deduzindo-se sistematicamente os teoremas a partir dos axiomas. Euclides estabeleceu dez axiomas a partir dos quais deduziu todos os seus teoremas. Demonstrou-se, porém, posteriormente que estes axiomas não são adequados para a teoria. Por exemplo, na demonstração do seu primeiro teorema Euclides faz uma hipótese tácita relativa à intersecção de duas circunferências que não está coberta pelos respetivos axiomas. Desde então foram formuladas outras séries de axiomas dos quais resultam todos os teoremas de Euclides. A mais famosa foi a série de axiomas estabelecida pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) no seu agora clássico *Grundlagen der Geometrie,* publicado em 1899. (Existe uma tradução inglesa: *The Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Co., (1947). Esta obra, da qual se fizeram sete edições alemãs ainda em vida de Hilbert, diz-se que inaugurou a matemática abstrata do século vinte.

Hilbert parte, para o seu tratamento da geometria plana, com cinco conceitos não definidos: *ponto, reta, sôbre* (uma relação válida entre um ponto e uma reta), *entre* (uma relação entre um ponto e um par de pontos) e *congruência* (uma relação entre pares de pontos). Hilbert apresenta então quinze axiomas, a partir dos quais desenvolve toda a geometria plana euclidiana. A sua análise de geometria no espaço baseia-se em vinte e um axiomas, contendo seis conceitos não definidos.

A introdução da geometria analítica é feita de modo algo diferente. Definimos conceitos tais como ponto, recta, em (sobre), entre, etc., mas fazêmo-lo em termos de números reais, os quais não se definem. A estrutura matemática resultante chama-se um *modelo analítico* da geometria euclidiana. Neste modelo utilizam-se propriedades dos números reais para deduzir os axiomas de Hilbert. Não tentaremos comentar todos os axiomas de Hilbert. Pelo contrário, indicaremos simplesmente como podem os conceitos primitivos ser definidos por meio dos números reais e daremos algumas demonstrações para ilustrar os métodos da geometria analítica.

13.2. Retas num espaço n-dimensional

Aplicamos em seguida os números reais à definição dos conceitos de *ponto, reta,* e *sobre (em)*. As definições são formuladas de modo que se adaptem às nossas ideias intuitivas, relativas à geometria euclidiana tridimensional, mas são ainda providas de significado num espaço n dimensional com $n \geq 1$.

Um ponto é simplesmente um vector em V_n, isto é, um sistema ordenado de n-tuplos de números reais; usaremos indiferentemente as palavras "ponto" e "vector". O espaço vectorial V_n diz-se um modelo analítico do *espaço euclidiano n-dimensional.* Para definir a "reta" servimo-nos das operações algébricas de adição e de multiplicação por escalares em V_n.

DEFINIÇÃO. *Seja P um dado ponto e A um vector dado não nulo. O conjunto de todos os pontos da forma $P + tA$, onde t toma todos os valores reais, diz-se uma reta passando por P e paralela a A. Designamos esta reta por $L(P; A)$ e escrevemos*

$$L(P; A) = \{P + tA \mid t \text{ real}\} \text{ ou, mais brevemente } L(P; A) = \{P + tA\}.$$

Um ponto Q diz-se estar sobre a reta $L(P; A)$ se $Q \in L(P; A)$.

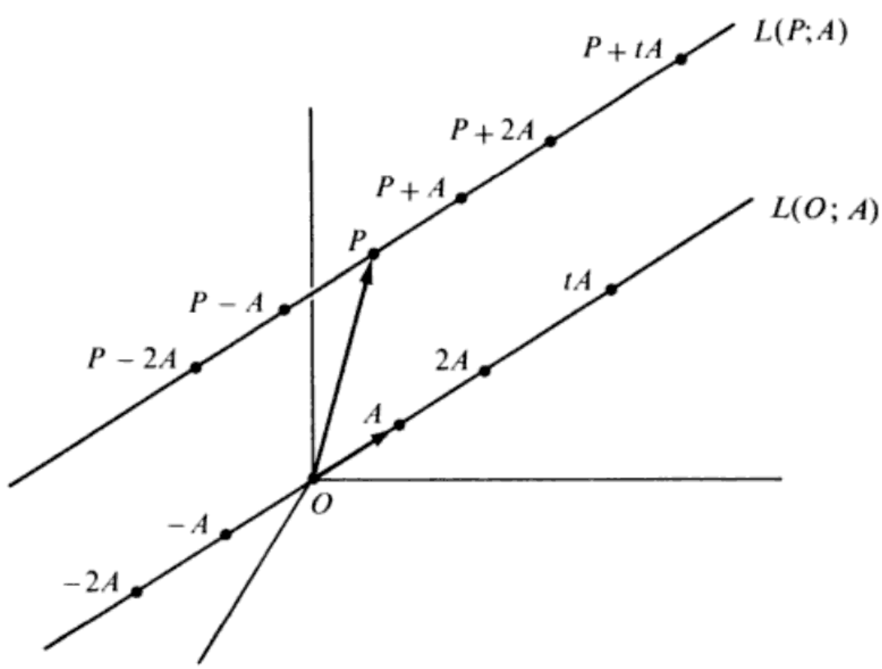


Fig. 13.1. A reta $L(P; A)$ passando por P paralela a A e a sua relação geométrica com a reta $L(O; A)$ passando por O paralela a A.

Na notação $L(P; A)$, o ponto P que se escreve em primeiro lugar está sobre a reta, visto que corresponde a $t = 0$. O segundo ponto, A, chama-se o *vector direccional* da reta. A reta $L(O; A)$ que passa pela origem é o *subespaço* de A, formado por todos os produtos de A por escalarés. A reta passando por P paralela a A obtém-se somando P a cada vector do *subespaço* de A.

A fig. 13.1 mostra a interpretação geométrica desta definição em V_3. Cada ponto $P + tA$ pode representar-se pela extremidade dum vector geométrico traçado a partir da origem. Quando t varia tomando todos os valores reais, o ponto correspondente $P + tA$ descreve uma reta que passa por P e é paralela ao vector $A \cdot A$ fig. 13.1 mostra os pontos correspondentes a alguns valores de t em ambas as retas $L(P; A)$ e $L(O; A)$.

13.3. Algumas propriedades simples da reta

Vamos demonstrar em primeiro lugar que o vector direccional A que intervém na definição de $L(P; A)$ pode ser substituído por qualquer vector paralelo a A. (Lembramos que dois vectores A e B dizem-se paralelos se $A = cB$ para um certo escalar c não nulo).

TEOREMA 13.1. *Duas retas $L(P; A)$ e $L(P; B)$ passando pelo mesmo ponto P coincidem se, e só se, os vectores direcionais A e B são paralelos.*

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que $L(P; A) = L(P; B)$. Tomemos um ponto em $L(P; A)$ distinto de P, por exemplo $P + A$. Este ponto está também em $L(P; B)$, pelo que $P + A = P + cB$ para algum escalar c. Daqui resulta que $A = cB$ com $c \neq 0$, visto que $A \neq O$. Portanto A e B são paralelos.

Demonstremos agora o inverso. Suponhamos A e B paralelos, quer dizer $A = cB$ para algum $c \neq 0$. Se Q está em $L(P; A)$, então tem-se $Q = P + tA = P + t(cB) = P + (ct)B$, pelo que Q está em $L(P; B)$. Deste modo $L(P; A) \subseteq L(P; B)$. De modo análogo, $L(P; B) \subseteq$ $\subseteq L(P; A)$, pelo que $L(P; A) = L(P; B)$.

Vamos agora provar que o ponto P que intervém na definição de $L(P; A)$ pode ser substituído por qualquer outro Q sobre a mesma reta.

TEOREMA 13.2. *Duas retas $L(P; A)$ e $L(Q; A)$ com o mesmo vector direcional A coincidem se, e só se, Q está em $L(P; A)$.*

Demonstração. Suponhamos $L(P; A) = L(Q; A)$. Visto que Q está em $L(Q; A)$, Q está também em $L(P; A)$. Para demonstrar o inverso supomos que Q está em $L(P; A)$, por exemplo $Q = P + cA$. Desejamos provar que $L(P; A) = L(Q; A)$. Se $X \in L(P; A)$, então $X = P + tA$ para algum t. Mas $P = Q - cA$, pelo que $X = Q - cA + tA = Q + (t - c)A$ e em consequência X está também em $L(Q; A)$. Portanto $L(P; A) \subseteq L(Q; A)$. De modo análogo encontramos $L(Q; A) \subseteq L(P; A)$, pelo que ambas as retas são iguais.

Um dos famosos postulados de Euclides é o *postulado das paralelas*, o qual é logicamente equivalente à proposição de que "por um ponto dado passa uma e uma só reta paralela a outra reta dada". Deduziremos esta propriedade com uma consequência simples do Teorema 13.1. Assim, em primeiro lugar, necessitamos definir paralelismo de retas.

