12
ÁLGEBRA VECTORIAL

12.1. Introdução histórica

Nos capítulos precedentes apresentámos muitos dos conceitos fundamentais do cálculo, ilustrando-os com aplicações à resolução de problemas relativamente simples de caráter geométrico ou físico. Ulteriores aplicações do cálculo exigem já um conhecimento de geometria analítica mais profundo do que o até agora apresentado e por esta razão vamos dirigir a nossa atenção para um estudo mais pormenorizado de algumas ideias geométricas fundamentais.

Como já se afirmou no início deste livro, o cálculo e a geometria analítica estiveram sempre intimamente relacionados no decorrer do seu desenvolvimento histórico. Cada nova descoberta num dos assuntos conduzia a um progresso no outro. O problema do traçado de tangentes a curvas resolve-se com a descoberta da noção de derivada; o de área conduziu ao estabelecimento do integral; e as derivadas parciais foram introduzidas para estudar superfícies curvas no espaço. Juntamente com estas descobertas obtêm-se desenvolvimentos paralelos na mecânica e na física matemática. Em 1788 Lagrange publicava a sua obra prima, *Mecanique Analytique*, que pôs em evidência a grande flexibilidade e a enorme eficácia alcançada pelo uso de métodos analíticos no estudo da mecânica. Mais tarde, no século XIX, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) estabelecia a sua *Theory of Quaternions*, um novo método e um novo ponto de vista que muito contribuiu para a compreensão tanto da álgebra como da física. Os aspectos mais positivos da análise dos quaterniões e da geometria cartesiana fundiram-se mais tarde, graças em grande parte aos esforços de J. W. Gibbs (1839-1903) e O. Heaviside (1850-1925), para darem lugar a um novo domínio chamado *Álgebra Vectorial*. Rapidamente se aperceberam que os vectores eram os instrumentos ideais para a exposição sintética de muitas ideias importantes na geometria e na física. Será o objetivo deste capítulo o estudo de elementos de álgebra vectorial. As aplicações desta à geometria analítica far-se-ão no capítulo 13. No capítulo 14 faz-se uma combinação de álgebra vectorial com métodos do cálculo e dão-se aplicações quer no domínio da geometria quer da mecânica.

Existem fundamentalmente tres maneiras diferentes para se iniciar o estudo da álgebra vectorial: *geometricamente*, *analiticamente* e *axiomaticamente*. Na via geométrica os vectores são representados por segmentos de reta orientados ou por setas. As operações algébricas com vectores, tais como a adição, subtração e multiplicação por números reais, **são definidas e estudadas por métodos geométricos.**

No método analítico, os vectores e correspondentes operações são completamente descritos em termos de *números,* chamados as *componentes.* As propriedades das operações com vectores são então deduzidas a partir das propriedades correspondentes dos números. A descrição analítica dos vectores resulta naturalmente da descrição geométrica,desde que se introduza um sistema de coordenadas.

Na via axiomática não se faz qualquer tentativa para descrever um vector ou as operações algébricas com vectores. Pelo contrário, vectores e operações vectoriais são considerados como *conceitos não definidos,* relativamente aos quais nada sabemos a não ser que eles satisfazem a um certo conjunto de axiomas. Um tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se um *espaço linear* ou um *espaço vectorial linear.* Em todos os ramos da Matemática se encontram exemplos de espaços lineares e estudaremos alguns deles no capitulo 15. A álgebra dos segmentos de reta orientados e a álgebra dos vectores definidos pelas componentes são apenas dois exemplos de espaços lineares.

O estudo da álgebra vectorial de um ponto de vista axiomático é talvez o mais satisfatório matematicamente,uma vez que proporciona uma descrição dos vectores independentemente do sistema de coordenadas e de qualquer representação geométrica particular. Esse estudo é feito com algum pormenor no cap. 15. Neste capítulo fundamentamos o nosso estudo no método analítico e usamos também os segmentos de reta orientados para interpretarmos geométricamente muitos dos resultados. Sempre que possivel, apresentaremos as demonstrações por métodos independentes das representações dos vectores num dado sistema de coordenadas. Em resumo, este capítulo serve para nos familiarizarmos com exemplos concretos importantes de espaços vectoriais e igualmente para motivar o tratamento mais abstrato que se fará no capitulo 15.

12.2. O espaço vectorial dos N-sistemas de números reais

A ideia de utilizar um número para localizar um ponto sobre uma reta já era conhecida dos antigos gregos. Em 1637 Descartes generalizou esta ideia, utilizando um par de números (a_1, a_2) para localizar um ponto no plano e um **terno** de números (a_1, a_2, a_3) para localizar um ponto no espaço. Os matemáticos A. Cayley (1821-1895) e H. G. Grassman (1808-1877) provaram que não era forçoso parar nos ternos de números para representar pontos. Podem muito naturalmente considerar-se um quaterno de números (a_1, a_2, a_3, a_4) ou, mais geralmente, um sistema de n números reais

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$. Um tal n-sistema diz-se um *ponto n-dimensional* ou um *vector n-dimensional,* sendo os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ as *coordenadas* ou *componentes* do vector. O conjunto de todos os vectores **n-dimensionais** formam o *espaço vectorial dos n-sistemas,* ou mais simplesmente um **n-espaço.** Representamo-lo por V_n.

O leitor pode, nesta altura, preguntar qual o interesse em considerar espaços de dimensão

superior a três. Uma resposta é que muitos problemas que implicam um grande número de equações simultâneas são mais fácilmente analisadas pela introdução de vectores num adequado n-espaço e substituindo todas aquelas equações por uma única equação vectorial. Outra vantagem é que ficamos aptos a tratar, duma vez, muitas propriedades comuns a espaços de uma, duas, três ou mais dimensões, isto é, propriedades independentes da dimensão do espaço. Isto está de acordo com o espírito da matemática moderna que pretende o desenvolvimento de amplos métodos para atacar problemas numa extensa frente.

Infelizmente as representações geométricas, que são um grande auxiliar na justificação de conceitos vectoriais quando $n = 1$, 2 e 3, não são possíveis quando $n > 3$; quer isto dizer que o estudo da álgebra vectorial em espaços com mais do que três dimensões deve fazer-se completamente por métodos analíticos.

Neste capítulo representamos habitualmente os vectores pelas letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$ e as componentes pelas correspondentes letras minúsculas $a, b, c, \ldots$. Assim, escrevemos

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Para dotar V_n com uma estrutura algébrica definimos a *igualdade* de vectores e duas operações com vectores **chamadas** a *adição* e ***multiplicação** por um escalar*. A palavra "escalar" é aqui usada como sinónimo de "número real".

DEFINIÇÃO. *Dois vectores A e B dizem-se iguais sempre que as correspondentes componentes coincidem, isto é, se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, a igualdade vectorial $A = B$ significa exatamente o mesmo que as n igualdades escalares*

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n.$$

A soma $A + B$ define-se como o vector obtido por adição das correspondentes componentes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Se c é um escalar, define-se cA como sendo o vector obtido por multiplicação de cada componente de A por c

$$cA = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

A partir desta definição é fácil verificar as seguintes propriedades destas operações.

TEOREMA 12.1. *A adição vectorial é comutativa*

$$A + B = B + A,$$

e associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

A multiplicação por escalares é associativa

$$c(dA) = (cd)A$$

e satisfaz às duas propriedades distributivas

$$c(A + B) = cA + cB, \qquad e \qquad (c + d)A = cA + dA .$$

A demonstração destas propriedades é uma consequência imediata da definição e deixa-se ao leitor como um exercício simples.

