Tom M. Apostol

CÁLCULO

VOLUME I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear

EDITORA REVERTÉ LTDA.

Rio de Janeiro
Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Título da obra original:
Calculus, one-variable calculus, with an introduction to linear algebra ***Second edition***
Volume 1

Edição original em lingua inglesa publicada por:
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts

Tradução de:
Doutor António Ribeiro Gomes
Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade de Coimbra

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación, 86-88
(08024) Barcelona

Edição em português

Impresso em Espanha

ISBN - 84 - 291 - 5014 - 5 obra completa
ISBN - 84 - 291 - 5015 - 3 tomo 1

Depósito Legal B.37329/88
LITOCLUB S.A. - BARCELONA

Índice analítico

INTRODUÇÃO

Parte I – Introdução histórica

I 1.1 Os dois conceitos básicos do cálculo

O notável progresso conhecido pela ciência e tecnologia, durante o último século, foi devido em grande parte ao desenvolvimento da Matemática. O ramo da Matemática conhecido por Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e noutros campos, incluindo mais recentemente alguns das Ciências Sociais.

Para dar a o leitor uma ideia dos muito diversos tipos de problemas que podem ser tratados pelos métodos do Cálculo, expõe-se a seguir uma pequena amostra de questões selecionadas dos exercícios que aparecem em capítulos posteriores deste livro.

Com que velocidade deve ser lançado um foguetão, para que não volte a tombar na Terra? Qual é o raio do menor disco circular que cobre todo o triângulo isósceles de perímetro L? Qual é o volume do material extraído de uma esfera de raio $2r$, se for atravessada por um orifício cilindrico, de raio r, e cujo eixo passa pelo centro da esfera? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante, e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar de um metro uma corda elástica, qual o trebalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Estes exemplos, escolhidos em vários domínios, ilustram algumas das questões técnicas que podem ser resolvidas por aplicações mais ou menos rotinadas do Cálculo.

O Cálculo é mais do que um instrumento técnico – é uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com *velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade, tangente a uma curva* e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios. O Cálculo obriga-nos a não ir além, antes de pensarmos cuidadosamente acerca do significado destes conceitos. Outro aspecto notável do Cálculo é o seu poder de síntese. Muitos destes conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois outros problemas, mais especializados, de natureza puramente geométrica. Passamos em seguida a uma breve descrição destes problemas.

Consideremos uma curva C situada acima duma reta horizontal (base), como se indica na fig. I.1. Suponhamos que esta curva goza da propriedade de ser intersetada por cada vertical, no máximo, uma vez. A parte sombreada da figura é formada pelos pontos situados abaixo da curva C, acima da horizontal, e entre dois segmentos verticais paralelos que unem C com a horizontal. O primeiro problema fundamental do Cálculo é o seguinte: *Determinar um número que dê a medida da área da parte sombreada da figura.*

Consideremos em seguida uma reta tangente à curva C, como se mostra na fig. I.1. O segundo problema fundamental pode enunciar-se do modo seguinte. *Determinar um número que dê o declive desta reta.*

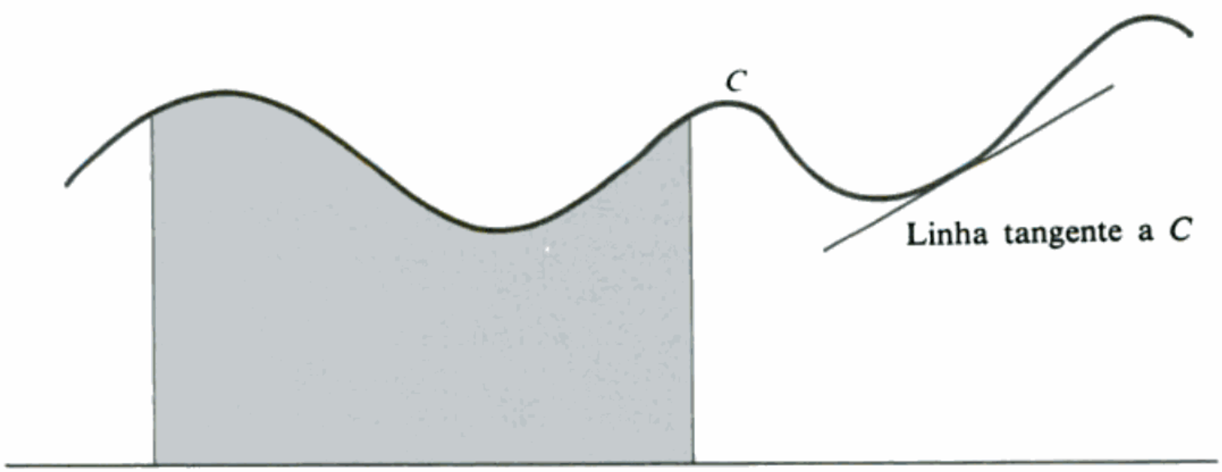


Fig. I.1

Fundamentalmente o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução destes dois problemas particulares. Permite-nos *definir* os conceitos de área e tangente, e *calcular* a área de uma dada região, ou o declive de tangente a uma curva dada. O *Cálculo Integral* ocupa-se do problema da área e será discutido neste primeiro capítulo. *O Cálculo Diferencial* ocupa-se do problema da tangente e será analisado no Capítulo 4.

O estudo do Cálculo requer uma certa preparação matemática. O presente capítulo trata desses conceitos básicos e está dividido em quatro partes: a primeira parte dá uma perspectiva histórica; a segunda refere a notação e terminologia da teoria dos conjuntos; a terceira trata do sistema dos números reais; e finalmente a quarta parte trata da indução matemática e da notação somatória. Se o leitor está familiarizado com estes temas pode abordar directamente o desenvolvimento do Cálculo integral, no capítulo 1. Caso contrário deverá familiarizar-se com as matérias contidas nesta introdução, antes de iniciar o estudo do Capitulo.

I 1.2 Introdução histórica

A origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de *método de exaustão.* As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se, sumariamente, do modo seguinte: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuamos o processo tomando *linhas* poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. O método está ilustrado na fig. I.2 para o caso duma região semicircular. Este método foi usado com êxito por Arquimedes (287-212 a. C.), para estabelecer fórmulas exactas das áreas do círculo e de algumas outras figuras particulares.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram parte usual da matemática. A Álgebra elementar, que hoje é familiar à maioria dos alunos dos últimos anos do ensino secundário, era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem se conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos numa forma compacta e simplificada.

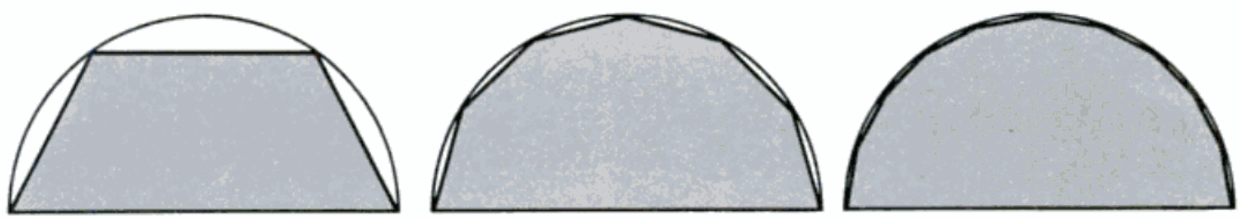


Fig. I.2 O método de exaustão aplicado a uma região semicircular.

Uma mudança lenta, mas revolucionária, no desenvolvimento das notações matemáticas teve início no século XVI. O complicado sistema de numeração romana foi gradualmente substituído pelos caráteres arábicos utilizados ainda hoje, os sinais + e − foram introduzidos pela primeira vez e começaram a reconhecer-se as vantagens da notação decimal. Durante este mesmo período, os brilhantes resultados dos matemáticos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação de soluções algébricas para as equações cúbica e do quarto grau estimularam o desenvolvimento da Matemática e encorajaram a aceitação da nova e superior linguagem algébrica. Com a larga introdução dos bem escolhidos símbolos algébricos ressuscitou o interesse pelo antigo método de exaustão, e grande número de resultados parciais foram descobertos no século XVI por pioneiros tais como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis.

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por Cálculo Integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações não só em problemas geométricos respeitantes a áreas e volumes, mas também em problemas de outras ciências. Este ramo da Matemática, que conservou alguns dos aspetos originais do método de exaustão, recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até ao século XIX, data em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

I 1.3 O método de exaustão para a área de um "segmento parabólico"

Antes de passarmos ao estudo sistemático do Cálculo integral, será instrutivo aplicar o método de exaustão directamente a uma das figuras particulares estudadas pelo próprio Arquimedes. A região em questão está representada na figura I.3 e pode descrever-se do modo seguinte: se escolhermos um ponto arbitrário na base da figura e designarmos por x a sua distância a 0, a distância vertical deste ponto à curva é x^2. Em particular, se o comprimento da base é b a altura da figura é b^2. A distância vertical de x à curva designa-se por "ordenada" de x. A curva assim descrita é uma *parábola* e a região limitada pela curva e pelos dois segmentos de recta chamar-se-á *segmento parabólico.*

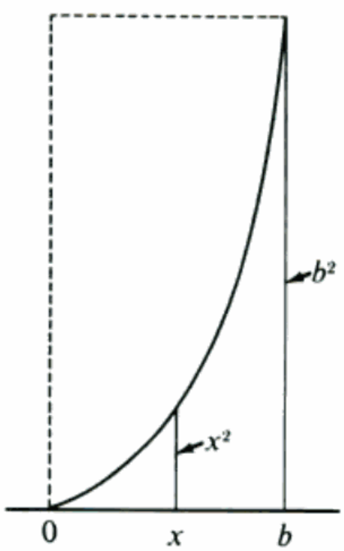
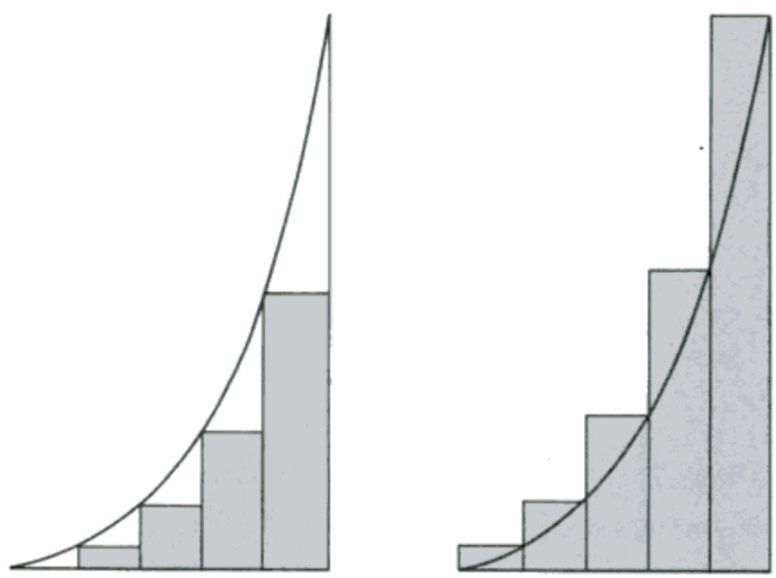


Fig. I.3 Segmento parabólico



Aproximação por defeito. Aproximação por excesso.