DEFINIÇÃO. *As retas $L(P; A)$ e $L(Q; B)$ dizem-se paralelas se os respetivos vectores direcionais A e B forem paralelos.*

TEOREMA 13.3. *Dada uma reta L e um ponto Q não sobre L, então existe uma, e uma só, recta L' contendo Q e paralela a L.*

Demonstração. Suponhamos que a reta dada tem o vector direcional A. Consideremos a reta $L' = L'(Q; A)$. Esta reta contém Q e é paralela a L. O Teorema 13.1 diz-nos que esta é a única reta com essas duas propriedades.

Nota: Durante largo periodo de tempo os matemáticos suspeitaram que o postulado das paralelas poderia ser deduzido dos outros postulados de Euclides, mas todas as tentativas para o demonstrar falharam. Nos começos do século XIX os matemáticos Karl F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860) e N. I. Lobatchevski (1793-1856) chegaram à conclusão de que o postulado das paralelas não poderia ser derivado a partir dos outros e começaram a desenvolver geometrias não euclidianas, isto é, geometrias nas quais o referido postulado não seria válido. O trabalho destes homens inspirou otros matemáticos e cientistas a alargarem os seus pontos de vista acerca das "verdades aceites" e a pôr de parte outros axiomas que durante séculos haviam sido considerados como coisa sagrada.

É também possível deduzir com facilidade a seguinte propriedade das retas que Euclides tinha estabelecido como um axioma.

TEOREMA 13.4. *Dois pontos distintos definem uma reta, isto é, se $P \neq Q$, existe uma, e uma só, reta unindo P com Q, a qual pode definir-se como o conjunto $\{P + t(Q - P)\}$.*

Demonstração. Seja L a reta que passa por P e é paralela a $Q - P$, isto é,

$$L = L(P; Q - P) = \{P + t(Q - P)\}.$$

Esta recta contém quer P quer Q (fazer $t = 0$ para obter P e $t = 1$ para obter Q). Seja agora L' qualquer reta contendo quer P quer Q. Vamos demonstrar que $L' = L$. Uma vez que L' contem P, temos $L' = L(P; A)$ para algum $A \neq O$. Mas L' também contém Q, pelo que $P + cA = Q$ para algum c. Daqui resulta $Q - P = cA$, com $c \neq 0$, já que $Q \neq P$. Deste modo $Q - P$ é paralelo a A, pelo que, pelo Teorema 13.2, se tem $L' = L(P; A) = L(P; Q - P) = L$.

EXEMPLO. O Teorema 13.4 dá-nos uma maneira fácil para averiguar se um ponto Q pertence a uma determinada reta $L(P; A)$. Diz-nos que Q está em $L(P;A)$ se e só se, $Q - P$ for paralelo a A. Por exemplo, consideremos a reta $L(P; A)$, onde $P = (1, 2, 3)$ e $A = (2, -1, 5)$. Para averiguar se o ponto $Q = (1, 1, 4)$ esta sobre esta reta, examinemos $Q - P = (0, -1, 1)$. Visto $Q - P$ não ser o produto de A por um escalar, o ponto $(1, 1, 4)$ não está sobre a reta.

Por outro lado, se $Q = (5, 0, 13)$ encontramos que $Q - P = (4, -2, 10) = 2A$, pelo que Q está sobre a reta.

A dependência linear de dois vectores em V_n pode ser expressa em linguagem geométrica.

TEOREMA 13.5. *Dois vectores A e B de V_n são linearmente independentes se, e só se, estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem.*

Demonstração. Se quer A quer B são nulos, o resultado é trivial. Se ambos são não nulos, então A e B são dependentes se, e só se, $B = tA$ para algum escalar t. Mas $B = tA$ se, e somente se, B está sobre a reta que passa pela origem paralela a A.

13.4. Retas e funções vectoriais

O conceito de reta pode relacionar-se com o de função. A correspondência que associa a cada real t o vector $P + tA$ é um exemplo de uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e cujo contradomínio é a reta $L(P; A)$. Se representamos a função pelo símbolo X, então o valor da função $X(t)$, para um dado t, é dado por

$$X(t) = P + tA . \tag{13.1}$$

Chamar-lhe-emos uma função vectorial duma variável real.

A definição dum tal tipo de função é importante porque, como veremos no capítulo 14, fornece-nos um método natural para definir curvas mais gerais no espaço.

O escalar t em (13.1) chama-se, muitas vezes, *parâmetro,* e (13.1) a *equação vectorial paramétrica* ou simplesmente a *equação vectorial* da reta. Por vezes convém considerar a reta como a trajectória duma partícula móvel, caso em que o parâmetro t é interpretado como *o tempo* e $X(t)$ é o *vector posicional* da partícula.

Observe-se que dois pontos $X(a)$ e $X(b)$ sobre uma dada reta $L(P;A)$ coincidem se, e só se, temos $P + aA = P + bA$ ou $(a - b)a = O$. Visto que $A \neq O$, esta última igualdade verifica-se se, e só se, $A - b = 0$, ou seja $a = b$. Assim, valores distintos do parâmetro t conduzirão a pontos diferentes sobre a reta.

Consideremos agora três pontos distintos sobre uma dada reta, por exemplo $X(a)$, $X(b)$ e $X(c)$, com $a > b$. Dizemos que $X(c)$ está *entre* $X(a)$ e $X(b)$ se c está entre a e b, isto é, se $a < c < b$.

A congruência pode definir-se em termos de normas. Um par de pontos P, Q diz-se *congruente* com outro par P', Q' se $\|P - Q\| = \|P' - Q'\|$. A norma $\|P - Q\|$ chama-se também a *distância* entre P e Q.

Isto completa as definições dos conceitos *ponto, reta, sobre, entre, congruência* no nosso modelo analítico do espaço euclidiano n-dimensional. Concluímos esta seção com algumas observações complementares respeitantes às equações paramétricas das retas no espaço tridimensional.

Se uma reta passa por dois pontos distintos P e Q, podemos utilizar $Q - P$ para vector direcional A na equação (13.1); a equação vectorial da reta vem então *por P coincidem se, e só se, o subespaço gerado por A e B é o mesmo que o gerado pelos vectores C e D.*

Demonstração. Se o subespaço de A e B é o de C e D é evidente que $M = M'$ (os planos coincidem). Inversamente, suponhamos que $M = M'$. O plano M contém $P + A$ e $P + B$. Uma vez que ambos estes pontos estão também em M', então cada um dos A e B deve estar no subespaço gerado por C e D. Analogamente, cada um dos C e D deve estar no subespaço gerado por A e B. Portanto o subespaço gerado por A e B é o subespaço gerado por C e D.

O teorema que apresentamos a seguir mostra que o ponto P que intervém na definição do plano $\{P + sA + tB\}$ pode ser substituido por qualquer outro ponto Q do mesmo plano.

TEOREMA 13.8. *Dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sA + tB\}$ gerados pelos mesmos vectores A e B coincidem se, e só se, Q está sobre M.*

Demonstração. Se $M = M'$, então Q está certamente em M. Para demonstrar a inversa, supomos que Q está em M, quer dizer $Q = P + aA + bB$. Consideremos qualquer ponto X em M. Então $X = P + sA + tB$ para certos escalares s e t. Mas $P = Q - aA - bB$, pelo que $X = Q + (s - a)A + (t - b)B$. Portanto X está em M' e assim $M \subseteq M'$. Analogamente, verificamos que $M' \subseteq M$, pelo que os dois planos são iguais.

O postulado das paralelas de Euclides (Teorema 13.3) admite uma forma análoga para os planos. Antes de enunciarmos este teorema necessitamos definir paralelismo de dois planos. A definição é sugerida pela representação geométrica da fig. 13.3.

DEFINIÇÃO. *Dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sC + tD\}$ são paralelos se o subespaço gerado por A e B é o subespaço, gerado por C e D. Diz-se também que um vector X é paralelo ao plano M se X pertence ao subespaço gerado por A e B.*

TEOREMA 13.9. *Dado um plano M e um ponto Q não situado sobre M, existe um e um só plano M' que contém Q e é paralelo a M.*

Demonstração. Seja $M = \{P + sA + tB\}$ e consideremos o plano $M' = \{Q + sA + tB\}$. Este plano contém Q e é gerado pelos mesmos vectores A e B que M. Portanto M' é paralelo a M. Se M'' é outro plano passando por Q paralelo a M, então

$$M'' = \{Q + sC + tD\} \quad ,$$

onde o subespaço gerado por C e D é igual ao de A e B. Pelo Teorema 13.7 devemos ter $M'' = M'$. Portanto M' é o único plano passando por Q e paralelo a M.

O Teorema 13.4 diz-nos que dois pontos distintos definem uma reta. O teorema que se segue mostra que três pontos distintos definem um plano, desde que não sejam colineares.