O vector de componentes todas nulas diz-se *o vector nulo*, e representa-se por O. Goza de propriedades de que $A + O = A$ qualquer que seja A, o que significa que O é o elemento neutro para a adição vectorial. O vector $(-1)A$, também representado por $-A$, chama-se o *simétrico* de A. Escrevemos também $A - B$ em vez de $A + (-B)$ e chamamos-lhe a *diferença* de A e B . A igualdade $(A + B) - B = A$ mostra que a subtracção é a inversa da adição. Observe-se que $OA = O$ e $1A = A$.

O leitor já terá notado a semelhança entre vectores no 2-espaço e os números complexos. Ambos são definidos por pares ordenados de números reais e ambos se adicionam exatamente do mesmo modo. Assim, pelo que respeita à adição, os números complexos e os vectores bidimensionais são algebricamente indistinguíveis. Só se diferenciam quando introduzimos a multiplicação.

A multiplicação de números complexos dá ao sistema destes números o conjunto de propriedades relativas aos axiomas de corpo possuídas pelos números reais. Pode demonstrar-se (embora a demonstração seja difícil) que excepto para $n = 1$ e 2, não é possível definir a multiplicação em V_n de maneira que satisfaça a todas as propriedades dos axiomas de corpo. Não obstante podem definir-se produtos especiais em V_n que não satisfaçam a todas as propriedades dos axiomas de corpo. Por exemplo na seção 12.5 vamos considerar o *produto escalar* de dois vectores de V_n. O resultado desta operação é um escalar e não um vector. Outro produto, chamado *produto vectorial*, é estudado na seção 13.9. Esta multiplicação define-se unicamente no espaço V_3. O resultado é sempre um vector, mas o produto vectorial é não comutativo.

12.3. Interpretação geométrica para $n \leqslant 3$

Embora as definições dadas atrás estejam completamente divorciadas da geometria, os vectores e as operações vectoriais são susceptíveis duma interpretação geométrica interessante para o caso de espaços de dimensão igual ou menor que três. Vamos efetuar as representações geométricas num espaço bidimensional e deixamos ao leitor a tarefa de as viszualizar num espaço tridimensional ou unidimensional.

Um par de pontos A e B chama-se *vector geométrico* se um dos pontos, seja A, é a *origem* e o outro, B, é a *extremidade*. Representamos este vector por uma seta de A até B, como se mostra na fig. 12.1 e escrevemos $\overrightarrow{AB}$.

Os vectores geométricos são especialmente uteis para representar certas quantidades físicas tais como força, deslocamento, velocidade, e aceleração que possuem uma grandeza uma direção e um sentido. O comprimento do segmento AB é uma medida da grandeza e a ponta da seta indica o sentido sobre a direção definida pelo segmento.

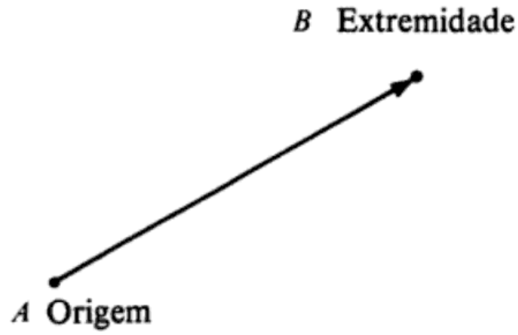

Fig. 12.1. O vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ de A até B.

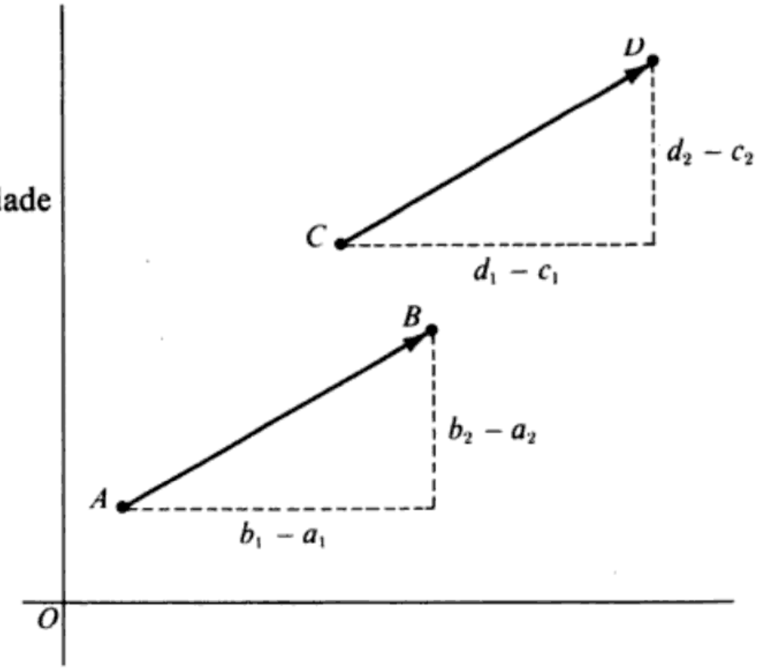

Fig. 12.2. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes porque $B - A = D-C$.

Suponhamos que definimos um sistema de coordenadas com origem em O. A fig. 12.2. mostra dois vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ com $B - A = D - C$. Relativamente às componentes isto significa que

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \qquad \text{e} \qquad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \,.$$

Observando os triângulos iguais da fig. 12.2 verificamos que as setas representando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tem comprimentos iguais, são paralelas e têm o mesmo sentido. Chamamos a tais vectores ***equipolentes***, isto é, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é equipolente com $\overrightarrow{CD}$ sempre que

$$B - A = D - C \,. \tag{12.1}$$

Repare-se que os quatro pontos $A, B, C, D,$ são vértices de um paralelogramo. (Ver figura 12.3). A igualdade (12.1) pode também escrever-se $A + D = B + C$ que nos diz que *vértices opostos dum paralelogramo têm a mesma soma*. Em particular, se um dos vértices, por exemplo A, é a origem 0, como na fig. 12.4, o vector geométrico de 0 até ao vértice oposto D corresponde ao vector soma $D = B + C$. Exprime-se este fato dizendo que o vector soma corresponde geometricamente à adição de vectores geométricos pela *regra do paralelogramo*. A importância dos vectores na física provém do fato notável de que muitas grandezas físicas (tais como força, velocidade e aceleração) se combinam por meio da regra do paralelogramo.

Por comodidade de notação utilizaremos o mesmo símbolo para representar um ponto de V_n (quando $n \leq 3$) e o vector geométrico definido pela origem O e por esse ponto. Assim escrevemos A em vez de $\overrightarrow{OA}$, B em vez de $\overrightarrow{OB}$, etc. Por vezes escrevemos também A no lugar

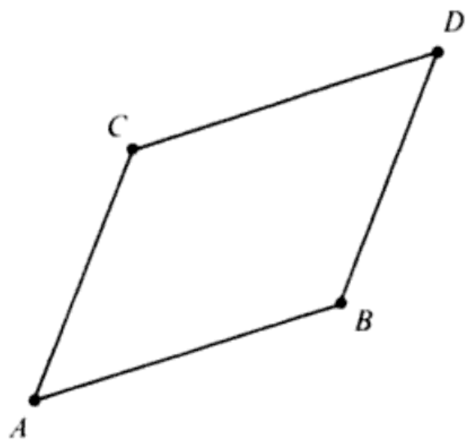

Fig. 12.3. Vértices opostos de um paralelogramo tem a mesma soma $A + D = B + C$.