Fig. I.4

Esta figura pode ser contida num retângulo de base b e altura b^2, como se vê na fig. I.3. Observando a figura é evidente a afirmação de que a área do segmento parabólico é menor que metade da área do retângulo. Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a área do segmento parabólico é exactamente *um terço* da área do retângulo, isto é, $A = \frac{b^3}{3}$ representando A a área do segmento parabólico. Mostremos como se chega a este resultado.

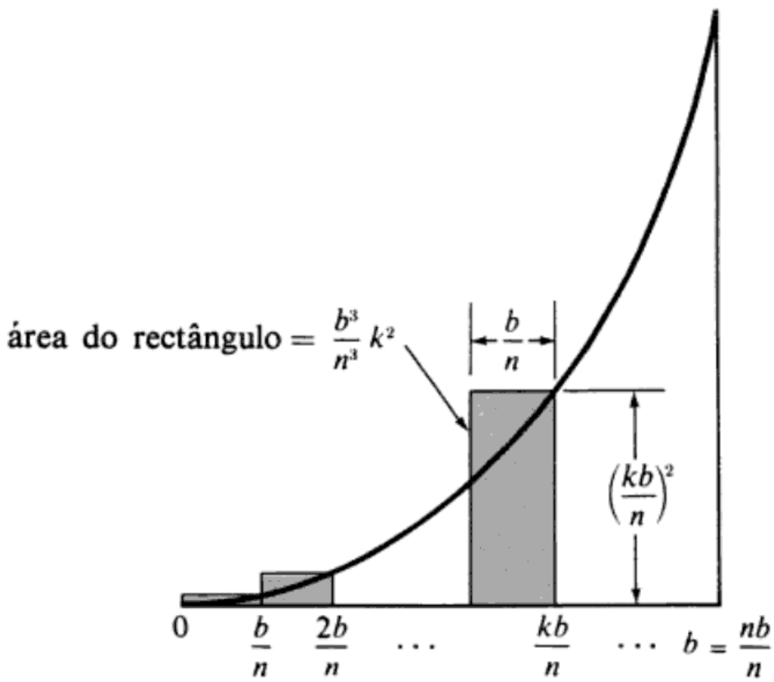


Fig. I.5 Cálculo da área dum segmento parabólico.

Deve notar-se que o segmento parabólico desenhado na fig. I.3 não é exactamente o que Arquimedes considerou, e que os pormenores dos cálculos que se seguem não são exatamente os utilizados por ele. Contudo as *ideias* essencias são as de Arquimedes; o que apresentamos aqui pode considerar-se o método de exaustão exposto com uma notação moderna.

O método consiste simplesmente no seguinte: divide-se a figura num certo número de bandas e obtêm-se duas aproximações da área da região, uma por defeito e a outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos como se indica na fig. I.4 (utilizam-se retângulos, em vez de polígonos quaisquer, para simplificar os cálculos). A área do segmento parabólico é maior que a área total dos retângulos interiores, mas é menor que a dos retângulos exteriores. Se cada banda se subdivide, para se obter uma nova aproximação com maior número de bandas, a área total dos retângulos interiores *aumenta,* enquanto a área total dos retângulos exteriores *diminui.* Arquimedes compreendeu que se podia obter a área com qualquer grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar um número suficiente de bandas.

O cálculo efetivo efectua-se como a seguir se indica. Com o objectivo de simplificar os cálculos divide-se a base em *n partes iguais,* cada uma de comprimento b/n (ver fig. I.5). Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b\,.$$

A expressão geral dum ponto de divisão é $x = \dfrac{kb}{n}$, onde k toma os valores sucessivos $k = 0$, 1, 2, 3, ..., n. En cada ponto kb/n constroi-se o retângulo exterior de altura $(kb/n)^2$, como se indica na fig. I.5. A área deste retângulo é o produto da base pela altura e é igual a

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

Designando por S_n a soma das áreas de todos os retângulos exteriores, uma vez que a área do k-enésimo retângulo é $(b^3/n^3)k^2$, obtem-se

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,. \tag{I.1}$$

Do mesmo modo se obtém a expressão da soma S_n dos rectângulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,. \tag{I.2}$$

A forma destas somas é de grande importância no cálculo. Note-se que o fator que multiplica b^3/n^3 na equação (I.1) é a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,.$$

[O fator correspondente na equação (I.2) é análogo, apenas a soma tem unicamente n-1 parcelas]. O cálculo desta soma por adição directa das parcelas, para um grande valor de n, é fastidioso, porém existe uma identidade interessante que torna possível calcula-la dum modo mais simples; a identidade é

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\,. \tag{I.3}$$

É válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e pode provar-se do modo seguinte: Considere-se a igualdade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ escrita na forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Fazendo $k = 1, 2, ..., n - 1$, obtém-se as $n - 1$ fórmulas

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3$$
$$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3$$
$$\vdots$$
$$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3.$$

Somando as igualdades, membro a membro, todos os termos do segundo membro se eliminam, excepto dois, resultando

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

A expressão do segundo parêntesis reto é a soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo valor é $\frac{1}{2}n(n-1)$. Por conseguinte a última igualdade dá-nos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.4}$$

Somando n^2 a ambos os membros obtemos (I.3).

As expressões exactas dadas nos segundos membros de (I.3) e (I.4) não são necessárias ao objectivo que se persegue. Tudo o que necessitamos é a *dupla desigualdade*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \tag{I.5}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser deduzida fàcilmente de (I.3) e (I.4), ou direitamente por indução (ver Secção I. 4.1).

Multiplicando (I.5) por b^3/n^3 e considerando (I.1) e (I.2) obtém-se

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \tag{I.6}$$

para todo o n inteiro e positivo. A dupla desigualdade (I.6) exprime que, para todo o n inteiro e positivo, o número $b^3/3$ está compreendido entre s_n e S_n. Podemos agora provar que $b^3/3$ é o *único* número que goza desta propriedade, isto é, que se A é um número qualquer que verifica

$$s_n < A < S_n \tag{I.7}$$

para todo o inteiro e positivo n, então $A = b^3/3$. Foi devido a este fato que Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico é $b^3/3$.

Para provar que $A = b^3/3$ utiliza-se uma vez mais a dupla desigualdade (I.5). Somando n^2 a ambos os membros da desigualdade da esquerda em (I.5) obtém-se:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

Multiplicando por b^3/n^3, e considerando (I.1), pode escrever-se

$$< \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}. \tag{I.8}$$

Analogamente, subtraindo n^2 a ambos os membros da desigualdade da direita em (I.5) e multiplicando por b^3/n^3, obtém-se:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n. \tag{I.9}$$

Porém, qualquer número A verificando (I.7) deve igualmente verificar

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{I.10}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Existem, então, unicamente três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \qquad A < \frac{b^3}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3}.$$

Se provarmos que as duas primeiras conduzem a contradições, então necessariamente terá que ser $A = \dfrac{b^3}{3}$, uma vez que, no estilo de Sherlock Holmes, se esgotam assim todas as possibilidades.

Suponhamos que a desigualdade $A > b^3/3$ era verdadeira. Da segunda desigualdade em (I.10) obtém-se

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \tag{I.11}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $A - b^3/3$ é positivo, podemos dividir ambos os membros de (I.11) por $A - b^3/3$ e multiplicar em seguida por n para obter a desigualdade

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para todo o n já referido. Mas esta desigualdade é evidentemente falsa para $n \geq b^3/(A - b^3/3)$. Portanto a desigualdade $A > b^3/3$ conduz a uma contradição. De maneira análoga se pode provar que $A < \frac{b^3}{3}$ conduz igualmente a uma contradição e por conseguinte deverá ser $A = b^3/3$, como já se afirmara.

*I 1.4 Exercícios

1. (a) Modificar a região indicada na fig. I.3 supondo que a ordenada, para cada valor de x, é $2x^2$ em vez de x^2. Desenhar a nova figura. Repetir para este caso os passos principais da anterior seção e determinar o efeito desta modificação no cálculo da área. Fazer o mesmo se a ordenada, para cada x, é (b) $3x^3$, (c) $\frac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
2. Modificar a região na fig. I.3, supondo que a ordenada, para cada x, é x^3 em vez de x^2. Desenhar a nova figura.
(a) Usar uma construção análoga à indicada na fig. I.5 e mostrar que as somas exterior e interior S_n e s_n são dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \qquad s_n = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

(b) Usar a dupla desigualdade (que pode ser demonstrada por indução; ver Secção I.4.2.).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \qquad \text{(I.12)}$$

para provar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para todo o n e provar que $b^4/4$ é o *único* número compreendido entre s_n e S_n para qualquer n.

(c) Que valor substitue $b^4/4$ se a ordenada, para cada x, for $ax^3 + c$?
3. As desigualdades (I.5) e (I.12) são casos particulares da dupla desigualdade mais geral

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad \text{(I.13)}$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo o inteiro $k \geq 1$. Suposta (I.13) verdadeira, generalizar os resultados do Exercicio 2.