TEOREMA 13.10. *Se P, Q e R são três pontos não situados sobre a mesma reta, então* *existe um e um só plano contendo esses três pontos. Tal plano define-se pelo conjunto de pontos*

$$M = \{P + s(Q - P) + t(R - P)\}. \tag{13.4}$$

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que um dos pontos, por exemplo P, é a origem. Então Q e R não estão sobre uma mesma reta que passe pela origem, pelo que são linearmente independentes. Deste modo eles geram um plano que passa pela origem, digamos o plano

$$M' = \{sQ + tR\}.$$

Este plano contém os três ponto O, Q e R.

Provemos agora que M' é o único plano que contém os três pontos dados O, Q e R. Qualquer outro plano que passe pela origem tem a forma

$$M'' = \{sA + tB\},$$

onde A e B são linearmente independentes. Se M'' contém Q e R, temos

$$Q = aA + bB, \qquad R = cA + dB, \qquad 13.5)$$

para certos escalares a, b, c, d. Por conseguinte, toda a combinação linear de Q e R é também uma combinação linear de A e B, pelo que $M' \subseteq M''$, basta provar que cada um dos vectores A e B é uma combinação linear de Q e R. Multiplicando a primeira equação (13.5) por d e a segunda por b e subtraindo eliminamos B e obtemos

$$(ad - bc)A = dQ - bR.$$

A diferença $ad - bc$ não pode ser nula, porque se o fosse Q e R seriam dependentes. Desta maneira podemos dividir ambos os membros por $ad - bc$ e exprimir A como uma combinação linear de Q e R. Analogamente, podemos exprimir B como uma combinação linear dos mesmos vectores, pelo que $M'' \subseteq M'$. Está assim demonstrado o teorema quando um dos três pontos P, Q e R é a origem.

Para demonstrarmos o teorema no caso geral, seja M o conjunto (13.4) e $C = Q - P$, $D = R - P$. Vamos provar primeiro que C e D são linearmente independentes. Se o não fossem verificar-se-ia $D = tC$ para algum escalar t, resultando $R - P = t(Q - P)$ ou $R = P + t(Q - P)$, contradizendo o fato de que P, Q e R não são colineares. Portanto o conjunto M é um plano passando por P gerado pelo par linearmente independente C e D. Este plano contém os pontos P, Q e R (fazer $s = 1$, $t = 0$ para obter Q, e $s = 0$, $t = 1$ para obter R). Falta agora provar que este é o único plano contendo P, Q e R.

Seja M' qualquer plano contendo P, Q e R. Uma vez que M' é um plano contendo P, tem-se

$$M' = \{P + sA + tB\}$$

para qualquer par de vectores linearmente independentes A e B. Seja $M' = \{sA + tB\}$ o plano gerado pelo mesmo par A e B passando pela origem. Evidentemente M' contém um vector X se,e só se,M_0' contém $X - P$. Uma vez que M' contém Q e R, o plano M_0' contém $C = Q - P$ e $D = R - P$. Mas acabámos de demonstrar que existe um e um só plano contendo O, C e D, visto C e D serem linearmente independentes. Portanto $M_0' = \{sC + tD\}$, pelo que $M' = \{P + sC + tD\} = M$, o que completa a demonstração.

No Teorema 13.5 demonstrámos que dois vectores em V_n são linearmente dependentes se, e só se, estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem. O teorema seguinte exprime uma condição equivalente para três vectores num plano.

TEOREMA 13.11. *Três vectores A, B e C de V_n são lineamente dependentes se,e só se,estão situados sobre o mesmo plano passando pela origem.*

Demonstração. Suponhamos que A, B e C são dependentes. Podemos então exprimir um dos vectores como combinação linear dos outros dois ou seja $C = sA + tB$. Se A e B são independentes, geram um plano que passa pela origem e C está nesse plano. Se A e B são dependentes, então A, B e C estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem e portanto estão em qualquer plano que passe pela origem e que contém os três pontos A, B e C.

Para demonstrar o inverso, supomos que A, B e C estão sobre um mesmo plano que passa pela origem, por exemplo M. Se A e B são dependentes,então A, B e C são dependentes e o teorema está demonstrado. Se A e B são independentes, geram um plano M' que passa pela origem. Segundo o Teorema 13.10 existe um e um só plano que passa por O e contém A e B. Por conseguinte $M' = M$. Uma vez que C está neesse plano deve ser $C = sA + tB$, pelo que A, B e C são dependentes.

13.7. Planos e funções vectoriais

A correspondência que associa a cada par de números reais s e t o vector $P + sA + tB$ no plano $M = \{P + sA + tB\}$ é outro exemplo duma função vectorial. Neste caso o domínio da função é o conjunto de todos os pares de números reais (s, t) e o seu contradomínio é o plano M. Se representarmos a função por X e os seus valores por $X(s, t)$, então para cada par (s, t) temos

$$X(s, t) = P + sA + tB. \tag{13.6}$$

Diz-se que X é uma função vectorial de duas variáveis reais. Os escalares s e t chamam-se parâmetros e a equação (13.6) diz-se a equação vectorial paramétrica ou simplesmente a equação vectorial do plano. É a equivalente à representação da reta por uma função vectorial duma variável real. A presença de dois parâmetros na equação (13.6) dá-nos o caráter de bidemensionalidade do plano. Quando cada vector está em V_3 e é expresso em função das suas componentes, a saber

$$P = (p_1, p_2, p_3), \qquad A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3), \qquad \text{e} \qquad X(s, t) = (x, y, z),$$

a equação vectorial (13.6) pode substituir-se por três equações escalares

$$x = p_1 + sa_1 + tb_1, \qquad y = p_2 + sa_2 + tb_2, \qquad z = p_3 + sa_3 + tb_3.$$

Os parâmetros s e t podem sempre eliminar-se entre estas três equações para dar lugar a uma equação linear da forma $ax + by + cz = d$, chamada a equação cartesiana do plano. Apresentamos a seguir um exemplo.

EXEMPLO. Seja $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (1, 2, 3), A = (1, 2, 1)$ e $B = (1, -4, -1)$. A correspondente equação vectorial é

$$X(s, t) = (1, 2, 3) + s(1, 2, 1) + t(1, -4, -1).$$

A partir daqui obtém-se as três equações paramétricas escalares

$$x = 1 + s + t, \; y = 2 + 2s - 4t, \; z = 3 + s - t.$$

Para se obter a equação cartesiana escrevemos a primeira a terceira equações, respetivamente, nas formas $x - 1 = s + t$, $z - 3 = s - t$. Somando-as e subtraindo-as encontra-se $2s = x + z - 4$, $2t = x - z + 2$. Substituindo na segunda equação os parâmetros s e t pelos valores tirados das equações anteriores obtemos a equação cartesiana do plano $x + y - 3z = -6$. Voltaremos ao estudo de equações cartesianas lineares na seção 13.16.

13.8. Exercícios

1. Seja $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (1, 2, -3), A = (3, 2, 1)$, e $B = (1, 0, 4)$. Determinar quais dos pontos estão sobre M.
   (a) $(1, 2, 0)$; (b) $(1, 2, 1)$; (c) $(6, 4, 6)$; (d) $(6, 6, 6)$; (e) $(6, 6, -5)$.
2. Os três pontos $P = (1, 1', -1), Q = (3, 3, 2)$, e $R = (3, -1, -2)$ definem um plano M. Determinam quais dos pontos seguintes estão sobre M:
   (a) $(2, 2, \frac{1}{2})$; (b) $(4, 0, -\frac{1}{2})$; (c) $(-3, 1, -3)$; (d) $(3, 1, 3)$; (e) $(0, 0, 0)$.
3. Determinar as equações paramétricas escalares de cada um dos planos definidos do modo seguinte:
   (a) O plano passando por $(1, 2, 1)$ gerado pelos vectores $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 4)$.
   (b) O plano passando por $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 4)$.
4. Um plano M tem as equações escalares paramétricas

$$x = 1 + s - 2t, \qquad y = 2 + s + 4t, \qquad z = 2s + t.$$

   (a) Determinar quais dos pontos seguintes estão sobre M: $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(2, -3, -3)$.
   (b) Determinar vectores P, A e B tais que $M = \{P + sA + tB\}$.
5. Seja M o plano determinado pelos três pontos P, Q, R não colineares.
   (a) Se p, q, r são três escalares tais que $p + q + r = 1$, provar que $pP + qQ + rR$ está sobre M.

(b) Provar que todo o ponto de M é da forma $pP + qQ + rR$, com $p + q + r = 1$.