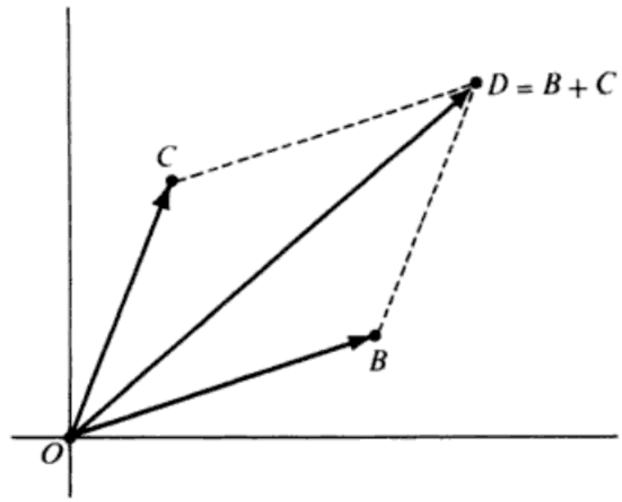

Fig. 12.4. Adição de vectores interpretada geometricamente pela regra do paralelogramo.

de qualquer vector geométrico equipolente a $\overrightarrow{OA}$. Por exemplo a fig. 12.5 representa geometricamente a subtração de vectores. Dois vectores geométricos estão designados por $B - A$, mas estes vectores são equivalentes. Eles têm a mesma grandeza, a mesma direção e o mesmo sentido.

A fig. 12.6 representa geometricamente a multiplicação por escalares. Se $B = cA$, o vector geométrico B tem grandeza igual a $|c|$ vezes a grandeza de A; tem a mesma direção que A e o mesmo sentido se c é positivo e o sentido contrário se c é negativo.

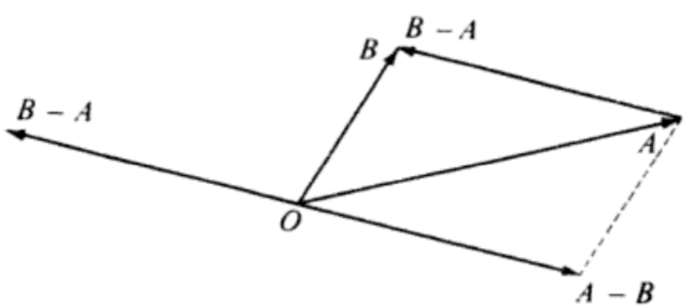

Fig. 12.5. Representação geométrica da subtração de vectores.

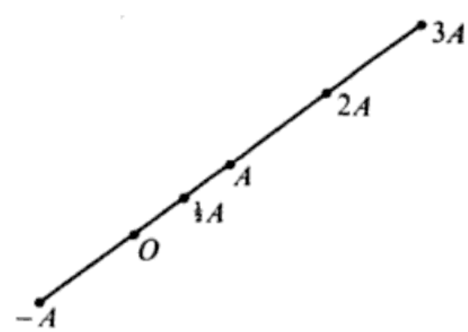

Fig. 12.6. Multiplicação de vectores por escalares.

A interpretação geométrica de vectores em V_n para $n \leq 3$ sugere uma maneira de definir paralelismo num espaço de dimensão n qualquer.

Definição. *Dois vectores A e B de V_n dizem-se paralelos se $B = cA$ para algum c não nulo. Tem o mesmo sentido se $B = cA$ para algum escalar positivo c e o sentido contrário se $B = cA$ para algum escalar negativo c.*

enquanto que o segundo membro é

$$(\|A\| + \|B\|)^2 = \|A\|^2 + 2\|A\| \, \|B\| + \|B\|^2 .$$

Comparando estas duas fórmulas vemos que (12.5) verifica-se se e somente se

$$A \cdot B \leq \|A\| \, \|B\| . \tag{12.6}$$

Mas $A \cdot A \leq |A \cdot B|$ pelo que (12.6) resulta da desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma (12.4). Podemos assim afirmar que a desigualdade triangular é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A posição inversa é também verdadeira, isto é, se a desigualdade triangular se verifica, também se verifica (12.6) para A e para $-A$, donde se obtém (12.3). Se a igualdade se verifica em (12.5), então $A \cdot B = \|A\|\|B\|$, pelo que $B = cA$ para algum escalar c. Por conseguinte $A \cdot B = c\|A\|^2$ e $\|A\|\|B\| = |c|\|A\|^2$. Se $A \neq 0$ isto implica que $c = |c| \geq 0$. Se $B \neq 0$ então $B = cA$ com $c > 0$.

A desigualdade triangular está representada geometricamente na fig. 12.9 e nessa representação geométrica estabelece que o comprimento de um lado de um triângulo não pode exceder a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

12.7. Ortogonalidade de vectores

No decorrer da demonstração da desigualdade triangular (Teorema 12.5) obtivemos a fórmula

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B \tag{12.7}$$

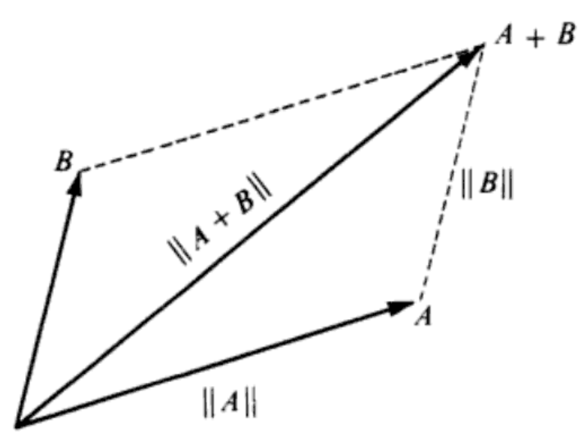

Fig. 12.9. Significado geométrico da desigualdade triangular $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

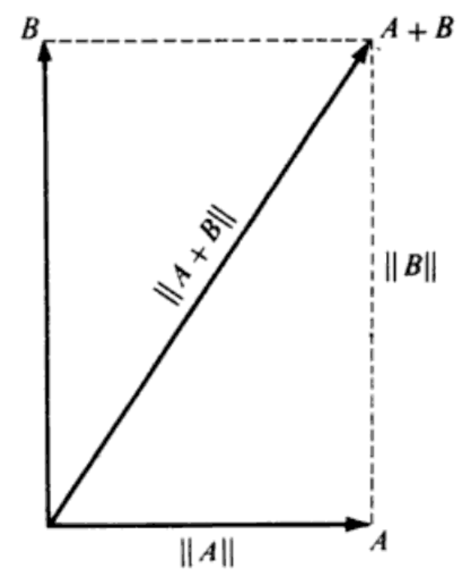

Fig. 12.10. Dois vectores perpendiculares satisfazem à identidade de Pitágoras $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$.

que é válida para dois quaisquer vectores A e B de V_n. A fig. 12.10 representa dois vectores geométricos perpendiculares no plano. Eles definem um triângulo rectângulo de lados $\|A\|$ e $\|B\|$ e cuja hipotenusa mede $\|A + B\|$. O teorema de Pitágoras estabelece que

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 .$$

Comparando este resultado com (12.7) vemos que $A \cdot B = 0$. Por outras palavras, o produto escalar de dois vectores perpendiculares ou ortogonais no plano é zero. Esta propriedade proporciona uma definição de ortogonalidade de vectores de V_n.

DEFINIÇÃO. *Dois vectores A e B de V_n dizem-se ortogonais se $A \cdot B = 0$.*

A igualdade (12.7) mostra que dois vectores A e B de V_n são ortogonais se e somente se $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$. Esta é a chamada identidade de Pitágoras em V_n.