I 1.5 Análise crítica do método de Arquimedes

Mediante cálculos análogos aos feitos na Secção I 1.3, Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico considerado é $b^3/3$. Este facto foi aceite como um teorema matemático, até que, passados cerca de 2000 anos, se pensou que deviam ser analisados os resultados dum ponto de vista mais crítico. Para compreender as razões porque houve quem puzesse em dúvida a validade da conclusão de Arquimedes, é necessário conhecer algo acerca das importantes mudanças que tiveram lugar na história recente da Matemática.

Cada ramo do conhecimento é um conjunto de ideias descritas por intermédio de palavras e símbolos, e não se podem compreender estas ideias sem um conhecimento exacto do significado das palavras e dos símbolos utilizados. Alguns ramos do conhecimento, conhecidos por *sistemas dedutivos,* são diferentes de outros pelo facto de que um certo número de conceitos "não definidos" são escolhidos *à priori* e todos os restantes conceitos no sistema são definidos a partir daqueles.

Certas afirmações acerca destes conceitos não definidos toman-se como *axiomas* ou *postulados* e outras relações que podem deduzir-se destes axiomas são chamadas *teoremas*. O exemplo mais familiar de um sistema dedutivo é a Geometria euclidiana estudada por toda a pessoa culta desde a época da Grécia Antiga.

O espírito da primitiva matemática grega, seguindo o método de postulados e teoremas como na Geometria dos *Elementos* de Euclides, dominou o pensamento matemático até à época do Renascimento. Uma nova e vigorosa fase no desenvolvimento da Matemática começou com a aparição da Álgebra no sec. XVI, e os 300 anos que se seguiram foram testemunhas de grande quantidade de importantes descobertas. O raciocínio lógico, preciso, do método dedutivo, com o uso de axiomas, definições e teoremas, esteve manifestamente ausente durante este período. Em vez disso, os pioneiros nos séculos XVI, XVII e XVIII recorriam a uma mistura de raciocínio dedutivo combinado com intuição, mera conjectura e misticismo, e não surpreenderá que se tenha visto mais tarde que alguns dos seus resultados eram incorrectos. Contudo, um número surpreendentemente grande de importantes descobertas ocorreram neste período e uma grande parte deste trabalho sobreviveu à prova da História — um prémio à destreza e engenho daqueles cientistas.

Quando o caudal de novas descobertas começou a diminuir, um novo e mais crítico período apareceu. Pouco a pouco os matemáticos viram-se forçados a voltar às ideias clássicas do método dedutivo, numa tentativa de colocar a nova Matemática numa base firme. Esta fase de desenvolvimento, que começa em princípios do século XIX e continuou até o momento presente, alcançou um grau de abstracção e pureza lógica que ultrapassou todas as tradições da ciência Grega. Simultâneamente proporcionou uma compreensão mais clara dos fundamentos, não só do Cálculo, mas de todos os ramos da Matemática.

Existem várias formas de estruturar o Cálculo como sistema dedutivo. Uma maneira possível é tornar os números reais como conceitos não definidos. Algumas das regras que regem as operações com os números reais podem então ser tomadas como axiomas. Um tal conjunto de axiomas está indicado na Parte 3 desta Introdução. Novos conceitos, como *integral, limite, continuidade, derivada* devem então ser definidos em termos de números reais. As propriedades destes conceitos são, em seguida, deduzidas como teoremas a partir dos axiomas.

Considerando o cálculo como uma parte do sistema dedutivo, o resultado de Arquimedes para a área do segmento parabólico não pode ser aceite como um teorema se não for dada antecipadamente uma definição satisfatória de área. Não está provado que Arquimedes tivesse formulado, alguma vez, uma definição precisa do que entendia por área. Parece ter tornado como presuposto que cada região possui uma área que lhe está associada. Com esta hipótese ocupou-se a calcular áreas de regiões particulares. Nos seus cálculos utilizou certas propriedades da área que não podem ser provadas enquanto não se souber o que *se entende* por área. Por exemplo, supôs que, sendo uma região interior a outra, a área da região menor não pode exceder a área da maior. Do mesmo modo, se uma região é dividida em duas ou mais partes, a soma das áreas das partes é igual à área de toda a região. Estas propriedades é desejável que a área as possua, e, insistimos, qualquer definição de área deve implicar estas propriedades. É perfeitamente possível que o próprio Arquimedes considerasse a área como um conceito não definido e então tivesse utilizado as propriedades que mencionámos como *axiomas* da área.

Actualmente considera-se a obra de Arquimedes importante não tanto pelo que nos auxilia no cálculo de áreas de figuras particulares, mas sim porque sugere uma via razoável para *definir* o conceito de área para figuras mais ou menos *arbitrárias*. Acontece que o método de Arquimedes sugere uma maneira de definir um conceito muito mais geral que é o de *integral*. O integral, por sua vez, é usado para calcular não somente áreas, mas também quantidades tais como comprimentos de arco, volumes, trabalhos e outras.

Antecipando-nos a posteriores desenvolvimentos, e utilizando a terminologia do cálculo integral, o resultado do cálculo efectuado na Secção I.1.3 para o segmento parabólico é muitas vezes expresso como segue:

"O integral de x^2 de O a b é $b^3/3$"

e escreve-se, simbolicamente,

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

O símbolo $\int$ (um S alongado) é chamado *sinal de integral* e foi introduzido por Leibniz em 1675. O processo que determina o número $b^3/3$ diz-se *integração*. Os números O e b que afetam o sinal de integral designam-se por *limites de integração*. O símbolo $\int x^2dx$ deve ser considerado como um todo. A sua definição deverá apresentar-se tal como o dicionário descreve a palavra "conferir" sem fazer referência a "con" e "ferir".

O símbolo de Leibniz para o integral foi prontamente aceite por muitos matemáticos, que o entendiam como uma espécie de "processo de somação" que lhes permitiria somar infinitas "quantidades infinitamente pequenas". Por exemplo, no caso do segmento parabólico concebia-se a área como uma soma de uma infinidade de retângulos infinitamente pequenos, de altura x^2 e base dx. O sinal de integral representava o processo de adição das áreas de todos esses retângulos. Este tipo de raciocínio é sugestivo e frequentemente útil, mas não é fácil atribuir um significado preciso de conceitos de "quantidade infinitamente pequena". Hoje em dia o integral é definido em termos da noção de número real, sem recorrer a conceitos como "infinitesimais". Esta definição será dada no Capítulo I.

I 1.6 A introdução ao cálculo utilizada neste livro

Uma exposição rigorosa e completa, quer do Cálculo integral, quer do Cálculo diferencial, depende em última análise de um estudo cuidadoso do sistema dos números reais. Este estudo, quando levado a cabo na sua totalidade, é um tema interessante, mas algo extenso de modo a exigir um pequeno volume para a sua exposição completa. O método utilizado neste livro consiste em introduzir os números reais como *conceitos não definidos (elementos primitivos)* e tomar simplesmente algumas das suas propriedades fundamentais como *axiomas*. Estes axiomas, e alguns dos teoremas mais simples que podem deduzir-se a partir deles, são discutidos na Parte 3 deste Capítulo. Muitas das propriedades dos números reais aqui tomadas como axiomas são, concerteza, familiares ao leitor pelo seu estudo da Álgebra elementar. Porém existem algumas propriedades dos números reais que habitualmente não são consideradas na álgebra elementar, mas que desempenham um papel importante no Cálculo. Estas propriedades são consequência do chamado *axioma do extremo superior* (conhecido igualmente por *axioma da continuidade*) que se estudará aqui com algum pormenor. O leitor poderá, se o deseja, estudar a Parte 3 na sequência do texto, ou então deixar esta matéria para mais tarde, quando entrar no estudo daquelas partes da teoria que utilizam propriedades do axioma do extremo superior. As matérias dependentes do axioma do extremo superior estarão claramente assinaladas.

Para desenvolver o Cálculo como uma teoria matemática completa seria necessário expôr, em complemento dos axiomas do sistema de números reais, os vários "métodos de demonstração" que permitirão deduzir os teoremas a partir dos axiomas. Cada afirmação, na teoria, teria que ser justificada quer como "uma lei estabelecida" (isto é, um axioma, uma definição, ou um teorema previamente demonstrado), ou como o resultado da aplicação de um dos métodos de demonstração considerados a uma lei estabelecida. Um programa desta natureza resultaria extremamente longo e enfadonho e não compensaria na ajuda à compreensão do assunto por um principiante. Felizmente não é necessário proceder desta maneira para chegar a uma boa compreensão e utilização do Cálculo. Neste livro o assunto é introduzido duma maneira informal, fazendo-se um amplo uso da intuição geométrica sempre que isso é considerado conveniente. Simultâneamente procura-se que a exposição das matérias goze da precisão e clareza de pensamento próprias da ciência moderna. Todos os teoremas importantes estão explicitamente expostos e rigorosamente demonstrados.

Para evitar interromper a sucessão de ideias, algumas das demonstrações aparecem em seções separadas assinaladas com um asterisco. Pela mesma razão, alguns capitulos são acompanhados de secções suplementares, nos quais se tratam, com pormenor, alguns temas importantes relacionados com o Cálculo. Alguns deles estão também assinalados com um asterisco para indicar que podem ser omitidos, ou deixados para mais tarde, sem que assim se interrompa a continuidade da exposição. A medida em que se devem tomar em consideração as secções com asterisco depende, em parte, da preparação do leitor e em parte do seu interesse. O leitor interessado fundamentalmente nas ideias básicas e na prática pode suprimir as secções com asterisco. Aquele que deseje um curso completo de Cálculo, tanto teórico como prático, deverá ler algumas dessas seções.

Parte 2 – Conceitos Fundamentais da Teoria dos Conjuntos

I 2.1 Introdução à teoria dos conjuntos

No estudo de qualquer ramo da Matemática, seja Análise, Álgebra ou Geometria, é útil o uso da notação e terminologia da teoria dos conjuntos. Esta teoria, desenvolvida por Boole e Cantor (+) no final do século XIX, teve uma profunda influência no desenvolvimento da Matemática no século XX. Unificou muitas ideias aparentemente desconexas e contribuiu para reduzir grande número de conceitos matemáticos aos seus fundamentos lógicos, dum modo elegante e sistemático. Um estudo completo da teoria dos conjuntos exigiria uma ampla discussão que consideramos fora do alcance deste livro. Felizmente as noções básicas são em número reduzido e é possível desenvolver um conhecimento prático dos métodos e ideias da teoria dos conjuntos, através duma discussão informal. Na realidade não vamos discutir tanto a moderna teoria, como indicar de modo preciso a terminologia que desejamos aplicar a ideias mais ou menos familiares.