6. Determinar a equação linear cartesiana da forma $ax + by + cz = d$ para cada um dos seguintes planos:
   (a) O plano passando por (2, 3, 1) e gerado por (3, 2, 1) e (−1, −2, −3).
   (b) O plano passando por (2, 3, 1), (−2, −1, −3), e (4, 3, −1).
   (c) O plano passando por (2, 3, 1), paralelo ao plano passando pela origem e gerado por (2, 0, −2) e (1, 1, 1).
7. Um plano M tem a equação cartesiana $3x - 5y + z = 9$.
   (a) Determinar quais dos seguintes pontos estão sobre M: (0, −2, −1), (−1, −2, 2), (3, 1, −5).
   (b) Determinar vectores P, A e B tais que $M = \{P + sA + tB\}$.
8. Considerar os dois planos $M = \{P + sA + tB\}$ e $M' = \{Q + sC + tD\}$, onde $P = (1, 1, 1)$, $A = (2, -1, 3)$, $B = (-1, 0, 2)$, $Q = (2, 3, 1)$, $C = (1, 2, 3)$ e $D = (3, 2, 1)$. Determinar dois pontos distintos sobre a interseção $M \cap M'$.
9. Dado um plano $M = \{P + sA + tB\}$, onde $P = (2, 3, 1)$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 1)$ e outro plano M' com a equação cartesiana $x - 2y + z = 0$.
   (a) Verificar se M e M' são paralelos.
   (b) Determinar dois pontos da interseção $M' \cup M''$ se M'' tem a equação cartesiana
   $$x + 2y + z = 0 .$$
10. Seja L a reta passando pelo ponto (1, 1, 1) e paralela ao vector (2, −1, 3) e seja M_0 plano passando por (1, 1, −2) gerado pelos vectores (2, 1, 3) e (0, 1, 1). Provar que existe um e um só ponto na interseção $L \cap M$ e determinar esse ponto.
11. Uma reta com o vector direcional X diz-se paralela a um plano M se X é paralelo a M. Seja L a reta passando pelo ponto (1, 1, 1), paralela ao vector (2, −1, 3). Determinar se L é paralela a cada um dos seguintes planos.
    (a) Plano passando por (1, 1, −2) e gerado por (2, 1, 3) e $(\frac{3}{4}, 1, 1)$.
    (b) Plano passando por (1, 1, −2), (3, 5, 2) e (2, 4, −1).
    (c) Plano de equação cartesiana $x + 2y + 3z = -3$.
12. Dois pontos distintos P e Q estão situados no plano M. Provar que cada ponto da recta definida por P e Q está em M.
13. Dada a reta L passando pelo ponto (1, 2, 3) paralela ao vector (1, 1, 1) e dado o ponto (2, 3, 5) que não está em L, determinar a equação cartesiana do plano passando por (2, 3, 5) e contendo a reta L.
14. Dada uma reta L e um ponto P não em L, provar que existe um e um só plano passando por P contendo L.

13.9. Produto vectorial

Em muitas aplicações da álgebra vectorial a problemas de geometria e mecânica é útil dispor de um método expedito de determinação dum vector perpendicular a cada um de dois vectores dados A e B. Isto consegue-se por intermédio do produto vectorial $A \times B$ (leia-se "A vectorial B") que se define do modo seguinte:

Teorema 13.13. *Se A e B são vectores linearmente independentes de V_3, então:*

(a) *os vectores A, B, $A \times B$ são linearmente independentes*

(b) *Todo o vector N de V_3, ortogonal simultaneamente a A e B, é igual ao produto dum escalar por $A \times B$.*

Demonstração. Seja $C = A \times B$. Então $C \neq O$, visto que A e B são linearmente independentes. Dados os escalares a, b, c tais que $aA + bB + cC = O$, multiplicamos escalarmente ambos os membros por C e tendo em conta que $A \cdot C = B \cdot C = 0$ encontramos $c = 0$. Então resulta $aA + bB = O$ pelo que $a = b = 0$ visto que A e B são independentes e a alínea (a) está demonstrada.

Seja agora N qualquer vector ortogonal a ambos A e B e seja $C = A \times B$. Vamos demonstrar que

$$(N \cdot C)^2 = (N \cdot N)(C \cdot C)\,.$$

Então da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 12.3) resulta que N é o produto de um escalar por C

Uma vez que A, B e C são linearmente independentes sabemos, pelo Teorema 12.10(c), que geram V_3. Em particular eles geram N, pelo que podemos escrever

$$N = aA + bB + cC$$

para determinados escalares a, b, c. Daqui resulta então

$$N \cdot N = N \cdot (aA + bB + cC) = c\, N \cdot C\ ,$$

visto que $N \cdot A = N \cdot B = 0$. Igualmente, visto que $C \cdot A = C \cdot B = 0$, se tem

$$C \cdot N = C \cdot (aA + bB + cC) = cC \cdot C\,.$$

Portanto $(N \cdot N)(C \cdot C) = (cN \cdot C)(C \cdot C) = (N \cdot C)(cC \cdot C) = (N \cdot C)^2$, o que completa a demonstração.

O Teorema 13.12 permite-nos uma interpretação geométrica do produto vectorial. Das propriedades (d) e (e) sabemos que $A \times B$ é perpendicular quer A que a B. Quando o vector $A \times B$ se representa geometricamente por uma reta, o sentido da seta depende das posições relativas dos três vectores unitários coordenados. Se $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ estão dispostos como se indica na fig. 13.a(a), diz-se que formam um *sistema de eixos coordenados positivo*. Neste caso o sentido de $A \times B$ é determinado pela "regra da mão direita", isto é, quando A roda para B segundo o menor ângulo de maneira que os dedos da mão direita (fechada) indiquem o sentido da rotação, então o polegar indica o sentido de $A \times B$ (supondo, evidentemente, que o polegar define uma direção perpendicular aos outros dedos). Num sistema de eixos coordenados negativo, como se indica na fig. 13.4(b), o sentido de $A \times B$ é o oposto e pode ser determinado pela correspondente "regra da mão esquerda".

O comprimento de $A \times B$ admite uma interpretação geométrica simples. Se A e B são vectores não nulos fazendo entre si um àngulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos escrever $A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos\theta$ na propriedade (f) do Teorema 13.12. para obtermos vectores. Por exemplo se escrevermos o determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

e o "desenvolvermos" segundo a regra indicada em (13.8), verificamos que o resultado é igual ao segundo membro de (13.7); por outras palavras, podemos escrever a definição de produto vectorial na seguinte forma compacta

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Por exemplo, para calcularmos o produto vectorial de $A = 2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ e $B = 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, escrevemos

$$A \times B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -36\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

13.11. Exercícios

1. Sejam $A = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $C = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Calcular cada um dos vectores seguintes como combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:
   (a) $A \times B$; (d) $A \times (C \times A)$; (g) $(A \times C) \times B$;
   (b) $B \times C$; (e) $(A \times B) \times C$; (h) $(A + B) \times (A - C)$;
   (c) $C \times A$; (f) $A \times (B \times C)$; (i) $(A \times B) \times (A \times C)$.
2. Em cada alínea determinar um vector de V_3 com norma unitária e ortogonal simultaneamente a A e a B:
   (a) $A = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$;
   (b) $A = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $B = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$;
   (c) $A = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $B = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.
3. Em cada alínea calcular a área do triângulo, de vectores A, B e C, recorrendo ao produto vectorial
   (a) $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, -1)$, $C = (3, 4, 0)$;
   (b) $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (1, 2, 1)$;
   (c) $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$.
4. Se $A = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $B = 2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, e $C = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, exprimir o produto vectorial $(A - C) \times (B - A)$ como combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
5. Provar que $\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\|$ se e só se A e B são ortogonais.
6. Dados dois vectores linearmente independentes A e B de V_3 e $C = (B \times A) - B$.

$$A = aB + bC + c(B \times C)$$

para determinados escalares a, b, c. Multiplicando escalarmente ambos os membros por $B \times C$ e atendendo a que $A \cdot (B \times C) = 0$ encontramos $c = 0$, pelo que $A = aB + bC$ e está assim provado que A, B e C são linearmente dependentes.

EXEMPLO. Para determinar se os três vectores $(2, 3, -1)$, $(3, -7, 5)$ e $(1, -5, 2)$ são dependentes, formamos o respetivo produto misto na forma de determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(-14 + 25) - 3(6 - 5) - 1(-15 + 7) = 27\,.$$

Uma vez que o produto misto não é nulo, os três vectores são linearmente independentes.