12.8. Exercícios

1. Sejam $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 2, -3, 0)$ e $C = (0, 1, 0, 1)$ três vectores de V_4. Calcular cada um dos seguintes produtos escalares:
(a) $A \cdot B$; (b) $B \cdot C$; (c) $A \cdot C$; (d) $A \cdot (B + C)$; (e) $(A - B) \cdot C$.
2. São dados três vectores $A = (2, 4, -7)$, $B = (2, 6, 3)$ e $C = (3, 4, -5)$. Em cada uma das expressões seguintes existe uma e uma só maneira de inserir os parêntesis de modo a obter expressões providas de significado. Inserir os parêntesis e efetuar as operações indicadas.
(a) $A \cdot BC$; (b) $A \cdot B + C$; (c) $A + B \cdot C$; (d) $AB \cdot C$; (e) $A/B \cdot C$.
3. Dizer se é ou não correcta a seguinte proposição relativa a vectores de V_n: Se $A \cdot B = A \cdot C$ e $A \neq O$ então $B = C$.
4. Dizer se é ou não correta a seguinte proposição relativa a vectores de V_n: Se $A \cdot B = 0$ para cada B, então $A = O$.
5. Se $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, -1, 2)$ determinar um vector não nulo C de V_3 tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.
6. Se $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$, determinar escalares x e y tais que $C = xA + yB$ é um vector não nulo com $C \cdot B = 0$.
7. Se $A = (2, -1, 2)$ e $B = (1, 2, -2)$, determinar dois vectores C e D de V_3 verificando as seguintes condições: $A = C + D$, $B \cdot D = 0$, C paralelo a B.
8. Se $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$, determinar dois vectores C e D de V_5 verificando todas as condições seguintes: $B = C + 2D$, $D \cdot A = 0$, C paralelo a A.
9. Sejam $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, -2, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$ três vectores de V_3. Calcular a norma de cada um dos seguintes vectores.
(a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + B - C$; (d) $A - B + C$.

10. Em cada alínea determinar um vector B de V_2 tal que $B \cdot A = 0$ e $\|B\| = |=A\|$ se: (a) $A = (1, 1)$; (b) $A = (1, -1)$; (c) $A = (2, -3)$; (d) $A = (a, b)$.
11. Sejam $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$ dois vectores de V_3. Em cada alínea determinar um vector C de comprimento 1 paralelo a: (a) $A + B$; (b) $A - B$; (c) $A + 2B$; (d) $A - 2B$; (e) $2A - B$.
12. Sejam $A = (4, 1, -3)$; $B = (1, 2, 2)$; $C = (1, 2, -2)$, $D = (2, 1, 2)$ e $E = (2, -2, -1)$ vectores de V_3. Determinar todos os pares de vectores ortogonais.
13. Determinar todos os vectores de V_2 que são ortogonais a A e têm o mesmo comprimento que A se: (a) $A = (1, 2)$; (b) $A = (1, -2)$; (c) $A = (2, -1)$; (d) $A = (-2, 1)$.
14. Se $A = (2, -1, 1)$ e $B = (3, -4, -4)$ determinar um ponto C no 3-espaço tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.
15. Se $A = (1, -1, 2)$ e $B = (2, 1, -1)$ determinar um vector não nulo C em V_3 ortogonal a A e B.
16. Sejam $A = (1, 2)$ e $B(3, 4)$ dois vectores de V_2. Determinar vectores P e Q em V_2 tais que $A = P + Q$, P é paralelo a B e Q ortogonal a B.
17. Resolver o Exercício 16 se os vectores estão em V_4, com $A = (1, 2, 3, 4)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.
18. São dados os vectores $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (1, 1, -2)$ de V_3. Encontrar cada vector D da forma $xB + yC$, o qual é ortogonal a A e tem comprimento 1.
19. Provar que para dois vectores A e B de V_n se tem a identidade

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B,$$

e por isso $A \cdot B = 0$ se o só se $\|A + B\| = \|A - B\|$. Quando isto é interpretado geometricamente em V_2, significa que as diagonais de um paralelogramo têm comprimento igual se e somente se o paralelogramo for un retângulo.
20. Provar que para quaisquer dois vectores A e B de V_n se tem

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\,\|A\|^2 + 2\,\|B\|^2 .$$

Que teorema relativo às diagonais e lados de um paralelogramo se pode deduzir desta identidade?
21. O teorema de geometria enunciado a seguir sugere uma identidade vectorial relativa a três vectores A, B e C. Dizer qual é a identidade e provar que se verifica para vectores de V_n. Tal identidade proporciona uma demonstração do teorema por métodos vectoriais.

"A soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero qualquer excede a soma dos quadrados das diagonais em quatro vezes o quadrado do comprimento do segmento de reta que une os pontos médios das diagonais".
22. Um vector A de V_n tem comprimento 6. Um vector B de V_n tem a propriedade de que, para todo o par de escalares x e y, os vectores $xA + yB$ e $4yA - 9xB$ são ortogonais. Calcular os comprimentos de B e de $2A + 3B$.
23. Dados os vectores $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ de V_5 achar os vectores

C e D que satisfaçam às três condições seguintes: C é paralelo a A, D é ortogonal a A, e $B = C + D$.

24. Dados em V_n dois vectores A e B não nulos e não paralelos, demonstrar que existem vectores C e D em V_n que satisfazem as três condições do Exercício 23 e exprimir C e D em função de A e B.
25. Dizer se é ou não correta cada uma das seguintes proposições referentes a vectores de V_n:
    (a) Se A é ortogonal a B, então $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo o real x.
    (b) Se $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo o x real, então A é ortogonal a B.

12.9. Projeções. Ângulo de dois vectores num espaço n dimensional

O produto escalar de dois vectores em V_2 admite uma interpretação geométrica importante. A fig. 12.11 (a) representa dois vectores geométricos não nulos A e B fazendo entre si um ângulo θ. Neste exemplo temos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A figura 12.11 (b) mostra o mesmo vector A e dois vectores perpendiculares cuja soma é A. Um deles, tB, é o produto de B por um escalar, chamamos-lhe *a projeção de A sobre B*. Neste exemplo t é positivo porque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

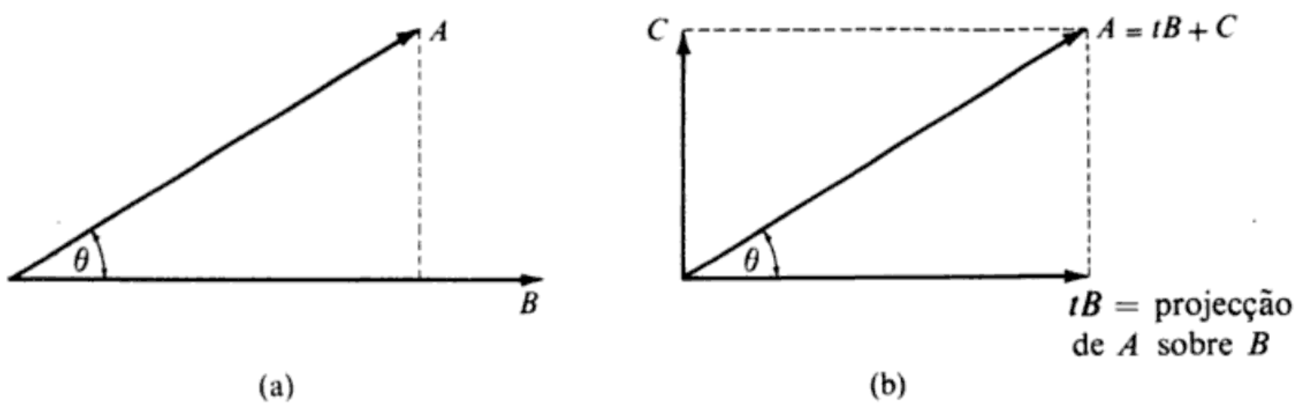

Fig. 12.11. O vector tB é a projeção de A sobre B.