Na Matemática a palavra "conjunto" é usada para representar uma coleção de objectos considerados como uma identidade única. As coleções designadas por nomes como "rebanho", "tribu", "multidão", "equipe" e "eleitorado" são todas exemplos de conjuntos. Os objetos que constituem a coleção chaman-se *elementos* ou *membros* do conjunto, e dizem-se que *pertencem* ou *estão contidos no* conjunto. O conjunto, por sua vez, diz-se *conter* ou ser *composto dos* seus elementos.

Ocupar-nos-emos principalmente de conjuntos de entes matemáticos: conjuntos de números, conjuntos de curvas, conjuntos de figuras geométricas, etc. Em muitas aplicações convém considerar conjuntos em que nenhuma hipótese se faz acerca da natureza dos seus elementos. Tais conjuntos dizem-se abstratos. A teoria dos conjuntos abstratos foi desenvolvida para tratar com tais coleções de objectos arbitrários e precisamente a essa generalidade se fica a dever o grande alcance da teoria.

(+) George Boole (1815-1864) foi um lógico-matemático inglês. O seu livro "Investigação das leis do pensamento", publicado em 1854, assinala a criação do primeiro sistema praticável de lógica simbólica.
George F. L. P. Cantor (1845-1918) e a sua escola criaram a moderna Teoria dos Conjuntos no período 1874-1895.

I 2.2 Notações para representar conjuntos

Os conjuntos designam-se, geralmente, pelas letras maiúsculas: A, B, C, ..., X, Y, Z; e os elementos pelas letras minúsculas: a, b, c, ..., x, y, z. Utilizamos a notação.

$$x \in S$$

para indicar que "x é um elemento de S" ou "x pertence a S". Se x não pertence a S escrevemos $x \notin S$. Quando conveniente, designaremos os conjuntos especificando os seus elementos entre os símbolos $\{\}$; por exemplo, o conjunto dos inteiros positivos pares, inferiores a 10, representa-se por $\{2, 4, 6, 8\}$, enquanto o conjunto de *todos* os inteiros positivos pares se representa por $\{2, 4, 6, 8, ...\}$, sendo os três pontos a representação matemática de "e assim sucessivamente". Os três pontos usar-se-ão apenas quando o significado de "e assim sucessivamente" for claro. Este método de representação dos conjuntos é muitas vezes designado por *representação em extensão*.

O primeiro conceito fundamental que relaciona um conjunto com outro é a *igualdade* de conjuntos:

DEFINIÇÃO DE IGUALDADE DE CONJUNTOS: *Dois conjuntos A e B dizem-se iguais (ou idênticos) se constam exactamente dos mesmos elementos e, nesse caso, escrevemos $A = B$. Se um dos conjuntos contém algum elemento que não pertence ao outro, dizemos que os dois conjuntos são distintos e escrevemos $A \neq B$.*

EXEMPLO 1. De acordo com esta definição, os dois conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 8, 6, 4\}$ são iguais, uma vez que ambos são constituidos pelos quatro elementos 2, 4, 6 e 8. Então, usada a *representação em extensão* para designar um conjunto, a ordem pela qual são referidos os seus elementos é irrelevante.

EXEMPLO 2. Os conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 2, 4, 4, 6, 8\}$ são iguais, apesar de no segundo os elementos 2 e 4 aparecerem repetidos. Ambos contêm os quatro elementos 2, 4, 6, 8 e apenas esses, pelo que a definição impõe que se considerem iguais esses conjuntos.

Este exemplo põe em evidência que não é necessário exigir que os elementos dum conjunto, na representação em extensão, sejam todos distintos. Um exemplo análogo é o conjunto das letras da palavra *Mississipi* que é igual ao conjunto $\{M, i, s, p\}$ formado pelas quatro letras distintas M, i, s, p.

I 2.3 Subconjuntos

Dado um conjunto S podemos formar novos conjuntos, chamados *subconjuntos* de S. Por exemplo, o conjunto dos inteiros positivos menores que 10 e divisíveis por 4 (o conjunto $\{4, 8\}$) é um subconjunto do conjunto de todos os inteiros positivos pares inferiores a 10. Em geral dá-se a seguinte definição.

DEFINIÇÃO DE SUBCONJUNTO. *Um conjunto A diz-se um subconjunto dum conjunto B, e escreve-se*

$$A \subseteq B,$$

quando todo o elemento de A pertence a B. Diz-se também que A está contido em B ou que B contém A. O símbolo $\subseteq$ utiliza-se para representar a relação de inclusão de conjuntos.

A afirmação $A \subseteq B$ não exclui a possibilidade de $B \subseteq A$. Com efeito, podemos ter ambas as relações $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, mas isto acontece unicamente se A e B têm os mesmos elementos. Por outras palavras,

$$A = B \quad \textit{se e sómente se} \quad A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Este teorema é uma consequência imediata das definições anteriores de igualdade e inclusão. Se $A \subseteq B$, mas $A \neq B$, então dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B; expressamos isto escrevendo $A \subset B$.

Em todas as nossas aplicações da teoria dos conjuntos, temos um conjunto S fixado "à priori" e só nos interessam subconjuntos daquele. O conjunto fundamental S pode variar de uma aplicação para outra; será considerado o *conjunto universal* de cada teoria particular. A notação

$$\{x \mid x \in S \quad \text{e} \quad x \text{ satisfaz a } P\}$$

designará o conjunto de todos os elementos x de S que satisfazem à propriedade P. Quando o conjunto universal, a que nos estamos a referir, se subentende, omitimos a referência a S e escrevemos simplesmente $\{x|x \text{ satisfaz a } P\}$, que se lê "o conjunto de todos os x tais que x satisfaz a P". Os conjuntos designados deste modo são caracterizados por uma *propriedade definidora*. Por exemplo, o conjunto de todos os números reais e positivos pode representar-se por $\{x|x > 0\}$; o conjunto universal S neste caso subentende-se que é o conjunto dos números reais. Do mesmo modo, o conjunto de todos os números pares positivos $\{2, 4, 6, \ldots\}$ pode representar-se $\{x|x \text{ inteiro par positivo}\}$. Evidentemente, a letra x pode ser substituída por outro símbolo adequado. Assim, podemos escrever

$$\{x \mid x > 0\} = \{y \mid y > 0\} = \{t \mid t > 0\}$$

etc.

Pode acontecer que um conjunto não contenha qualquer elemento. Designa-se, então, por *conjunto vazio* e representa-se pelo símbolo $\varnothing$. Considera-se $\varnothing$ subconjunto de qualquer conjunto. Se imaginarmos, por facilidade, um conjunto análogo a um recipiente (tal como uma bolsa ou uma caixa) que contém certos objectos, os seus elementos, então o conjunto vazio será análogo a um recipiente vazio.

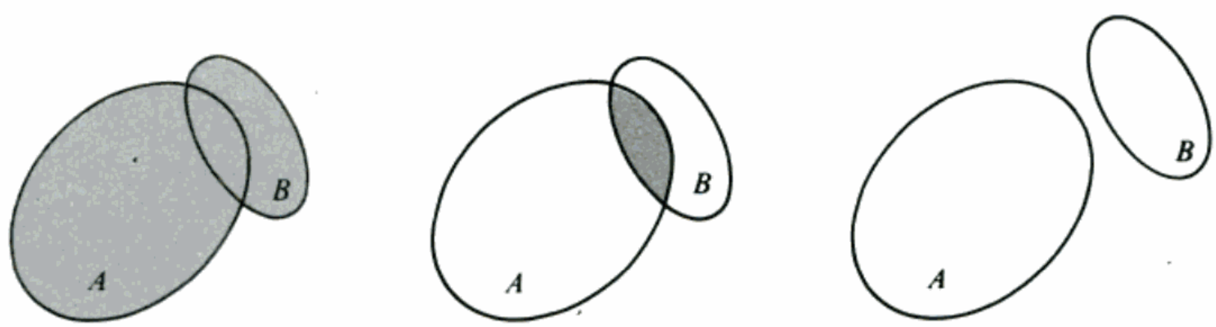
Para evitar dificultades lógicas, devemos fazer distinção entre o elemento x e o conjunto $\{x\}$ cujo único elemento é x. (Uma caixa com um chapéu dentro é conceitualmente distinta do próprio chapéu). Em particular o conjunto vazio $\varnothing$ não é o mesmo que o conjunto $\{\varnothing\}$. Com efeito, o conjunto vazio $\varnothing$ não contém elementos, enquanto que o conjunto $\{\varnothing\}$ contém um elemento, $\varnothing$. (Uma caixa que contém uma caixa vazia não está vazia). Os conjuntos formados de um só elemento dizem-se *conjuntos de um elemento* ou *singulares*.

Muitas vezes recorre-se ao auxílio de diagramas para tornar intuitivas relações entre conjuntos. Por exemplo, podemos considerar o conjunto S uma região do plano e cada um dos seus elementos um ponto. Os subconjuntos de S podem então ser imaginados como coleções de pontos interiores a S. Por exemplo, na fig. I.6(b) a parte sombreada é um subconjunto de A e também um subconjunto de B. As ajudas gráficas deste tipo, chamadas *diagramas de Venn*, são úteis para comprovar a validade de teoremas na teoria dos conjuntos ou para sugerir métodos de demonstração dos mesmos. Naturalmente tais demonstrações baseiam-se nas definições e conceitos e a sua validade dependerá de um raciocínio correcto e não dos diagramas.

I 2.4 Reuniões, interseções, complementos

A partir de dois conjuntos dados A e B, podemos formar um novo conjunto chamado *reunião* de A e B. Este novo conjunto representa-se pelo símbolo

$$A \cup B \quad (\text{ler: "}A \textit{ reunião com } B\text{"}),$$



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap B = \varnothing$

Fig. I.6 Reuniões e interseções

e define-se como o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos. Quer isto dizer que $A \cup B$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem, pelo menos, a um dos conjuntos A, B. Na fig. I.6(a) a parte sombreada representa $A \cup B$.