O produto misto é susceptível duma interpretação geométrica interessante. A fig. 13.6 mostra um paralelipípedo determinado pelos três vectores geométricos A, B, C não complanares. A sua altura é $\|C\| \cos \phi$, onde ϕ é o ângulo entre $A \times B$ e C. Nesta figura, $\cos \phi$ é positivo porque $0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$. A área do paralelogramo que forma a base é $\|A \times B\|$, e esta é também a área de cada seção paralela à base. Integrando a área da seção entre 0 e $\|C\| \cos \phi$, encontramos para volume do paralelipípedo $\|A \times B\|(\|C\| \cos \phi)$, a área da base vezes a altura. Mas sabe-se que

$$\|A \times B\| \, (\|C\| \cos \phi) = (A \times B) \cdot C\,.$$

Por outras palavras, o produto misto $A \times B\,.\,C$ é igual ao volume do paralelipípedo determinado por A, B e C. Quando $\frac{1}{2}\pi < \phi \le \pi$, $\cos \phi$ é negativo e o produto $A \times B \cdot C$ é negativo, portanto vale o simétrico do volume. Se A, B e C são complanares e o respetivo plano

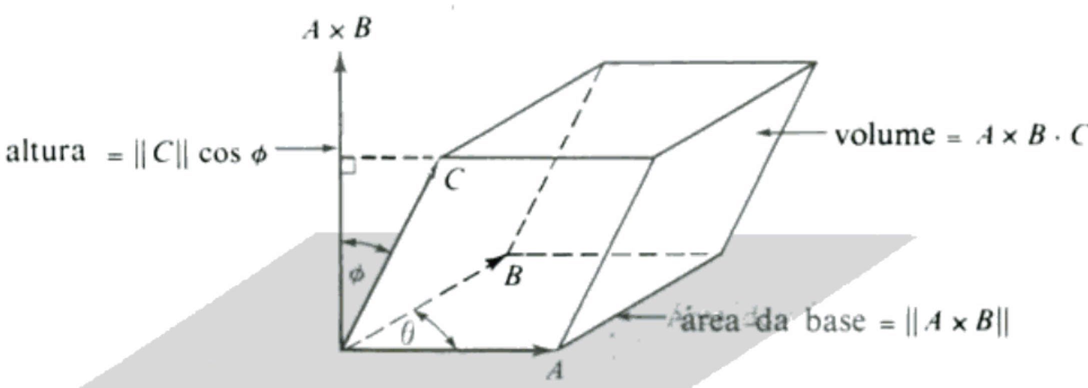


Fig. 13.6. Interpretação geométrica do produto triplo escalar como o volume dum paralelipípedo.

$$(ai + bj + ck) \cdot k \times (6i + 3j + 4k) = 3 .$$

(b) Determinar o vector $ai + bj + ck$ de menor comprimento e que verifique a relação (a).

7. Utilizar as propriedades algébricas do produto escalar e produto vectorial para derivar as seguintes propriedades do produto misto.
(a) $(A + B) \cdot (A + B) \times C = 0$.
(b) $A \cdot B \times C = - B \cdot A \times C$, a qual significa que a troca dos dois primeiros vectores muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* Aplicar a alinea (a) e a propriedade distributiva].
(c) $A \cdot B \times C = -A \cdot C \times B$, a qual significa que a troca dos dois últimos vectores muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* usar a antissimetria do produto vectorial]
(d) $A \cdot B \times C = - C \cdot B \times A$, a qual significa que a troca do primeiro com o terceiro vector muda o sinal do produto misto. [*Sugestão:* usar (b) e (c).]
Igualando os segundos membros de (b), (c) e (d) verificamos que

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A = C \cdot A \times B ,$$

o que prova que a permutação circular de A, B e C deixa invariável o produto misto.

9. Este exercício esboça uma demonstração da fórmula vectorial

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A)B - (B \cdot A)C , \tag{13.15}$$

que algumas vezes se chama, como mnemónica, fórmula "cab menos bac". Sendo $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, demonstrar que

$$i \times (B \times C) = c_1 B - b_1 C .$$

Isto prova (13.15) no caso particular $A = i$. Demonstrar as fórmulas correspondentes para $A = j$ e $A = k$. e combiná-las depois para obter (13.15).

10. Usar a fórmula "cab menos bac" do Exercício 9 para deduzir as seguintes igualdades
(a) $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$.
(b) $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = O$.
(c) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ se e só se $B \times (C \times A) = O$.
(d) $(A \times B) \cdot (C \times D) = (B \cdot D)(A \cdot C) - (B \cdot C)(A \cdot D)$.

11. Quatro vectores de V_3 A, B, C e D verificam as relações $A \times C \cdot B = 5$, $A \times D \cdot B = 3$, $C + D = i + 2j + k$, $C - D = i - k$. Calcular $(A \times B) \times (C \times D)$ em função de i, j, k.

12. Provar que $(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2$.

13. Dizer se é verdadeira ou falsa a fórmula $A \times [A \times (A \times B)] \cdot C = - \|A\|^2 A \cdot B \times C$.

14. (a) Provar que o volume do tetraedro cujos vértices são A, B, C e D é

$$\tfrac{1}{6} |(B - A) \cdot (C - A) \times (D - A)| .$$

(b) Calcular este volume quando $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (0, 3, 0)$ e $D = (4, 0, 0)$.

projecção de $P - Q$ sobre N. Este comprimento mínimo é $|(P - Q) \cdot N| / \|N\|$ e chama-se a *distância de Q ao plano.* O número d, em (13.17), é a distância da origem ao plano.

13.16. Equações lineares cartesianas definindo planos

Os resultados estabelecidos pelos Teoremas 13.15 e 13.16 podem também exprimir-se em termos de componentes. Se admitimos que $N = (a, b, c)$, $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $N = (x, y, z)$, a equação (13.16) escreve-se

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 . \tag{13.18}$$

Esta é a equação cartesiana do plano e é verificada por aqueles pontos (x, y, z) (e só por eles) que estão no plano. O conjunto de pontos verificando (13.18) não se altera se multiplicarmos cada um dos valores a, b, c por um escalar não nulo t. Isto significa unicamente que se escolheu outro vector normal ao plano em (13.16).

Passando ao segundo membro os termos independentes de x, y e z, podemos dar a (13.18) a forma

$$ax + by + cz = d_1 , \tag{13.19}$$

onde $d_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$. Uma equação deste tipo diz-se que é *linear em x, y e z.* Mostrámos exactamente que todo o ponto (x, y, z) dum plano verifica uma equação cartesiana linear (13.19), na qual es três valores a, b, c não são todos nulos. Inversamente, toda a equação linear com esta propriedade representa um plano. (O leitor pode demonstrar esta proposição a título de exercício).

O número d_1 em (13.19) dá lugar a uma relação simples com a distância d do plano à ori-

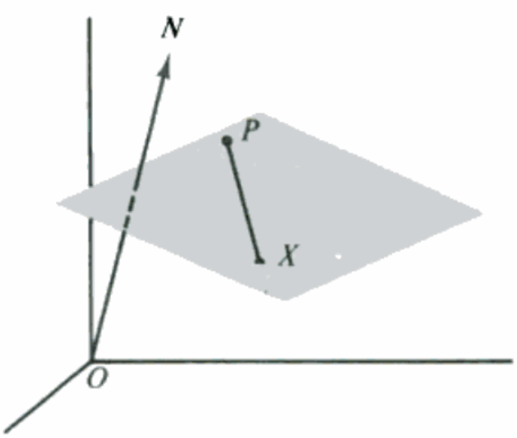


Fig. 13.7. Um plano passando por P e X e normal N

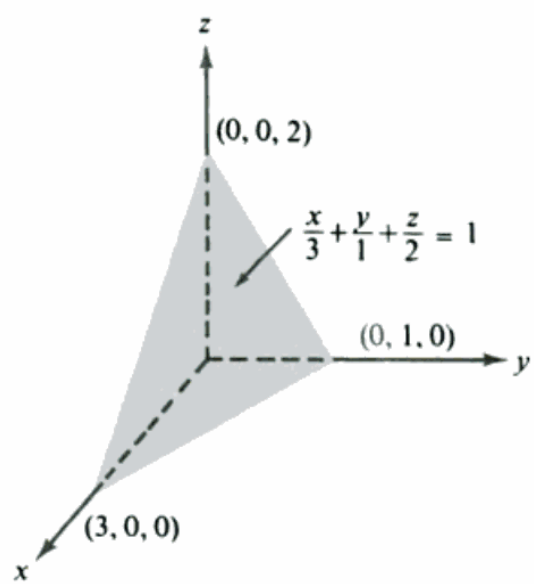


Fig. 13.8 Um plano intersetando os eixos coordenados.

21. (a) Se três pontos A, B, C definem um plano, provar que a distância de Q a este plano é $|(Q - A) \cdot (B - A) \times (C - A)| / \|(B - A) \times (C - A)\|$.
(b) Calcular esta distância se $Q = (1, 0, 0)$, $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ e $C = (2, 3, 4)$.
22. Provar que se dois planos M e M' não são paralelos, a sua intersecção $M \cap M'$ é uma reta.
23. Achar a equação cartesiana do plano paralelo a j e que passa pela interseçao dos planos de equações $x + 2y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 2$.
24. Achar a equaçao cartesiana do plano paralelo ao vector $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ e que contém a reta de interseção dos planos $x + y = 3$ e $2y + 3z = 4$.