Podemos utilizar o produto escalar para exprimir t em termos de A e B. Em primeiro lugar escrevemos $tB + C = A$ e multiplicamos escalarmente ambos os membros por B obtendo

$$tB \cdot B + C \cdot B = A \cdot B.$$

Mas $C \cdot B = 0$, porque C é perpendicular a B. Portanto $tB \cdot B = A \cdot B$ pelo que se tem

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}. \tag{12.8}$$

Por outro lado o escalar t origina uma relação simples com o ângulo θ. Da fig. 12.11(b) vemos que

Algumas vezes escreve-se sobre as letras uma seta, por exemplo $\vec{i}, \vec{j}$. O significado geométrico do Teorema 12.6 está representado na fig. 12.12 para $n = 3$.

Quando os vectores são expressos como combinações lineares dos vectores coordenados unitários, os cálculos algébricos relativos a vectores podem ser efetuados com as somas $\Sigma\, x_k E_k$ de acordo com as regras usuais da Álgebra. As várias componentes podem ser reconhecidas nas várias fases do Cálculo, considerando os coeficientes dos vectores unitários coordenados. Por exemplo para somarmos dois vectores, sejam $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, escrevemos

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\,, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} b_k E_k\,,$$

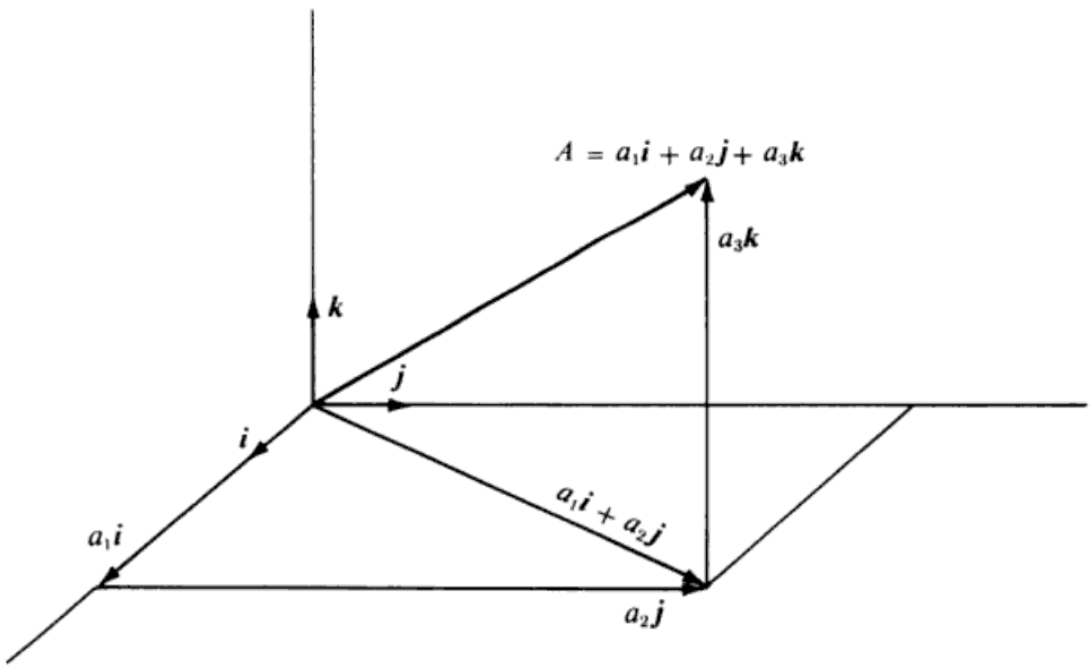

Fig. 12.12. Um vector A de V_3 expresso como uma combinação linear de $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

e aplicamos a propriedade da linearidade das somas finitas para obtermos

$$A + B = \sum_{k=1}^{n} a_k E_k + \sum_{k=1}^{n} b_k E_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) E_k\,.$$

O coeficiente de E_k no segundo membro é a componente de ordem k da soma $A + B$.

12.11. Exercícios

1. Determinar a projeção de A sobre B se $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 2, 2)$.
2. Determinar a projeção de A sobre B se $A = (4, 3, 2, 1)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.

15. Suponhamos que em V_2 definimos o produto escalar de dois vectores $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pela fórmula

$$A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 .$$

Provar que todas as propriedades do **Teorema** 12.2 são válidas com esta definição do produto escalar. Será a desigualdade de Cauchy-Schwarz ainda válida?

16. Resolver o Exercício 15 se o produto escalar de dois vectores de V_3, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, fôr definido pela fórmula $A \cdot B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_3 + a_3b_1$.

17. Suponhamos que em vez de se definir a norma dum vector $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pela fórmula $(A \cdot A)^{1/2}$, consideramos a seguinte definição

$$\|A\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

(a) Provar que esta definição da norma satisfaz a todas as propriedades dos Teoremas 12.4 e 12.5.

(b) Usar esta definição em V_2 e representar numa figura o conjunto de todos os pontos (x, y) de norma 1.

(c) Quais as propriedades dos **Teorema** 12.4 e 12.5 que permaneceriam válidas se usassemos a definição

$$\|A\| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| ?$$

18. Suponhamos que a norma dum vector $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ era definida pela fórmula

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k| ,$$

onde o símbolo do segundo membro significa o máximo dos n números $|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|$.

(a) Quais as propriedades dos **Teoremas** 12.4 e 12.5 que serão válidas com esta definição?

(b) Utilizar esta definição da norma em V_2 e representar numa figura o conjunto de todos os pontos (x, y) de norma 1.

19. Se $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ é um vector de V_n, definir duas normas do modo seguinte:

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{e} \qquad \|A\|_2 = \max_{1 \le k \le n} |a_k| .$$

Provar que $\|A\|_2 \le \|A\| \le \|A\|_1$. Interpretar geometricamente esta desigualdade no plano.

20. Se A e B são dois pontos num espaço a n dimensões, a distância de A a B representa-se por $d(A, B)$ e é definida pela igualdade $d(A, B) = \|A - B\|$. Provar que a distância tem as seguintes propriedades:

vem na mesma ordem. Subentende-se igualmente que a implicação (12.10) é válida para uma ordenação previamente fixada, mas arbitrária, dos vectores $A_1, A_2, ..., A_k$.

TEOREMA 12.7. *Um conjunto S gera todo o vector de L(S) duma única maneira se e só se S gerar o vector nulo duma única maneira.*

Demonstração. Se S gera todo o vector de $L(S)$ duma única maneira, então certamente gera O de modo único. Para provar a inversa supomos que S gera O dum único modo e escolhemos qualquer vector X em $L(S)$. Admitamos que S gerava X de duas maneiras diferentes, por exemplo

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i \qquad \text{e} \qquad X = \sum_{i=1}^{k} d_i A_i \,.$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades, encontramos que $O = \sum_{i=1}^{k} (c_i - d_i) A_i$. Mas porque S gera O duma maneira única, devemos ter $c_i - d_i = 0$ para todo i, pelo que S gera X de modo único.

12.13. Independência linear

O Teorema 12.7 põe em destaque a importância dos conjuntos que geram o vector zero duma única maneira. Tais conjuntos distinguem-se com uma designação especial.

DEFINIÇÃO. *Um conjunto $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ que gera o vector nulo duma maneira única diz-se um conjunto linearmente independente de vectores. Caso contrário S diz-se linearmente dependente.*

Por outras palavras, *independência* significa que S gera O unicamente na representação trivial:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \quad \text{implica todo } c_i = 0.$$

Dependência significa que S gera O de alguma maneira não trivial, isto é, para certa escolha de escalares $c_1, ..., c_k$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O \quad \text{mas nem todos os } c_i \text{ são nulos}$$

Embora a dependência e independência sejam propriedades dos *conjuntos* de vectores, é prática comum aplicar estas designações aos próprios vectores. Por exemplo, os vectores num conjunto linearmente independente designam-se, correntemente, por vectores linearmente independentes. Convencionamos também chamar o conjunto vazio um conjunto linearmente independente.