Analogamente a *intersecção* de A e B, representada por

$$A \cap B \quad (\text{ler: "}A \textit{ intersecção com } B\text{"}),$$

é definida como o conjunto dos elementos comuns a A e a B. Na fig. I.6(b) a parte sombreada representa a intersecção de A e B. Na fig. I.6(c) os conjuntos A e B não têm qualquer elemento comum; neste caso a intersecção é o conjunto vazio $\varnothing$. Dois conjuntos A e B dizem-se *disjuntos* se $A \cap B = \varnothing$.

Dados os conjuntos A e B, a *diferença* $A-B$ (também chamada *complementar de B em relação a* A) é definida pelo conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Então, por definição

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}.$$

Na fig. I.6(b) a parte não sombreada de A representa $A - B$; a parte não sombreada de B representa $B - A$.

As operações de reunião e intersecção possuem várias analogias formais com a adição e multiplicação de números reais. Por exemplo, uma vez que a ordem pela qual se consideram os conjuntos não intervém nas definições de reunião e intersecção, resulta que $A \cup B = B \cup A$ e que $A \cap B = B \cap A$, o que significa serem a reunião e intersecção operações *comutativas*. As definições são dadas de tal modo que as operações são *associativas:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{e} \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Estes e outros teoremas relativos à "álgebra dos conjuntos" são apresentados como exercícios na Seção I 2.5. Uma das melhores maneiras para o leitor se familiarizar com a terminologia e notações aqui introduzidas é estabelecer as demonstrações de cada uma destas propriedades. Uma amostra do tipo de argumentação que é necessária aparece imediatamente após os Exercícios.

As operações de reunião e intersecção podem estender-se a coleções finitas ou infinitas de conjuntos do modo seguinte: Seja $\mathscr{F}$ uma classe (+) não vazia de conjuntos. A reunião de todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ define-se como o conjunto de todos aqueles elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos de $\mathscr{F}$ e representa-se pelo símbolo

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A.$$

Se $\mathscr{F}$ é uma colecção finita de conjuntos, por exemplo $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ escrevemos

$$\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

De modo análogo, a intersecção de todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ define-se com o conjunto de

(+) Para comodidade de linguagem chamamos *classe* a uma colecção de conjuntos. Para representar as classes utilizamos letras maiúsculas em cursivo. A terminologia e notação usuais da teoria dos conjuntos aplicam-se, naturalmente, às classes. Por exemplo $A \in \mathscr{F}$ significa que A é um dos conjuntos da classe $\mathscr{F}$ e $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ significa que cada conjunto de $\mathscr{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$, e assim sucessivamente.

todos aqueles elementos que pertencem a todos os conjuntos de $\mathscr{F}$ e representa-se por

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A .$$

Para colecções finitas (como acima) escrevemos

$$\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

As operações reunião e intersecção definiram-se de modo tal que a propriedade associativa é verificada automaticamente. Daqui resulta que não haverá ambiguidade quando escrevemos $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ou $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

I 2.5 Exercícios

1. Utilizar a representação em extensão para designar os seguintes conjuntos de números reais

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\} . \qquad D = \{x \mid x^3 - 2x^2 + x = 2\} .$$

$$B = \{x \mid (x - 1)^2 = 0\} . \qquad E = \{x \mid (x + 8)^2 = 9^2\} .$$

$$C = \{x \mid x + 8 = 9\} . \qquad F = \{x \mid (x^2 + 16x)^2 = 17^2\} .$$

2. Para os conjuntos do Exercício 1, observe-se que $B \subseteq A$. Indicar todas as relações de inclusão $\subseteq$ que são válidas entre os conjuntos A, B, C, D, E, F.
3. Seja $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Discutir a validade das seguintes afirmações (provar que algumas são verdadeiras e explicar porque são as outras falsas).
   (a) $A \subset B$. (d) $1 \in A$.
   (b) $A \subseteq B$. (e) $1 \subseteq A$.
   (c) $A \in B$. (f) $1 \subset B$.
4. Resolver o Exercício 3 se $A = \{1\}$ e $B = \{\{1\}, 1\}$.
5. Dado o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, expressar todos os subconjuntos de S. Existem 16 no total, incluindo $\varnothing$ e S.
6. Dados os quatro conjuntos seguintes

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \qquad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \qquad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

discutir a validade das afirmações seguintes (provar que algumas são verdadeiras e explicar porquê as outras não o são)
(a) $A = B$. (d) $A \in C$. (g) $B \subset D$.

(b) $A \subseteq B$. (e) $A \subset D$. (h) $B \in D$.
(c) $A \subset C$. (f) $B \subset C$. (i) $A \in D$.

7. Demonstrar as propriedades seguintes da igualdade de conjuntos:
   (a) $\{a, a\} = \{a\}$.
   (b) $\{a, b\} = \{b, a\}$.
   (c) $\{a\} = \{b, c\}$ se e sómente se $a = b = c$.

Demonstrar o conjunto de relações dos Exercícios 8 ao 19 (Exemplos dessas demonstrações são dados no final desta Secção).

8. *Propriedade comutativa* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
9. *Propriedade associativa* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
10. *Propriedade distributiva* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
11. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
12. $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$.
13. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
14. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
15. Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.
16. Se $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cap B$.
17. (a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, prove que $A \subset C$.
    (b) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, prove que $A \subseteq C$.
    (c) O que pode concluir-se se $A \subset B$ e $B \subseteq C$?
    (d) Se $x \in A$ e $A \subseteq B$, verificar-se-á necessariamente $x \in B$?
    (e) Se $x \in A$ e $A \in B$, verificar-se-á necessariamente que $x \in B$?
18. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
19. Seja $\mathscr{F}$ uma classe de conjuntos. Então

$$B - \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{F}} (B - A) \qquad \text{e} \qquad B - \bigcap_{A \in \mathscr{F}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} (B - A).$$

20. (a) Provar que uma das duas fórmulas seguintes é sempre correcta e que a outra alguma vez é falsa

$$\text{(i)}\ A - (B - C) = (A - B) \cup C,$$

$$\text{(ii)}\ A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

    (b) Estabelecer uma condição necessária e suficiente adicional para que a fórmula que algumas vezes é incorreta passe a ser sempre válida.

Demonstração da propriedade comutativa $A \cup B = B \cup A$.

Sejam $X = A \cup B$ e $Y = B \cup A$. Para provar que $X = Y$ demonstra-se que $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$. Suponhamos que $x \in X$. Então x pertence pelo menos a A ou a B. Logo x pertence pelo menos a B ou a A; logo $x \in Y$. Deste modo todo o elemento de X pertence igualmente a Y o que implica $X \subseteq Y$. Analogamente encontramos que $Y \subseteq X$, logo $X = Y$.

Demonstração de $A \cap B \subseteq A$. Se $x \in A \cap B$, então x pertence a A e a B. En particular, $x \in A$. Portanto todo o elemento de $A \cap B$ pertence a A e por conseguinte $A \cap B \subseteq A$.

Parte 3 – Um Conjunto de Axiomas para o Sistema dos Números Reais

I 3.1 Introdução

Há várias maneiras de introduzir o sistema dos números reais. Um método corrente consiste em começar com os inteiros e positivos 1, 2, 3, ... e utilizá-los como base para construir um sistema mais amplo, possuindo as propriedades desejadas. Em resumo, a idéia deste método consiste em tomar os inteiros e positivos como conceitos não definidos, estabelecer relativamente a estes alguns axiomas e, em seguida, utilizá-los para construir o sistema mais amplo dos números *racionais* (cociente de inteiros positivos). Os números racionais positivos utilizam-se, por sua vez, como uma base para construir os números *irracionais* positivos (números reais como $\sqrt{2}$ e π que não são racionais). A fase final consiste na introdução dos números reais negativos e do zero. A parte mais difícil de todo este processo é a transição dos números racionais para os números irracionais.

Embora a necessidade de introdução dos números irracionais fosse já clara para os matemáticos da Grécia antiga nos seus estudos de Geometria, métodos satisfatórios de construção dos números irracionais, a partir dos números racionais, só foram introduzidos muito mais tarde, no século XIX. Nesta época foram delineadas três teorias respectivamente por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916). Em 1889 o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) apresentou cinco axiomas para os inteiros e positivos que podem ser utilizados como ponto de partida para a construção total. Uma exposição detalhada desta construção, começando com os axiomas de Peano e utilizando o método de Dedekind para introduzir os números irracionais, encontra-se no livro de E. Landau, *Foundations of Analysis* (New York, Chelsea Pub. Co., 1951).

O ponto de vista adotado aqui é não construtivo. Iniciamos o processo num ponto bastante avançado, considerando os números reais como conceitos primitivos verificando um certo número de propriedades que se tomam como axiomas, isto é, supomos a existência dum conjunto **R** de elementos, chamados números reais, que verificam os dez axiomas que apresentamos nas seções que se seguem. Todas as propriedades dos números reais se podem deduzir desses axiomas. Quando os números reais se definem por um processo construtivo, as propriedades que aqui se apresentam como axiomas são consideradas como teoremas a demonstrar.

A menos que se afirme o contrário, nos axiomas que apresentamos a seguir as letras $a, b, c, ..., x, y, z$ representam números reais arbitrários. Os axiomas dividem-se, duma maneira natural, em três grupos que designamos por *axiomas de corpo, axiomas de ordem* e *axioma do extremo superior* (também chamado *axioma de continuidade* ou *axioma de completude*).

I 3.2 Axiomas de corpo

Juntamente com o conjunto **R** dos números reais, admitimos a existência de duas operações chamadas *adição* e *multiplicação*, tais que para cada par de números reais x e y podemos formar a *soma* de x e y, que é outro número real representado por $x + y$, e o *produto* de x e y representado por xy ou $x \cdot y$. Supõe-se que $x + y$ e o produto xy são *univocamente determinados* por x e y. Por outras palavras, dados x e y, existe um e um só número real $x + y$ e um e um só número real xy. Não atribuimos significado especial aos símbolos + e além do contido nos axiomas.

Axioma 1. Propriedade comutativa $x + y = y + x$, $xy = yx$

Axioma 2. Propriedade associativa $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\quad x(yz) = (xy)z$

Axioma 3. Propriedade distributiva $x(y + z) = xy + xz$

Axioma 4. Existência de elementos neutros. *Existem dois números reais distintos, que se indicam por 0 e 1, tais que para cada número real x se tem $x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x$.*

Axioma 5. Existência de negativos. *Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.*

Axioma 6. Existência de recíprocos. *Para cada número real $x \neq 0$, existe um número real y tal que $xy = 1$.*

Nota: os números 0 e 1 dos Axiomas 5 e 6 são os do Axioma 4.