13.18. As seções cónicas

Uma reta móvel G que interseta uma reta fixa A num ponto P, com a qual forma um ângulo constante θ, onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, gera no espaço tridimensional uma superfície chamada cone circular reto. A reta G é a *geratriz* do cone, A o seu *eixo* e P o *vértice*. Cada um dos cones representados na fig. 13.9 tem eixo vertical. As partes superior e inferior do cone que se unem no vértice chamam-se as duas *folhas* do cone. As curvas obtidas por interseção do cone com um plano não passando pelo vértice chamam-se *seções cónicas*, ou simplesmente *cónicas*. Se o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone, a cónica é uma *parábola*. Nos outros casos essa seção é

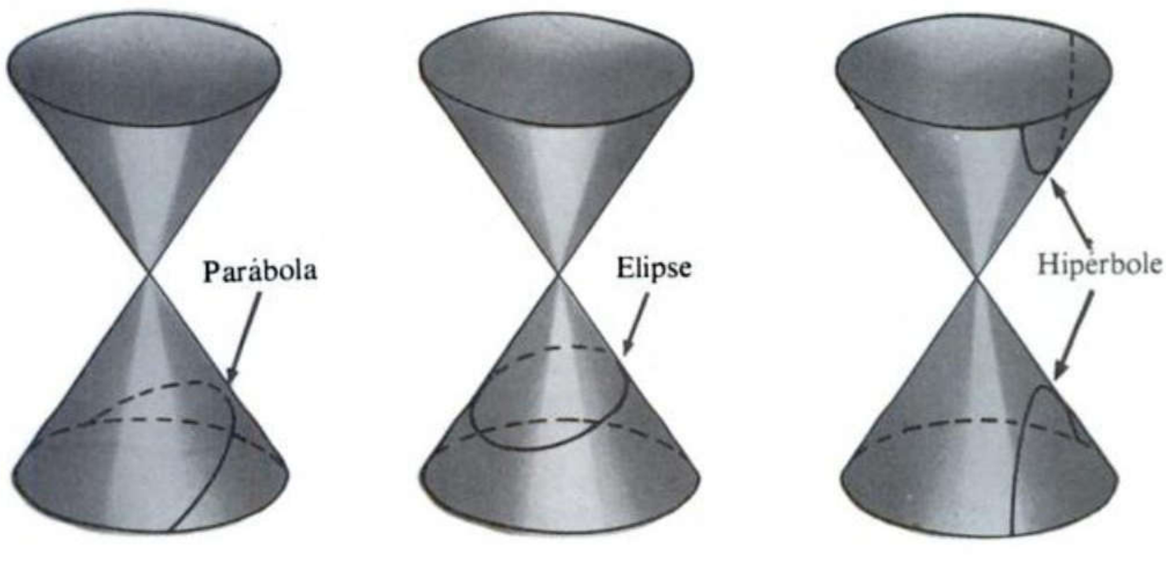
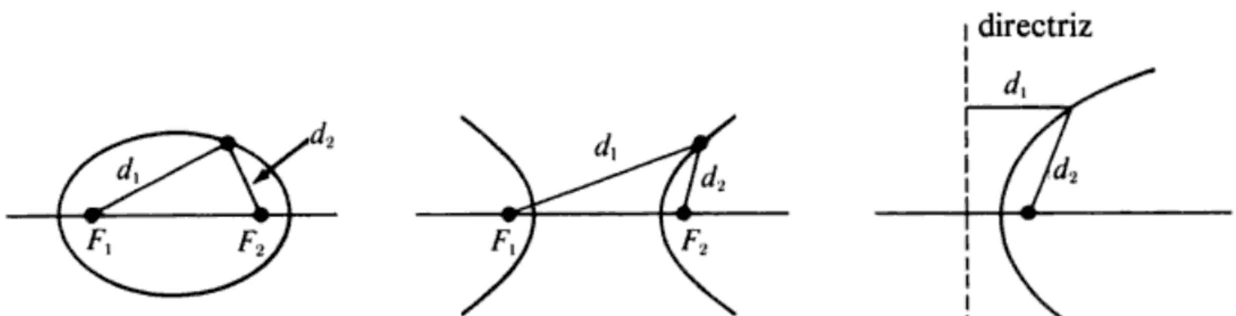


Fig. 13.9. As seções cónicas.

ou uma *elipse* ou uma *hipérbole*, conforme o plano interseta uma ou as duas folhas (Ver fig. 13.9). A hipérbole é formada por dois *ramos*, um em cada folha do cone.

Muitas descobertas importantes, tanto na matemática pura como aplicada, estiveram relacionadas com as seções cónicas. O estudo das cónicas feito por Apolónio data do Sec. III A. C. e constitui um dos trabalhos mais notáveis da geometria clássica grega. Cerca de dois mil anos mais tarde, Galileu descobria que um projéctil lançado horizontalmente do cimo de uma torre cai para a terra deecrevendo uma trajetória que é um arco de parábola (se for considerada desprezável a resistência do ar e se admitirmos que o movimento tem lugar numa região da superfície terrestre suficientemente reduzida para que possa ser considerada um plano). Um dos pontos de viragem na história da astronomia ocorreu em 1600 quando Kepler sugeriu que todos os planetas se movem em órbitas elípticas. Cerca de 80 anos mais tarde, Newton pode demonstrar que uma órbita planetária elíptica implica uma lei de atração gravitacional em que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Este fato levou Newton a formular a sua famosa teoria da gravitação universal, a qual tem sido frequentemente referida como o maior descoberta científica jamais feita. As seções cónicas aparecem não somente como órbitas de planetas e satélites, mas também como trajetórias de partículas atómicas elementares. Por tal fato podemos concluir que a importância das seções cónicas dificilmente poderá ser superestimada.

Há outras definições equivalentes das secções cónicas. Numa delas consideram-se pontos especiais conhecidos por *focos;* e aqui a elipse pode definir-se como o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2 a dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é constante. (Ver fig. 13.10). Se os focos coincidem, a elipse reduz-se a uma circunferência. Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a dife-



$d_1 + d_2 =$ constante
(elipse)

$|d_1 - d_2| =$ constante
(hipérbole)

$d_1 = d_2$
(parábola)

Fig. 13.10. Definições focais das secções cónicas.

rença $|d_1 - d_2|$ é constante. Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano para os quais a distância a um ponto fixo F (chamado o foco) é igual à distância a uma dada reta (chamada a diretriz).

Por um raciocínio muito simples pode demonstrar-se que a propriedade focal da elipse é uma consequência da sua definição como uma seção de um cone. Esta demonstração foi feita em 1822 pelo matemático belga G.P. Dandelin (1794-1847), considerando no interior do cone duas esferas que lhe são tangentes e em que cada uma delas é tangente a um plano secante do cone, como se indica na fig. 13.11. O lugar dos pontos de contacto destas esferas com o cone são duas circunferências C_1 e C_2, situadas em planos paralelos. Interessa provar que os pontos F_1 e F_2 de contato do plano secante com as esferas são os focos da elipse determinada no cone pelo plano.