Os exemplos dados a seguir podem servir para proporcionar uma melhor compreensão da ideia de dependência e independência linear.

EXEMPLO 1. Se um subconjunto T dum conjunto S é linearmente dependente, então S é também linearmente dependente, porque se T gera O não trivialmente com S acontece o mesmo. Isto é logicamente equivamente à afirmação de que todo o subconjunto dum conjunto linearmente independente é linearmente independente.

EXEMPLO 2. Os n vectores coordenados unitários $E_1, E_2, ..., E_n$ de V_n geram O duma única maneira pelo que são linearmente independentes.

EXEMPLO 3. Qualquer conjunto contendo o vector nulo é dependente. Por exemplo se $A_1 = O$ temos a representação não trivial $O = 1\ A_1 + 0\ A_2 + ... + 0\ A_k$.

EXEMPLO 4. O conjunto $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ de vectores de V_2 é linearmente dependente porque a partir deles temos a seguinte representação não trivial do vector nulo.

$$O = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (-1)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

Neste exemplo o subconjunto $T = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ é linearmente dependente. O terceiro vector, $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, pertence ao subespaço de T. O teorema seguinte mostra que se juntarmos a $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ qualquer vector pertencente ao subespaço de T, obtemos um conjunto dependente.

TEOREMA 12.8. *Seja $S = \{A_1, ..., A_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores em V_n e seja L(S) o subespaço linear de S. Então todo o conjunto de k + 1 vectores de L(S) é linearmente dependente.*

Demonstração. A demonstração faz-se por indução em k, o número de vectores de S. Suponhamos primeiramente $k = 1$. Então, por hipótese, S é formado por um só vector, seja A_1, com $A_1 \neq O$ uma vez que S é independente. Consideremos em seguida dois quaisquer vectores distintos B_1 e B_2 de $L(S)$. Então cada um deles será um multiplo escalar de A_1, isto é, $B_1 = c_1A_1$ e $B_2 = c_2A_1$, com c_1 e c_2 não ambos nulos. Multiplicando B_1 por c_2 e B_2 por c_1 e subtraindo, encontramos

$$c_2B_1 - c_1B_2 = O\ .$$

Isto é uma representação não trivial de O pelo que B_1 e B_2 são dependentes. Está pois demonstrado o teorema quando $k = 1$.

Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para $k - 1$ e provemos que é também verdadeiro para k. Tomemos qualquer conjunto de $k + 1$ vectores em $L(S)$, por exemplo $T = \{B_1, B_2, ..., B_{k+1}\}$. Desejamos provar que T é linearmente dependente. Visto que cada B_i

está em $L(S)$, podemos escrever

$$B_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} A_j \tag{12.11}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. Examinemos todos os escalares a_{i1} que multiplicam A_1 e dividamos a demonstração em duas partes conforme todos os coeficientes sejam 0 ou não.

CASO 1. $a_{i1} = 0$ para todo o $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. Neste caso a soma em (12.11) não contém A_1 pelo que cada B_i em T está no subespaço linear gerado pelo conjunto $S' = \{A_2, A_3, \ldots, A_k\}$. Mas S' é linearmente independente e é formado por $k - 1$ vectores. Pela hipótese da indução, o teorema é verdadeiro para $k - 1$, pelo que o conjunto T é dependente. Isto demonstra o teorema no caso 1.

CASO 2. Nem todos os escalares a_{i1} são nulos. Suponhamos que $a_{11} \neq 0$. (Se necessário podemos voltar a numerar os B para que assim seja). Tomando $i = 1$ na equação (12.11) e multiplicando ambos os membros por c_i, onde $c_i = a_{i1}/a_{11}$, obtemos

$$c_i B_1 = a_{i1} A_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} A_j \,.$$

Subtraindo (12.11) à igualdade anterior resulta

$$c_i B_1 - B_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) A_j \,,$$

para $i = 2, \ldots, k + 1$. Esta igualdade exprime cada um dos k vectores $c_i B_1 - B_i$ como uma combinação linear de $k - 1$ vectores linearmente independentes $A_2, \ldots, A_k$. Pela hipótese de indução, os k vectores $c_i B_1 - B_i$ devem ser dependentes. Por conseguinte, para uma certa escolha dos escalares $t_2, \ldots, t_{k+1}$, não todos nulos, temos

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i B_1 - B_i) = O \,,$$

onde resulta

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i \right) B_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i B_i = O \,.$$

Mas esta é uma combinação linear não trivial de $B_1, \ldots, B_{k+1}$ que representa o vector nulo, pelo que os vectores $B_1, \ldots, B_{k+1}$ devem ser dependentes, estando assim completada a demonstração.

Demonstramos a seguir que o conceito de ortogonalidade está intimamente relacionado com o de independencia linear.

DEFINIÇÃO. *Um conjunto $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ de vectores de V_n diz-se um conjunto ortogonal se $A_i \cdot A_j = 0$ sempre que $i \neq j$. Por outras palavras, dois quaisquer vectores distintos de um conjunto ortogonal são perpendiculares.*

TEOREMA 12.9. *Qualquer conjunto ortogonal $S = \{A_1, ..., A_k\}$ de vectores não nulos em V_n é linearmente independente. Além disso, se S gera um vector X, por exemplo*

$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i , \tag{12.12}$$

então os coeficientes escalares $c_1, \ldots, c_k$ são dados pela fórmula

$$c_j = \frac{X \cdot A_j}{A_j \cdot A_j} \quad \textit{para } j = 1, 2, \ldots, k . \tag{12.13}$$

Demonstração. Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que S é linearmente independente. Suponhamos que $\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = O$. Multiplicando escalarmente ambos os membros por A_1 e tendo em conta que $A_1 \cdot A_i = 0$ para $i \neq 1$, encontramos $c_1 (A_1 \cdot A_1) = 0$. Mas $(A_1 \cdot A_1) \neq 0$ visto que $A_1 \neq O$, pelo que $c_1 = 0$. Repetindo este raciocínio, com A_1 substituido por A_j, concluímos que cada $c_j = 0$. Por conseguinte S gera o vector nulo duma maneira única, pelo que S é linearmente independente.

Suponhamos agora que S gera X como em (12.12). Efetuando o produto escalar de X por A_j, encontramos que $c_j(A_j \cdot A_j) = X \cdot A_j$ de onde se obtém (12.13).

Se todos os vectores $A_1, A_2, ..., A_k$ do Teorema 12.9 têm norma 1, a fórmula para os coeficientes simplifica-se vindo apenas

$$c_j = X \cdot A_j .$$

Um conjunto ortogonal de vectores $\{A_1, ..., A_k\}$, cada um dos quais com norma 1, diz-se um conjunto *ortonormado.* O conjunto dos vectores coordenados unitários $E_1, ..., E_n$ é um exemplo dum conjunto ortonormado.

12.14. Bases

É natural estudar o conjunto de vectores que geram todo o vector de V_n duma maneira única. Tais conjuntos de vectores constituem *bases* de V_n.

Definição. *Um conjunto* $S = \{A_1, ..., A_k\}$ *de vectores de* V_n *diz-se uma base para* V_n *se* S *gera cada vector de* V_n *duma maneira única. Se, em complemento,* S *é ortogonal, então* S *diz-se uma base ortogonal.*

Assim, uma base é um conjunto linearmente independente de vectores o qual gera todo o espaço V_n. O conjunto de vectores coordenados unitários é um exemplo dessas bases. Esta base particular é também uma base ortogonal. Provaremos a seguir que cada base conterá o mesmo número de elementos.