Dos axiomas anteriores podemos deduzir todas as regras usuais da álgebra elementar. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas. Nestes teoremas os símbolos a, b, c, d representam números reais arbitrários.

Teorema I.1 Regra de simplificação para a adição. *Se $a + b = a + c$, então $b = c$. (Em particular isto prova que o número 0 do axioma 4 é unico.)*

Teorema I.2 Possibilidade da subtracção. *Dados a e b existe um e um só x tal que $a + x = b$. Este número x representa-se por $b - a$. Em prrticular, $0 - a$ escreve-se simplesmente $-a$ e chama-se o simétrico de a.*

Teorema I.3. $b - a = b + (-a)$.

Teorema I.4 $-(-a) = a$.

TEOREMA I.5 $a(b - c) = ab - ac$.

TEOREMA I.6 $O \cdot a = a \cdot O = O$.

TEOREMA I.7 REGRA DE SIMPLIFICACÃO PARA A MULTIPLICACÃO. *Se* $ab = ac$ *e* $a \neq 0$, *então* $b = c$. *(Em particular, isto mostra que o número 1 do Axioma 4 é único).*

TEOREMA I.8. POSSIBILIDADE DA DIVISÃO. *Dados* a *e* b *com* $a \neq 0$, *existe um e um só* x *tal que* $ax = b$. *Este* x *representa-se por* b/a *ou* $\dfrac{b}{a}$ *e chama-se o coeciente de* b *por* a. *Em particular* $1/a$, *que também se escreve* a^{-1}, *chama-se o recíproco de* a.

TEOREMA I.9. *Se* $a \neq 0$, *então* $b/a = b \cdot a^{-1}$.

TEOREMA I.10. *Se* $a \neq 0$, *então* $(a^{-1})^{-1} = a$.

TEOREMA I.11. *Se* $ab = 0$, *então ou* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

TEOREMA I.12. $(-a)\, b = -(ab)$ *e* $(-a)\,(-b) = ab$.

TEOREMA I.13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ *se* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$.

TEOREMA I.14. $(a/b)\,(c/d) = (ac)/(bd)$ *se* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$.

TEOREMA I.15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *se* $b \neq 0$, $c \neq 0$, *e* $d \neq 0$.

Para ilustrar como estes teoremas podem ser obtidos como consequência dos axiomas apresentaremos as demonstrações dos Teoremas I.1 até I.4. Será instrutivo para o leitor tentar demonstrar os restantes.

Demonstração de I.1. Dado $a + b = a + c$. Pelo axioma 5 existe um número y tal que $y + a = 0$. Porque a soma é univocamente determinada, temos $y + (a + b) = y + (a + c)$. Utilizando a propriedade associativa obtemos $(y + a) + b = (y + a) + c$, ou $0 + b = 0 + c$. Mas pelo axioma 4 temos que $0 + b = b$ e $0 + c = c$, ou seja $b = c$. Repare-se que este teorema mostra que existe um só número real tendo a propriedade do 0 no axioma 4. Com efeito se 0 e 0′ possuissem ambos essa propriedade, então $0 + 0' = 0$ e $0 + 0 = 0$ e portanto $0 + 0' = 0 + 0$ e, pela regra de simplificação, $0 = 0'$.

Demonstração de I.2. Dados a e b, escolhemos y de modo que $a + y = 0$ e seja $x = y + b$. Então $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. Por conseguinte existe pelo menos um x, tal que $a + x = b$. Mass em virtude do teorema I.1 existe quando muito um tal x. Portanto existe *um e um só* nessas condições.

Demonstração de I.3. Sejam $x = b - a$ e $y = b + (-a)$. Desejamos provar que $x = y$. Por definição de $b - a$, $x + a = b$ e

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Consequentemente $x + a = y + a$ e, pelo Teorema I.1, $x = y$.

Demonstração de I.4. Temos $a + (-a) = 0$ por definição de $-a$. Mas esta igualdade diznos que a é o simétrico de $-a$, isto é, $a = -(-a)$ como se pretendia demonstrar.

*I 3.3 Exercícios

1. Demonstrar os teoremas I.5 até I.15, utilizando os axiomas 1 a 6 e os teoremas I.1 a I.4.

Nos exercícios 2 a 10 demonstrar as proposições formuladas, ou estabelecer as igualdades dadas. Utilizar os axiomas 1 a 6 e os teoremas I.1 a I.15.

2. $-0 = 0$.
3. $1^{-1} = 1$.
4. Zero não admite recíproco.
5. $-(a + b) = -a - b$.
6. $-(a - b) = -a + b$.
7. $(a - b) + (b - c) = a - c$.
8. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ se $b \neq 0$.
10. $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

I 3.4 Axiomas de ordem

Este grupo de axiomas diz respeito a um conceito pelo qual se estabelece uma *ordenação* entre os números reais. Esta ordenação permitir-nos-á afirmar se um número real é maior ou menor que outro. Introduzem-se as propriedades de ordem com um conjunto de axiomas referentes a um novo conceito não definido dito *positividade*, para depois definirmos os conceitos de *maior que* e *menor que* em termos de positividade.

Admitiremos a existência dum certo subconjunto $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$, chamado conjunto dos números *positivos*, que verifica os três axiomas de ordem seguinte:

AXIOMA 7. *Se x e y pertencem a $\mathbf{R}^+$, o mesmo se verifica com $x + y$ e xy.*

AXIOMA 8. *Para cada real $x \neq 0$, ou $x \in \mathbf{R}^+$ ou $-x \in \mathbf{R}^+$, mas não ambos.*

AXIOMA 9. *$0 \notin \mathbf{R}^+$.*

Podemos agora definir os símbolos $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$, chamados respectivamente *menor que, maior que, igual ou menor que* e *igual ou maior que,* da maneira seguinte:

$x < y$ significa que $y - x$ é positivo;

$y > x$ significa que $x < y$;

$x \leq y$ significa que ou $x < y$, ou $x = y$;

$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Assim temos $x > 0$ se e só se x é positivo. Se $x < 0$, dizemos que x é *negativo;* se $x \geq 0$ dizemos que x é *não negativo*. Um par de desigualdades simultâneas tais como $x < y$, $y < z$ escreve-se frequentemente de forma mais abreviada $x < y < z$; interpretações semelhantes são dadas às desigualdades compostas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, $x \leq y \leq z$.

A partir dos axiomas de ordem podem deduzir-se todas as regras usuais do cálculo com desigualdades. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas.

TEOREMA I.16. Propriedade tricotómica. *Para a e b números reais e arbitrários verificar-se-á uma e só uma das três relações* $a < b$, $b < a$ *ou* $a = b$.

TEOREMA I.17. Propriedade transitiva. *Se* $a < b$ *e* $b < c$ *é* $a < c$.

TEOREMA I.18. *Se* $a < b$ *é* $a + c < b + c$.

TEOREMA I.19. *Se* $a < b$ *e* $c > 0$ *é* $ac < bc$.

TEOREMA I.20. *Se* $a \neq 0$ *é* $a^2 > 0$.

TEOREMA I.21. $1 > 0$.

TEOREMA I.22. *Se* $a < b$ *e* $c < 0$ *é* $ac > bc$.

TEOREMA I.23. *Se* $a < b$ *é* $-a > -b$. *Em particular, se* $a < 0$, *é* $-a > 0$.

TEOREMA I.24. *Se* $ab > 0$, *então a e b são ambos positivos, ou ambos negativos.*

TEOREMA I.25. *Se* $a < c$ *e* $b < d$, *então* $a + b < c + d$.

Também aqui se demonstram apenas alguns teoremas como amostra do processo de demonstração. Os restantes são deixados ao leitor como exercício.

Demonstração de I.16. Seja $x = b - a$. Se $x = 0$, então $b - a = a - b = 0$ e por conseguinte, pelo axioma 9, não pode ser nem $a > b$, nem $b > a$. Se $x \neq 0$, o axioma 8 diz-nos que ou $x > 0$ ou $x < 0$, mas não ambos; e portanto ou $a < b$ ou $b < a$, mas não ambos. Em conclusão verifica-se uma e só uma das três relações $a = b$, $a < b$, $a < b$.

Demonstração de I.17. Se $a < b$ e $b < c$, então $b - a > 0$ e $c - b > 0$. Em virtude do axioma 7, podemos somar e escrever $(b - a) + (c - b) > 0$, donde resulta $c - a > 0$ e portanto $a < c$.

Demonstração de I.18. Seja $x = a + c$, $y = b + c$. Então $y - x = b - a$. Mas $b - a > 0$, pois que $b > a$. Resulta pois $y - x > 0$, o que significa que $x < y$.

Demonstração de I.19. Se $a < b$, então $b - a > 0$. Se $c > 0$, pelo axioma 7 podemos multiplicar c por $(b - a)$ e obter $(b - a)\, c > 0$. Mas $(b - a)\, c = bc - ac$ e por isso $bc - ac > 0$ o que significa que $ac < bc$, como se pretendia demonstrar.

Demonstração de I.20. Se $a > 0$, então $a \cdot a > 0$ pelo axioma 7. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e daqui $(-a).(-a) > 0$ pelo mesmo axioma. Em ambos os casos tem-se $a^2 > 0$.

Demonstração de I.21. Aplicar o teorema I.20 com $a = 1$.

*I 3.5 Exercícios

1. Demonstrar os teoremas I.22 a I.25, utilizando os teoremas anteriores e os axiomas 1 a 9.

Nos exercícios 2 a 10, demonstrar as proposições ou estabelecer as desigualdades dadas. Devem utilizar-se os axiomas 1 a 9 e os teoremas I.1 a I.25.

2. Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.
3. A soma de dois números negativos é um número negativo.
4. Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.
5. Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
6. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
7. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, e $a = c$, então $b = c$.
8. Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \geq 0$. Se a e b não são ambos 0, então $a^2 + b^2 > 0$.
9. Não existe nenhum número real a tal que $x \leq a$ para *todo* o real x.
10. Se x verifica $0 \leq x < h$ para *todo* o número real positivo h, então $x = 0$.