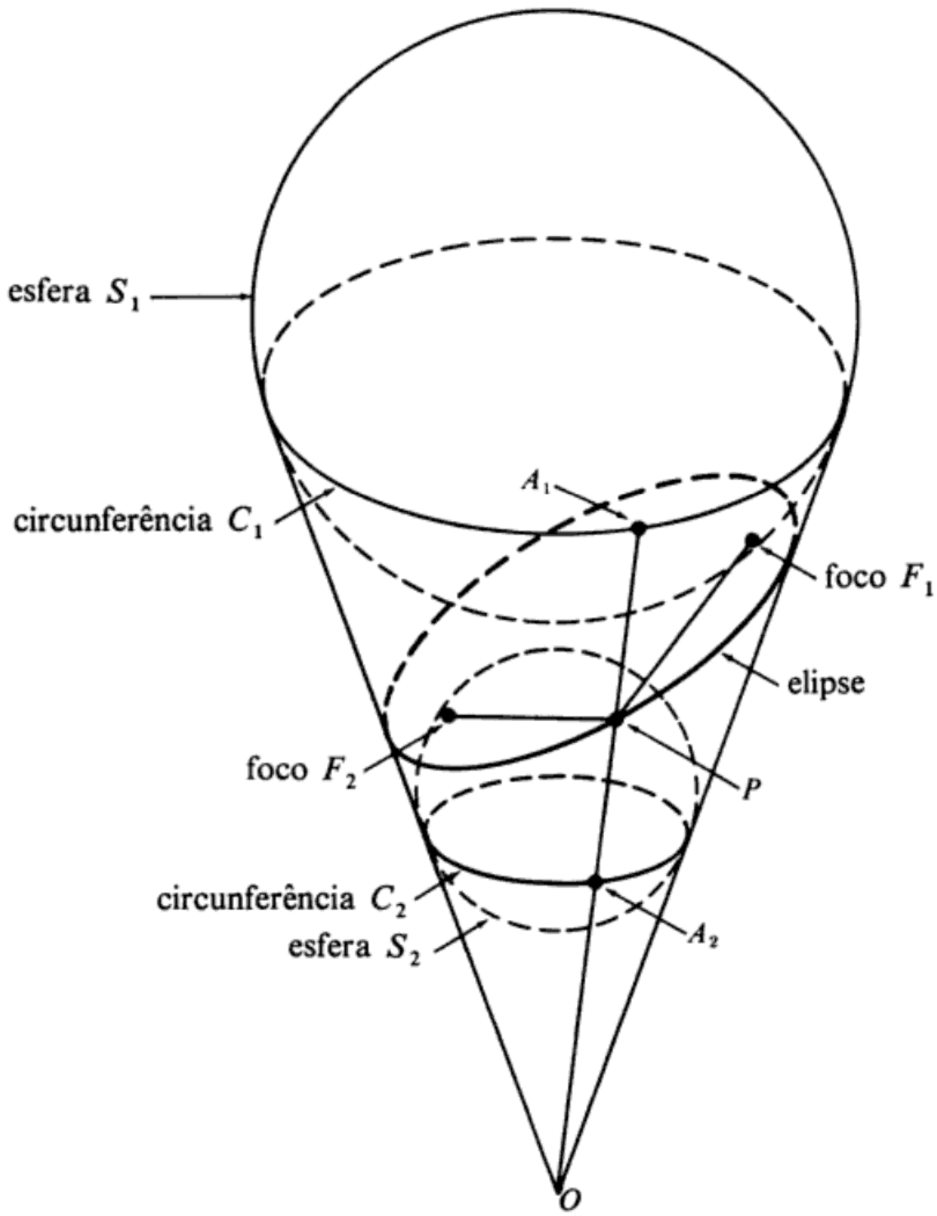


Fig. 13.11. Demonstração de Dandelin

Seja P um ponto qualquer da elipse. O problema consiste em demonstrar que $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|$ é constante, isto é, independente de P. Considere-se a geratriz do cone dirigida de O para P e sejam A_1 e A_2 os pontos de interseção com as circunferências C_1 e C_2, respetivamente. Então $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PA_1}$ são duas tangentes a S_1 tiradas a partir de P e por isso $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\|$. Analogamente $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_2}\|$, e portanto tem-se

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = \|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| .$$

Mas $\|\overrightarrow{PA_1}\| + \|\overrightarrow{PA_2}\| = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$, que é a distância entre os planos de C_1 e C_2 medida ao longo da reta OA_1 geratriz do cone. Isto prova que F_1 e F_2 são os focos da elipse, como se tinha afirmado.

Se $e > 1$, a curva é uma hipérbole com um ramo de cada lado de L. Os pontos do ramo esquerdo verificam (13.27) e os do ramo direito satisfazem a

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}. \tag{13.28}$$

Equações polares correspondentes a outras posições da diretriz serão discutidas no conjunto de exercícios que se apresenta a seguir.

13.21. Exercícios

1. Provar que a equação (13.22) do Teorema 13.17 deve substituir-se por

$$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N + d|$$

se F está no semi-plano positivo determinado por N.

2. Seja C uma cónica de excentricidade e, um foco na origem e directriz vertical L a uma distância d de F e à sua esquerda.

(a) Provar que se C é uma elipse ou uma parábola, todo o ponto C está à direita de L e satisfaz à equação polar

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$

(b) Provar que se C é uma hiperbole, pontos no ramo direito satisfazem à equação da alínea (a) e pontos do ramo esquerdo satisfazem a $r = -ed/(1 + e\cos\theta)$. Repare-se que $1 + e\cos\theta$ é sempre negativo nesta hipótese.

3. Se uma cónica tem uma directriz horizontal a uma distância d acima do foco situado na origem, provar que os seus pontos verificam a equação polar obtida da do Teorema 13.18 pela substituição de $\cos\theta$ por $\operatorname{sen}\theta$. Quais são as correspondentes equações polares se a directriz é horizontal e situada abaixo do foco?

Cada um dos Exercícios 4 a 9 dá uma equação polar duma cónica com o foco F na origem e a diretriz vertical à direita de F. Em cada caso determinar a excentricidade e e a distância d do foco à diretriz. Traçar a curva mostrando a relação desta com os respetivos foco e diretriz.

4. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$.

5. $r = \dfrac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$.

6. $r = \dfrac{6}{3 + \cos\theta}$.

7. $r = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \cos\theta}$.

8. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$.

9. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$.

Em cada um dos Exercícios 10 a 12, uma cónica de excentricidade e tem um foco na origem e a diretriz com uma dada equação cartesiana. Em cada caso calcular a distância d do foco à diretriz e determinar uma equação polar para a cónica. Para a hipérbole dar uma equação polar para cada ramo. Fazer um desenho mostrando a relação da curva com o seu foco e diretriz.

10. $e = 1/2$; directriz: $3x + 4y = 25$.
11. $e = 1$; directriz: $4x + 3y = 25$.
12. $e = 2$, directriz: $x + y = 1$.
13. Um cometa move-se numa órbita parabólica com o sol no foco. Quando o cometa dista 10^8 quilómetros do sol, um vector do foco para o cometa faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos **com o vector unitário N do foco perpendicularmente à diretriz, estando o foco no semi-plano negativo determinado por N.**
    (a) Determinar a equação polar da órbita, tomando a origem no foco e calcular a menor distância do cometa ao Sol.
    (b) Resolver a alínea (a) se o foco está situado no semi-plano positivo definido por N.

13.22 Cónicas simétricas relativamente à origem

Um conjunto de pontos diz-se *simétrico relativamente à origem* se $-X$ pertence ao conjunto sempre que X pertença. Vamos provar a seguir que o foco duma elipse ou duma hipérbole pode sempre ser definido de modo que a cónica seja simétrica em relação à origem. Para isso escrevemos a equação fundamental (13.22) na forma:

$$\|X - F\| = e\,|(X - F)\cdot N - d| = e\,|X \cdot N - F \cdot N - d| = |eX \cdot N - a|\,, \tag{13.29}$$

onde $a = ed + e\,F \cdot N$. Quadrando ambos os membros vem

$$\|X\|^2 - 2F \cdot X + \|F\|^2 = e^2(X \cdot N)^2 - 2eaX \cdot N + a^2\,. \tag{13.30}$$

Se pretendemos que exista simetria a respeito da origem, esta equação deve ainda ser satisfeita quando se substitue X por $-X$ ou seja

$$\|X\|^2 + 2F \cdot X + \|F\|^2 = e^2(X \cdot N)^2 + 2eaX \cdot N + a^2\,. \tag{13.31}$$

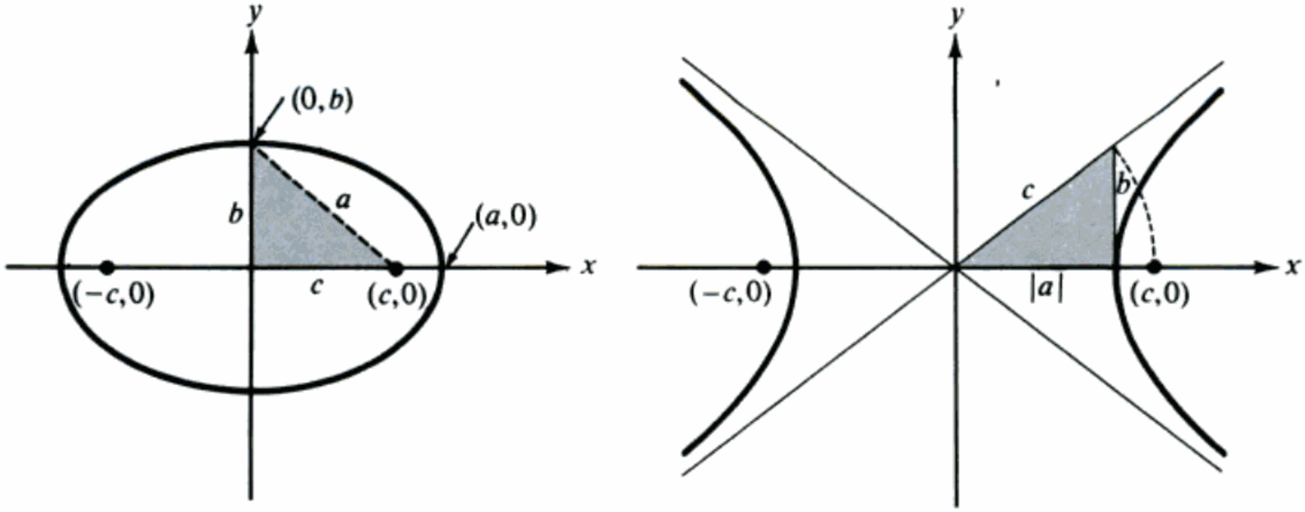
Subtraindo (13.31) de (13.30), teremos simetria se e só se

$$F \cdot X = eaX \cdot N \qquad \text{ou} \qquad (F - eaN) \cdot X = 0\,.$$

Esta equação pode ser satisfeita para todos os X pertencentes à curva se e só se F e N estão relacionados por

$$F = eaN\,, \qquad \textbf{onde} \qquad a = ed + eF \cdot N\,. \tag{13.32}$$

A relação $F = eaN$ implica que $F \cdot N = ea$, donde resulta $a = ed + e^2a$. Se $e = 1$, esta última



(a) Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = a^2 - c^2$$

(b) Hipérbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Fig. 13.14. Cónicas de excentricidade $e \neq 1$, simétricas relativamente à origem. Os focos são os pontos $(\pm c, 0)$, com $c = |a|\, e$. Os triângulos relacionam a, b e c geometricamente.