Teorema 12.10. *Num dado espaço vectorial* V_n, *as bases gozam das seguintes proprieadades:*

(a) *Toda a base contém exatamente n vectores.*

(b) *Qualquer conjunto de vectores linearmente independente é um subconjunto de certa base.*

(c) *Qualquer conjunto de n vectores linearmente independente é uma base.*

Demonstração. O conjunto dos vectores coordenados unitários $E_1, ..., E_n$ formam uma base de V_n. Se provarmos que duas quaisquer bases contêm o mesmo número de vectores demonstramos (a).

Sejam S e T duas bases, em que S tem k vectores e T tem r vectores. Se $r > k$, então T contém pelo menos $k + 1$ vectores em $L(S)$, visto que $L(S) = V_n$. Deste modo, devido ao Teorema12.8, T deve ser linearmente dependente, contradizendo a afirmação de que T é uma base. Isto significa que não pode ser $r > k$, pelo que devemos ter $r \leq k$. Aplicando o mesmo raciocínio com S e T trocados, encontramos que $k \leq r$. Por conseguinte $k = r$ e a alínea (a) está demonstrada.

Para demonstrar (b), seja $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ qualquer conjunto de vectores linearmente independentes em V_n. Se $L(S) = V_n$, então S é uma base. Caso contrário existe algum vector X em V_n o qual não está em $L(S)$. Juntemos este vector a S e consideremos o novo conjunto $S' = \{A_1, ..., A_k, X\}$. Se este conjunto fosse dependente, existiriam escalares $c_1, ..., c_{k+1}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i + c_{k+1} X = O \, .$$

Mas $c_{k+1} \neq 0$, visto que $A_1, ..., A_k$ são independentes, e portanto podemos resolver esta equação relativamente a X e verificar que $X \in L(S)$, em contradição, pois, com a hipótese de que X não pertencia a $L(S)$. Portanto o conjunto S' é linearmente independente, mas contém $k +$ $+ 1$ vectores. Se $L(S') = V_n$, S' é uma base e visto que S é um subconjunto de S', a alínea (b) está demonstrada. Se S' não é uma base, podemos argumentar com S' como o fizemos com S, obtendo um novo conjunto S'' que contém $k + 2$ vectores e é linearmente independente. Se S'' é uma base, (b) está demonstrada. Caso contrário, repetimos o processo. Devemos chegar a uma base ao fim dum número finito de repetições do processo, de outro modo obteríamos um conjunto independente com $n + 1$ vectores, em contradição com o Teorema 12.8. Portanto a alínea (b) está demonstrada.

Finalmente, utilizando as alíneas (a) e (b) demonstramos (c). Seja S qualquer conjunto linearmente independente formado por n vectores. Pela alínea (b), S é um subconjunto de certa base, por exemplo B. Mas devido a (a) a base B tem precisamente n elementos, pelo que $S = B$.

12.15. Exercícios

1. Sejam $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ os vectores coordenados unitários de V_2. Em cada alínea determinar os escalares x e y tais que $x(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + y(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ é igual a
(a) $\boldsymbol{i}$; (b) $\boldsymbol{j}$; (c) $3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$; (d) $7\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$.
2. Se $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$ e $C = (2, -3)$ são três vectores de V_2, determinar escalares x e y tais que $C = xA + yB$. Quantos pares existem?
3. Se $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (2, -11, 7)$ são três vectores em V_3, determinar os escalares x e y tais que $C = xA + yB$.
4. Provar que o Exercício 3 não tem qualquer solução, se C é substituído pelo vector $(2, 11, 7)$.
5. Sejam A e B dois vectores não nulos de V_n.
(a) Se A e B são paralelos, provar que A e B são linearmente dependentes.
(b) Se A e B não são paralelos, provar que A e B são linearmente independentes.
6. Se (a, b) e (c, d) são dois vectores de V_2, provar que eles são linearmente independentes se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.
7. Determinar todos os reais t para os quais os dois vectores $(1 + t, 1 - t)$ e $(1 - t, 1 + t)$ de V_2 são linearmente independentes.
8. Sejam $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, os vectores unitários coordenados de V_3. Provar que os quatro vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ são linearmente dependentes, mas que quaisquer três dentre eles são linearmente independentes.
9. Sejam $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ vectores coordenados unitários em V_2 e seja $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$.
(a) Provar que S é linearmente independente.
(b) Provar que $\boldsymbol{j}$ está no subespaço linear de S.
(c) Exprimir $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ como numa combinação linear de $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.
(d) Provar que $L(S) = V_2$.
10. Consideremos os três vectores $A = \boldsymbol{i}$, $B = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $C = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ em V_3.
(a) Provar que o conjunto $\{A, B, C\}$ é linearmente independente.
(b) Exprimir cada um dos vectores $\boldsymbol{i}$ ou $\boldsymbol{k}$ como uma combinação linear de A, B e C.
(c) Exprimir $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ como uma combinação linear de A, B e C.
(d) Provar que $\{A, B, C\}$ é uma base de V_3.
11. Sejam $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$, $C = (2, -3)$ e $D = (1, -2)$ quatro vectores de V_2. Enumerar todos os subconjuntos não vazios de $\{A, B, C, D\}$ que são linearmente independentes.
12. Seja $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 0, 0)$ três vectores de V_4.
(a) Determinar se A, B, C são linearmente dependentes ou independentes.

(b) Obter um vector D não nulo tal que A, B, C, D sejam dependentes.
(c) Obter um vector E tal que A, B, C, E sejam independentes.
(d) Escolhido E da alínea (c), exprimir o vector $X = (1, 2, 3, 4)$ como uma combinação linear de A, B, C, E.

13. (a) Provar que os seguintes três vectores de V_3 são linearmente independentes: $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1. \sqrt{3}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{3})$.
(b) Provar que os três seguintes são dependentes: $(\sqrt{2}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$, $(0, 1, \sqrt{2})$.
(c) Determinar todos os reais t para os quais os três vectores seguintes em V_3 são dependentes: $(t, 1, 0)$, $(1, t, 1)$, $(0, 1, t)$.
14. Considerar os seguintes conjuntos de vectores de V_4. Para cada alínea determinar um subconjunto linearmente independente contendo o maior número de vectores possível.
(a) $\{(1, 0, 1, 0),\ \ (1, 1, 1, 1),\ \ (0, 1, 0, 1),\ \ (2, 0, -1, 0)\}$.
(b) $\{(1, 1, 1, 1),\ \ (1, -1, 1, 1),\ \ (1, -1, -1, 1),\ \ (1, -1, -1, -1)\}$.
(c) $\{(1, 1, 1, 1),\ \ (0, 1, 1, 1),\ \ (0, 0, 1, 1),\ \ (0, 0, 0, 1)\}$.
15. Dado três vectores linearmente independentes A, B, C de V_n. Dizer se são ou não corretas cada uma das proposições seguintes.
(a) $A + B, B + C, A + C$ são linearmente independentes.
(b) $A - B, B + C, A + C$ são linearmente independentes.
16. (a) Provar que o conjunto S de três vectores em V_3 é uma base para V_3 se e só se o seu subespaço linear $L(S)$ contém os três vectores coordenados unitários $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
(b) Estabelecer e demonstrar uma generalização da alínea (a) para V_n.
17. Determinar duas bases para V_3 contendo os dois vectores $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$.
18. Determinar duas bases para V_4 tendo somente os dois vectores $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, 1)$ em comum.
19. Considerar os seguintes conjuntos de vectores em V_3:
$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\}$, $\quad T = \{(2, 1, 0), (2, 0, -2)\}$, $\quad U = \{(1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$.
(a) Provar que $L(T) \subseteq L(S)$.
(b) Determinar todas as relações de inclusão entre os conjuntos $L(S)$, $L(T)$ e $L(U)$.
20. Sejam A e B dois subconjuntos finitos de vectores num espaço vectorial V_n, e sejam $L(A)$ e $L(B)$ os respetivos subespaços lineares. Provar cada uma das seguintes proposições:
(a) If $A \subseteq B$, então $L(A) \subseteq L(B)$.
(b) $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$.
(c) Dar um exemplo em que $L(A \cap B) \neq L(A) \cap L(B)$.