I 3.6 Números inteiros e números racionais

Há certos subconjuntos de **R** que se distinguem porque possuem propriedades específicas de que não gozam todos os números reais. Nesta secção trataremos de dois destes subconjuntos, o dos *números inteiros* e o dos *números racionais*.

Para introduzir os inteiros positivos começamos com o número 1, cuja existência é garantida pelo axioma 4. O número $1 + 1$ representa-se por 2, o número $2 + 1$ por 3 e assim sucessivamente. Os números 1, 2, 3, . . . obtidos deste modo pela adição repetida de 1 são todos positivos e chamam-se *inteiros positivos*. Em rigor, esta descrição dos numeros inteiros positivos não é inteiramente completa, porque não explicámos em pormenor qual o significado das expressões "e assim sucessivamente", ou "adição repetida de 1". Embora o significado destas expressões pareça evidente, num estudo rigoroso do sistema dos números reais torna-se necessário dar uma definição mais precisa dos inteiros positivos. Há várias maneiras de o fazer. Um método conveniente consiste em introduzir primeiro a noção de *conjunto indutivo.*

DEFINIÇÃO DE UM CONJUNTO INDUTIVO. *Um conjunto de números reais diz-se um conjunto indutivo se possui as propriedades seguintes:*

(a) *O número 1 pertence ao conjunto.*

(b) *Para cada x pertencente ao conjunto, o número $x + 1$ também pertence ao conjunto.*

Por exemplo, $\mathbf{R}$ é um conjunto indutivo. Igualmente o é o conjunto $\mathbf{R}^+$. Podemos agora definir os inteiros positivos como aqueles números reais que pertencem a todo o conjunto indutivo.

DEFINIÇÃO DE INTEIROS POSITIVOS. *Um número real diz-se inteiro positivo se pertence a todo o conjunto indutivo.*

Seja $\mathbf{P}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Então $\mathbf{P}$ é um conjunto indutivo porque (a) contém 1, e (b) contém $x + 1$ sempre que contenha x. Uma vez que os elementos de $\mathbf{P}$ pertencem a todo o conjunto indutivo, referimo-nos a $\mathbf{P}$ como o *menor* conjunto indutivo. Esta propriedade do conjunto $\mathbf{P}$ constitue a base lógica de um tipo de raciocínio que os matemáticos chamam *demonstração por indução,* que se exporá, em pormenor, na Parte 4 desta Introdução.

Os simétricos dos inteiros positivos chamam-se *inteiros negativos*. Os inteiros positivos conjuntamente com os inteiros negativos e o zero formam um conjunto $\mathbf{Z}$ designado muito simplesmente por *conjunto dos números inteiros.*

Num estudo completo do sistema dos números reais seria necessário, ao chegar a este ponto, demonstrar certos teoremas acerca dos inteiros. Por exemplo a soma, diferença ou produto de dois inteiros é um inteiro, mas o cociente de dois inteiros não é necessariamente inteiro. Não entraremos, todavia, nos pormenores de tais demonstrações.

O cociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$) define os *números racionais*. O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbf{Q}$, contém $\mathbf{Z}$ como subconjunto. O leitor poderá comprovar que $\mathbf{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem. Por esta razão dizemos que o conjunto dos números racionais é um *corpo ordenado*. Os números reais que não pertencem a $\mathbf{Q}$ chamam-se *irracionais.*

I 3.7 Interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma recta

O leitor está, com certeza, familiarizado com a representação geométrica dos números reais por meio de pontos de uma reta. Escolhe-se um ponto para representar o *0* e outro, à direita de 0, para representar 1, como se mostra na figura I.7. Esta escolha define a escala. Se se adapta um conjunto apropriado de axiomas para a Geometria euclidiana, então cada número real corresponde a um e um só ponto de reta e, inversamente, cada ponto da reta corresponde a um e um só número real. Por este motivo, a reta chama-se frequentemente *reta real* ou *eixo real*, e é habitual usarem-se as palavras *número real* e *ponto* como sinónimos, dizendo-se por isso, muitas vezes, *ponto* x em vez de ponto correspondente ao número real x.

A relação de ordem entre os números reais tem uma interpretação geométrica simples. Se $x < y$, o ponto x está à esquerda de y, como se mostra na fig. I.7. Os números positivos estão à direita do 0 e os números negativos à esquerda. Se $a < b$, um ponto x satisfaz a $a < x < b$ se e só se x está *entre* a e b.

Esta possibilidade de representar geometricamente os números reais é um poderoso auxiliar, pois permite descobrir e compreender melhor estas propriedades dos números reais. O leitor deve, porém, ter presente que todas as propriedades dos números reais apresentadas como teoremas devem poder deduzir-se dos axiomas, sem qualquer recurso à Geometria. Isto não significa que não se possa fazer uso da Geometria no estudo das propriedades dos números reais. Pelo contrário, a Geometria sugere frequentemente o método de demonstração de um teorema particular e, algumas vezes, um argumento geométrico é mais sugestivo que a demonstração puramente *analítica* (dependente exclusivamente dos axiomas para os números reais). Neste livro, os argumentos geométricos serão usados em larga extensão para auxiliarem, motivarem ou clarificarem discussões *específicas*. Apesar disso, as demonstrações dos teoremas importantes serão apresentadas na forma analítica.

Fig. I.7 Números reais representados geomètricamente sobre uma recta.

I 3.8 Limite superior dum conjunto, elemento máximo, extremo superior (supremo).

Os nove axiomas já enunciados contêm todas as propriedades dos números reais tratadas na álgebra elementar. Existe outro axioma, de importância fundamental no Cálculo, que habitualmente não é tratado nos cursos de álgebra elementar. Este axioma (ou algumas propriedades que lhe são equivalentes) é necessário para se estabelecer a *teoria* dos números irracionais.

Os números irracionais aparecem na álgebra elementar quando pretendemos resolver certas equações quadráticas. Por exemplo, pretende-se determinar o número real x tal que $x^2 = 2$. A partir dos nove axiomas já referidas não podemos provar que um tal x existe em **R**, porque esses nove axiomas são também satisfeitos por **Q**, e não existe nenhum número racional x cujo quadrado seja 2. (No Exercício 11 da Secção I. 3.12 esboça-se uma demonstração desta afirmação). O axioma 10 vai permitir-nos introduzir os números irracionais no sistema dos números reais e, simultâneamente, atribuir a este sistema dos números reais uma propriedade de continuidade que é a chave mestra na estrutura lógica do Cálculo.

Antes de expôr o axioma 10, é conveniente introduzir mais alguma terminologia e notações. Suponhamos S um conjunto de números reais não vazio e admitamos que existe um número B tal que

$$x \leq B$$

para todo o x de S. Então S diz-se *limitado superiormente* por B. O número B diz-se um *limite superior* de S. Dizemos *um* limite superior, porque qualquer número maior que B será também un limite superior de S. Se um limite superior B pertence a S, então B chama-se *elemento máximo* de S. Existira, quando muito, um tal elemento B. Se existir, escrevemos

$$B = \max S \, .$$

Então $B = \max S$ se $B \in S$ e $x \leq B$ para todo o $x \in S$. Um conjunto sem limite superior diz-se *não limitado superiormente.*

Os exemplos seguintes ilustram o significado destes termos.

EXEMPLO 1. Seja S o conjunto de todos os números reais positivos. É um conjunto não limitado superiormente. Não tem limite superior nem possui elemento máximo.

EXEMPLO 2. Seja S o conjunto de todos os números reais x, tais que $0 \leq x \leq 1$. *Este conjunto é limitado superiormente por 1. Com efeito 1 é o seu elemento máximo.*

EXEMPLO 3. Seja T o conjunto de todos os números reais x, tais que $0 \leq x < 1$. T é um conjunto parecido com o do Exemplo 2, excepto que 1 não pertence a T. Este conjunto é limitado superiormente por 1, mas não possui elemento máximo.

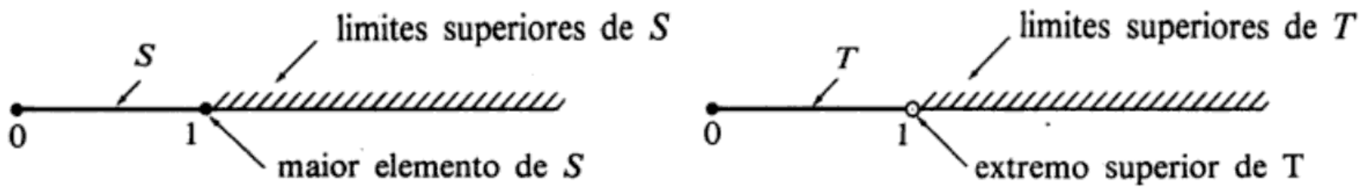
Alguns conjuntos, semelhantes ao do Exemplo 3, são limitados superiormente, mas não possuem elemento máximo. Para estes conjuntos existe um conceito que substitui o de elemento máximo. Chama-se *extremo superior* do conjunto e define-se como segue:

DEFINIÇAO DE EXTREMO SUPERIOR. *Um número B diz-se extremo superior dum conjunto S não vazio, se B possui as propriedades seguintes:*

(a) B é um limite superior para S.

(b) Nenhum número menor que B é um limite superior para S.

Se S tem um elemento máximo, este é também o extremo superior de S. Mas se S não tem elemento máximo, pode ainda ter um extremo superior. No exemplo 3 dado atrás, o número 1 é extremo superior de T, embora T não tenha elemento máximo (Ver fig. I.8).



(a) S tem elemento máximo: max $S = 1$

(b) T não possui elemento máximo, mas tem extremo superior: sup $T = 1$

Fig. I.8 Limite superior, elemento máximo, supremo.

TEOREMA I.26. *Dois números distintos não podem ser extremos superiores dum mesmo conjunto.*

Demonstração. Sejam B e C dois extremos superiores para um conjunto S. A propriedade (b) implica que $C \geq B$, uma vez que B é extremo superior; analogamente, $B \geq C$ já que C é extremo superior. Logo temos $B = C$.

Este teorema diz-nos que se existir um extremo superior para um conjunto S, ele é *único* e podemos por isso falar de o extremo superior.