Para se obter uma equação cartesiana para a parábola, voltamos à equação fundamental (13.20) com $e = 1$. Tomando para diretriz a reta $x = -c$ e considerando o foco no ponto $(c, 0)$, se $X = (x, y)$, tem-se $X - F = (x - c, y)$ e a equação (13.20) dá-nos $(x - c)^2 + y^2 = |x + c|^2$. Efetuando as simplificações possíveis obtemos a equação da parábola na forma reduzida

$$y^2 = 4cx\,. \tag{13.40}$$

O ponto médio entre o foco e a diretriz (a origem na fig. 13.15) chama-se o *vértice* da parábola e a reta passando pelo vértice e pelo foco é o *eixo* da parábola. A parábola é simétrica em relação ao seu eixo. Se $c > 0$, a parábola está situada à direita do eixo OY, como na fig. 13.15; quando $c < 0$, a curva fica à esquerda de OY.

Se os eixos se escolhem de modo que o foco esteja sobre OY no ponto $(0, c)$ e se a diretriz for a reta $y = -c$, a forma reduzida da equação cartesiana da parábola é

$$x^2 = 4cy.$$

Quando $c > 0$, a parábola tem a concavidade para cima como se mostra na fig. 13.16. Quando $c < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

Se a parábola da fig. 13.15 for deslocada de maneira que o seu vértice seja o ponto (x_0, y_0), a equação correspondente será

$$(y - y_0)^2 = 4c(x - x_0)\,.$$

9. O mesmo Exercício 8, excepto que o eixo maior é paralelo a OY.
10. Vértices em $(-1, 2)$, $(-7, 2)$, eixo menor de comprimento 2.
11. Vértices em $(3, -2)$, $(13, -2)$, focos em $(4, -2)$, $(12, -2)$.
12. Centro em $(2, 1)$, eixo maior paralelo a OX, passando a curva pelos pontos $(6, 1)$ e $(2, 3)$.

Cada uma das equações dos Exercícios 13 a 18 representa uma hipérbole. Determinar as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices. Traçar as curvas e desenhar as assíntotas. Determinar também a excentricidade.

13. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1.$
14. $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1.$
15. $\dfrac{(x + 3)^2}{4} - (y - 3)^2 = 1.$
16. $9x^2 - 16y^2 = 144.$
17. $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0.$
18. $\dfrac{(x - 1)^2}{4} - \dfrac{(y + 2)^2}{9} = 1.$

Em cada um dos Exercícios 19 a 23 determinar a equação cartesiana da hipérbole que verifica as condições dadas. Traçar cada curva e as assíntotas.

19. Centro em $(0, 0)$, um foco em $(4, 0)$, um vértice em $(2, 0)$.
20. Focos em $(0, \pm\sqrt{2})$, vértices em $(0, \pm 1)$.
21. Vértices em $(\pm 2, 0)$, assíntotas $y = \pm 2x$.
22. Centro em $(-1, 4)$, um foco em $(-1, 2)$, um vértice em $(-1, 3)$.
23. Centro em $(2, -3)$, eixo transverso paralelo a um dos eixos coordenados, passando a curva pelos pontos $(3, -1)$ e $(-1, 0)$.
24. Para que valor (ou valores) de C será a reta $3x - 2y = C$ tangente à hiperbole $x^2 - 3y^2 = 1$?
25. As assíntotas da hipérbole são as retas $2x - y = 0$ e $2x + y = 0$. Determinar a equação cartesiana da curva, sabendo que passa pelo ponto $(3, -5)$.

Cada uma das equações dos Exercícios 26 a 31 representa uma parábola. Determinar as coordenadas do vértice, a equação da diretriz e a equação do eixo. Traçar as curvas

26. $y^2 = -8x.$
27. $y^2 = 3x.$
28. $(y - 1)^2 = 12x - 6.$
29. $x^2 = 6y.$
30. $x^2 + 8y = 0.$
31. $(x + 2)^2 = 4y + 9.$

Em cada um dos Exercícios 32 a 37 achar a equação cartesiana da parábola que satisfaz. as condições dadas e traçar a curva.

32. Foco em $(0, -1/4)$; equação da diretriz $x = 1/4$.
33. Vértice em $(0, 0)$; equação da diretriz $x = -2$.
34. Vértice em $(-4, 3)$; foco em $(-4, 1)$.
35. Foco em $(3, -1)$; equação da diretriz $x = 1/2$.
36. Eixo paralelo a OY e passando pelos pontos $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 0)$.
37. Eixo paralelo a OX, vértice em $(1, 3)$, passando por $(-1, -1)$.
38. Partindo da definição focal, achar a equação cartesiana da parábola cujo foco é a origem e cuja diretriz é a reta $2x + y = 10$.

12. Considere o Exercício 11. Provar que em cada ramo da hipérbole a diferença $||X - F|| - ||X + F||$ é constante.
13. (a) Demonstrar que uma transformação de homotetia (substituição de x por tx e y por ty) transforma uma elipse de centro na origem noutra elipse com o mesmo centro e com a mesma excentricidade; por outras palavras elipses homotéticas têm a mesma excentricidade.

    (b) Provar o inverso, isto é, se duas elipses concêntricas têm a mesma excentricidade e os eixos maiores sobre a mesma reta, então elas estão relacionadas por homotetia.

    (c) Provar os resultados correspondentes a (a) e a (b) para as hipérboles.
14. Utilizar a equação cartesiana que representa todas as cónicas de excentricidade e e centro na origem para demonstrar que estas cónicas são curvas integrais da equação diferencial $y' = (e^2 - 1)x/y$.

Nota: Uma vez que esta é uma equação diferencial homogénea (seção 8.25), o conjunto de todas essas cónicas de excentrecidade e é invariante por uma transformação homotética. (Comparar com o Exercício 13.)

15. (a) Provar que o conjunto de todas as parábolas é invariante sob uma transformação de semelhança. Isto é, uma transformação de semelhança transforma uma parábola numa parábola.

    (b) Determinar todas as parábolas semelhantes a $y = x^2$.
16. A recta $x - y + 4 = 0$, é tangente à parábola $y^2 = 16x$. Determinar o ponto de contato.
17. (a) Se as duas parábolas $y^2 = 4p(x - a)$ e $x^2 = 4qy$, dado $a \neq 0$, são tangentes provar que a abcissa do ponto de contato depende unicamente de a.

    (b) Determinar uma condição relativa a a, p e q que exprima o fato de que duas parábolas são tangentes.
18. Considerar o lugar dos pontos P do plano para os quais a distância de P ao ponto (2, 3) é igual à soma das distâncias de P aos eixos coordenados.

    (a) Mostrar que a parte deste lugar geométrico situado no primeiro quadrante é parte de uma hipérbole, localizar as assíntotas e fazer um desenho.

    (b) Traçar o lugar geométrico nos restantes quadrantes.
19. Duas parábolas têm o mesmo ponto como foco e a mesma reta como eixo, mas os vértices situados um de cada lado do foco. Provar que as parábolas se intersetam ortogonalmente (isto é, que as tangentes às parábolas nos pontos de interseção são perpendiculares).
20. (a) Provar que a equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

    representa todas as cónicas simétricas relativamente à origem com os focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$.

    (b) Fixar c e representar por S o conjunto de todas as cónicas obtidas quando a^2 toma qualquer valor real e positivo diferente de c^2. Provar que toda a curva de S verifica a equação diferencial

14
CÁLCULO COM FUNÇÕES VECTORIAIS

14.1. Funções vectoriais duma variável real

Este capítulo combina a álgebra vectorial com os métodos do cálculo e descreve algumas aplicações ao estudo de curvas e de alguns problemas de mecânica. O conceito de função vectorial é fundamental neste estudo.

DEFINIÇÃO. *Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e o contradomínio é um subconjunto do espaço n-dimensional V_n denomina-se função vectorial duma variável real.*

Encontrámos tais funções no capítulo 13. Por exemplo, a reta passando por um ponto P, paralela a um vector não nulo A, é o contradomínio da função vectorial X definida por

$$X(t) = P + tA \ ,$$

para todo o t real.

As funções vectoriais serão representadas pelas letras maiúsculas, tais como F, G, X, Y, etc., ou por letras minusculas $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$, etc. O valor da função F em t representa-se, como habitualmente, por $F(t)$. Nos exemplos que viermos a estudar o domínio de F será um intervalo que pode ser finito e fechado ou pode mesmo ser infinito.

14.2. Operações algébricas. Componentes

As operações usuais da álgebra vectorial podem servir à combinação de duas funções vectoriais ou à combinação duma função vectorial com uma função real. Se F e G são funções vectoriais e u é uma função real, todas com o mesmo domínio, definimos novas funções $F + G$, uF, e $F \cdot G$ mediante as igualdades

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t) \, , \qquad (uF)(t) = u(t)F(t) \, , \qquad (F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t) \, .$$