12.16. O espaço vectorial $V_n(C)$ dos n-sistemas de números complexos

Na seção 12.2 definiu-se o espaço vectorial V_n como o conjunto de todos os sistemas de n números reais (n-tuplos). Igualdade, adição vectorial, e multiplicação de vectores por escalares foram definidos em função dos componentes do modo seguinte: Se $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$, então

$$A = B \quad \text{significa} \quad a_i = b_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \qquad cA = (ca_1, \ldots, ca_n).$$

Se todos os escalares a_i, b_i e c nestas relações forem substituídos por números *complexos*, o novo sistema algébrico assim obtido diz-se *espaço vectorial complexo* e representa-se por $V_n(\mathbf{C})$. Aqui $\mathbf{C}$ é usado para nos lembrar que os escalares são complexos.

Uma vez que os números complexos satisfazem aos mesmos axiomas de corpo que os números reais, todos os teoremas relativos aos espaços vectoriais V_n que utilizam unicamente os axiomas de corpo dos números reais são também verdadeiros para $V_n(\mathbf{C})$, com tanto que todos os escalares possam ser complexos. Em particular, aqueles teoremas neste capítulo que implicam somente a adição vectorial e a multiplicação por escalares são também verdadeiros para $V_n(\mathbf{C})$.

Esta extensão não se faz unicamente por uma questão de generalização. Os espaços vectoriais complexos aparecem naturalmente na teoria das equações diferenciais lineares e na moderna mecânica quântica, pelo que o seu estudo assume uma considerável importância. Felizmente, muitos dos teoremas relativos ao espaço vectorial real V_n podem transportar-se, sem qualquer modificação, para $V_n(\mathbf{C})$. Contudo algumas modificações têm que ser feitas naqueles teoremas que incluem a noção de produto escalar. Ao provar que o produto escalar $A \cdot A$ dum vector não nulo por si próprio é positivo, apoiamo-nos no fato de que a soma de quadrados de números reais é positiva. Uma vez que o quadrado de números complexos pode ser negativo, temos que modificar a definição de $A \cdot B$ se desejamos conservar a propriedade de positividade. Para $V_n(\mathbf{C})$ usamos a seguinte definição de produto escalar.

Definição. *Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são dois vectores de $V_n(\mathbf{C})$, define-se o respetivo produto escalar $A \cdot B$ pela fórmula*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k ,$$

onde $\bar{b}_k$ é o complexo conjugado de b_k.

Observe-se que esta definição concorda com a dada anteriormente para V_n porque $\bar{b}_k = b_k$ quando b_k é real. As propriedades fundamentais do produto escalar, correspondentes às do Teorema 12.2, tomam agora a forma

Teorema 12.11. *Para todos os vectores A, B, C de $V_n(\mathbf{C})$ e todo o complexo escalar c, tem-se:*

(a) $A \cdot B = \overline{B \cdot A}$,
(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
(c) $c(A \cdot B) = (cA) \cdot B = A \cdot (\bar{c}B)$,
(d) $A \cdot A > 0$ *se* $A \neq O$,
(e) $A \cdot A = 0$ *se* $A = O$.

Todas estas propriedades são consequências imediatas da definição e as respetivas demonstrações são deixadas como exercício. O leitor deve ter presente que a conjugação aparece na propriedade (a) quando a ordem dos fatores é invertida. Igualmente aparece

6. (a) Provar que para dois quaisquer vectores A e B de $V_n(C)$, a soma $\overline{A \cdot B} + A \cdot B$ é real.
(b) Se A e B são vectores não nulos em $V_n(C)$, provar que

$$-2 \leq \frac{A \cdot B + \overline{A \cdot B}}{\|A\| \ \|B\|} \leq 2 .$$

7. Define-se o ângulo θ entre dois vectores A e B em $V_n(\mathbf{C})$ pela fórmula

$$\theta = \operatorname{arccos} \frac{\frac{1}{2}(A \cdot B + \overline{A \cdot B})}{\|A\| \ \|B\|} .$$

A desigualdade no Exercício 6 mostra que existe sempre um único ângulo θ no intervalo fechado $0 \leq \theta \leq \pi$ verificando aquela igualdade. Demonstrar que

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2 \|A\| \ \|B\| \cos \theta .$$

8. Usar a definição do Exercício 7 para calcular o ângulo dos seguintes pares de vectores de $V_5(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, i, i, i)$, e $B = (i, i, i, 0, i)$.
9. (a) Provar que os três vectores seguintes formam uma base para $V_3(\mathbf{C})$: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, i, 0)$, $C = (1, 1, i)$.
(b) Exprimir o vector $(5, -2, -i, 2i)$ como uma combinação linear de A, B, C.
10. Provar que a base dos vectores unitários coordenados $E_1, E_2, \ldots, E_n$ em V_n é também uma base de $V_n(\mathbf{C})$.

13

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA VECTORIAL À GEOMETRIA ANALÍTICA

13.1. Introdução

Neste capitulo trataremos das aplicações da álgebra vectorial ao estudo das retas, planos e seções cónicas. No capitulo 14 a álgebra vectorial combina-se com os métodos do cálculo e apresentam-se outras aplicações ao estudo das curvas e a certos problemas de mecânica.

O estudo da geometria como um sistema dedutivo, como foi concebido por Euclides cerca de 300 anos a. C., começa com um conjunto de axiomas ou postulados que definem as propriedades dos pontos e das retas. Os conceitos de "ponto" e "reta" tomam-se como noções primitivas e permanecem indefinidos. Outros conceitos são apresentados em termos de pontos e retas, deduzindo-se sistematicamente os teoremas a partir dos axiomas. Euclides estabeleceu dez axiomas a partir dos quais deduziu todos os seus teoremas. Demonstrou-se, porém, posteriormente que estes axiomas não são adequados para a teoria. Por exemplo, na demonstração do seu primeiro teorema Euclides faz uma hipótese tácita relativa à intersecção de duas circunferências que não está coberta pelos respetivos axiomas. Desde então foram formuladas outras séries de axiomas dos quais resultam todos os teoremas de Euclides. A mais famosa foi a série de axiomas estabelecida pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) no seu agora clássico *Grundlagen der Geometrie,* publicado em 1899. (Existe uma tradução inglesa: *The Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Co., (1947). Esta obra, da qual se fizeram sete edições alemãs ainda em vida de Hilbert, diz-se que inaugurou a matemática abstrata do século vinte.

Hilbert parte, para o seu tratamento da geometria plana, com cinco conceitos não definidos: *ponto, reta, sôbre* (uma relação válida entre um ponto e uma reta), *entre* (uma relação entre um ponto e um par de pontos) e *congruência* (uma relação entre pares de pontos). Hilbert apresenta então quinze axiomas, a partir dos quais desenvolve toda a geometria plana euclidiana. A sua análise de geometria no espaço baseia-se em vinte e um axiomas, contendo seis conceitos não definidos.

A introdução da geometria analítica é feita de modo algo diferente. Definimos conceitos tais como ponto, recta, em (sobre), entre, etc., mas fazêmo-lo em termos de números reais, os quais não se definem. A estrutura matemática resultante chama-se um *modelo analítico* da