É habitual designar o extremo superior de um conjunto pelo termo mais conciso *supremo*, abreviadamente *sup*. Adoptando esta convenção escrever-se-á

$$B = \sup S$$

para significar que B é o extremo superior, ou supremo, de S.

I 3.9 O axioma do extremo superior (axioma de completitude)

Estamos agora em condições de estabelecer o axioma do extremo superior para o sistema dos números reais.

AXIOMA 10: *Todo o conjunto não vazio S de números reais, que é limitado superiormente, tem supremo, isto é, existe um número real B tal que B = sup S.*

Insistimos, uma vez mais, em que o supremo de S não pertence necessariamente a S. Com efeito, sup S pertence a S se e só se S possui elemento máximo, caso em que max $S = \sup S$.

As definições de *limite inferior, limitado inferiormente, elemento mínimo* formulam-se de forma semelhante. O leitor deverá fazê-lo como exercício. Se S tem um elemento mínimo escrevemos min S.

Um número L diz-se *ínfimo* de S se (a) L é um limite inferior de S, e (b) nenhum número maior que L é limite inferior de S. O ínfimo de S, quando existe, é único e representa-se por inf S. Se S possui um elemento mínimo então min S = inf S.

Recorrendo ao axioma 10 podemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA I.27. *Todo o conjunto não vazio S que é limitado inferiormente tem ínfimo, isto é, existe um número real L tal que* $L = \inf S$.

Demonstração. Seja $-S$ o conjunto dos simétricos dos números de S. Então $-S$ é não vazio e limitado superiormente. O axioma 10 diz-nos que existe um número B que é supremo de $-S$. É fácil verificar que $-B = \inf S$.

Consideremos uma vez mais os exemplos da Secção anterior. No Exemplo 1, o conjunto de todos os números reais positivos possui o número *0* como ínfimo. Este conjunto não possui elemento mínimo. Nos Exemplos 2 e 3 o número *0* é o elemento mínimo.

Nestes exemplos foi fácil determinar se o conjunto S é ou não limitado superiormente, ou inferiormente, e foi igualmente fácil determinar os números sup S e inf S. O exemplo seguinte mostra que pode ser difícil averiguar da existência de limites superiores ou inferiores.

EXEMPLO 4: Seja S o conjunto de todos os números da forma $(1 + 1/n)^n$, onde $n = 1, 2, 3, ...$ Por exemplo, fazendo $n = 1, 2$ e 3, encontramos que os números $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}$ pertencem a S.Todo o número do conjunto é superior a 1 e assim o conjunto está limitado inferiormente e portanto possui ínfimo. Com um pequeno esforço pode provar-se que 2 é o menor elemento de$S$, de modo que inf S = min S = 2. O conjunto S é também limitado superiormente embora este facto não seja tão fácil de provar (Tente o leitor!). Uma vez sabido que S é limitado superiormente, o axioma 10 assegura-nos que existe um número que é o supremo de S. Neste caso não é fácil determinar o valor de sup S a partir de definição do conjunto S. No capítulo seguinte aprenderemos que o sup S é um número irracional, aproximadamente igual a 2,718. É um número importante no Cálculo chamado o número de Euler e.

I 3.10 A propriedade arquimediana do sistema dos números reais.

Esta secção contém algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do extremo superior.

TEOREMA I.28. *O conjunto* **P** *dos números inteiros positivos 1, 2, 3, ... é ilimitado superiormente.*

Demonstração. Suponhamos **P** limitado superiormente. Vamos mostrar que tal hipótese conduz a uma contradição. Uma vez que **P** é não vazio, o axioma 10 garante-nos que **P** possui supremo, seja b. O número $b - 1$ sendo menor que b não pode ser limite superior de **P**. Logo existe pelo menos um inteiro positivo n, tal que $n > b - 1$. Para este n temos $n + 1 > b$.

Uma vez que $n + 1$ pertence a **P**, esta conclusão contradiz o fato de que b é um limite superior de **P.**

Como corolário do Teorema I.28 obtêm-se imediatamente as consequências seguintes:

TEOREMA I.29. *Para qualquer real x existe um inteiro positivo n tal que $n > x$.*

Demonstração. Se assim não acontecesse, algum x seria um limite superior de **P**, contradizendo deste modo o Teorema I.28.

TEOREMA I.30. *Se $x > 0$ e se y é um número real arbitrário, existe um inteiro positivo n tal que $nx > y$.*

Demonstração. Aplicar o Teorema I.29 com x substituido por y/x.

A propriedade enunciada no Teorema I.30 denomina-se frequentemente *propriedade arquimediana* do sistema dos números reais. Geometricamente significa que cada segmento de reta, de comprimento arbitràriamente grande, pode ser coberto por um número finito de segmentos de reta de comprimento (positivo) dado, tão pequeno quanto se queira. Por outras palavras, uma pequena régua, usada um número suficiente de vezes, pode sempre medir quaisquer distâncias arbitrariamente grandes. Arquimedes considerou esta como uma propriedade fundamental da reta e estabeleceu-a explicitamente como um dos axiomas da geometria. Nos séculos XIX e XX construiram-se geometrias não arquimedianas nas quais este axioma é rejeitado.

A partir da propriedade arquimediana, podemos demonstrar o seguinte teorema, que nos será util no Cálculo integral.

TEOREMA I.3.1. *Se três números reais a, x e y verificam as desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{I.14}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $x = a$.

Demonstração. Se $x > a$, o teorema I.30 garante-nos que existe um inteiro e positivo n para o qual $n(x - a) > y$, contradizendo (I.14). Logo, não podendo ser $x > a$, teremos $x = a$.

I 3.11 Propriedades fundamentais do supremo e do ínfimo

Nesta secção analisam-se três propriedades fundamentais do supremo e ínfimo que utilizaremos mais tarde neste livro. A primeira propriedade estabelece que qualquer conjunto de números, possuindo supremo, contém pontos tão próximos quanto se queira do referido supremo; analogamente, um conjunto possuindo ínfimo contém pontos arbitràriamente próximos desse ínfimo.

TEOREMA I.32. *Seja h um número positivo dado e seja S um conjunto de números reais.*

(a) Se S tem supremo, então para algum x de S será

$$x > \sup S - h .$$

(b) Se S tem ínfimo, então para algum x de S será

$$x < \inf S + h .$$

Demonstração de (a). Se tivessemos $x \leq \sup S - h$ para *todo* o $x \in S$, então $\sup S - h$ seria um limite superior de S menor que o seu supremo. Por conseguinte deve ser $x > \sup S - h$ para, pelo menos, um $x \in S$, o que demonstra (a). A demonstração de (b) é semelhante.

TEOREMA I.33. PROPRIEDADE ADITIVA. *Dados dois subconjuntos não vazios A e B de* **R**, *seja C o conjunto*

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} .$$

(a) Se A e B têm supremo, então C tem supremo e

$$\sup C = \sup A + \sup B .$$

(b) Se A e B possuem ínfimo, então C possui ínfimo e

$$\inf C = \inf A + \inf B .$$

Demonstração. Suponhamos que A e B têm supremo. Se $c \in C$, então $c = a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$. Portanto $c \leq \sup A + \sup B$; deste modo $\sup A + \sup B$ é um limite superior de C. Isto prova que C tem supremo e que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

Seja agora n um inteiro e positivo qualquer. Segundo o teorema I.32 (com $h = 1/n$) existe um a em A e um b em B, tais que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \qquad b > \sup B - \frac{1}{n} .$$

Somando estas desigualdades obtemos $a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$, ou $\sup A + \operatorname{Sup} B < a + b + \frac{2}{n} \leq \operatorname{Sup} C + \frac{2}{n}$, uma vez que $a + b \leq \sup C$. Temos portanto demonstrado que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$ Em virtude do teorema I.31 devemos ter $\sup C = \sup A + \sup B$, o que prova (a); a demonstração de (b) é análoga.

TEOREMA I.34. *Dados dois subconjuntos não vazios, S e T de* **R** *tais que*

$$s \leq t$$

para todo s de S e t de T, então S tem supremo e T tem ínfimo e verifica-se

$$\sup S \leq \inf T\,.$$

Demonstração. Cada t de T é um limite superior para S. Portanto S tem supremo que satisfaz à desigualdade $\sup S \leq t$ para todo o t de T. Daqui resulta que $\sup S$ é um limite inferior para T, e assim T tem um ínfimo que não pode ser menor que $\sup S$. Por outras palavras, temos $\sup S \leq \inf T$, como se queria provar.

*I 3.12 Exercícios

1. Se x e y são números reais quaisquer com $x < y$, provar que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.
2. Se x é um número real arbitrário, provar que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.
3. Se $x > 0$, provar que existe um inteiro positivo n tal que $1/n < x$.
4. Se x é um número real arbitrário, provar que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n é chamado a *parte inteira* de x e representa-se por $[x]$.
   Por exemplo $[5] = 5$, $[5/2] = 2$, $[-8/3] = -3$.
5. Se x é um número real arbitrário, provar que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $x \leq n < x + 1$.
6. Se x e y são números reais arbitrários, com $x < y$, provar que existe pelo menos um número racional r satisfazendo a $x < r < y$, e deduzir daqui que existem infinitos. Esta

propriedade exprime-se dizendo que o conjunto dos números racionais é *denso* no sistema dos números reais.

7. Se x é racional, $x \neq 0$, e y irracional, provar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, y/x são todos irracionais.
8. A soma ou o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional?
9. Se x e y são números reais arbitrários, com $x < y$, provar que existe pelo menos um número irracional z tal que $x < z < y$ e deduzir que existem infinitos.
10. Um inteiro diz-se *par* se $n = 2m$ para algum inteiro m e *ímpar* se $n + 1$ é par. Provar as afirmações seguintes:
    (a) Um inteiro não pode ser simultaneamente par e ímpar.
    (b) Todo o inteiro ou é par ou ímpar.
    (c) A soma ou o produto de dois inteiros pares é par. Que se pode dizer acerca da soma ou produto de dois inteiros ímpares?
    (d) Se n^2 é par, também n o é. Se $a^2 = 2b^2$, com a e b inteiros, então a e b são ambos pares.
    (e) Todo o número racional pode expressar-se na forma a/b, com a e b inteiros, um dos quais pelo menos é ímpar.
11. Provar que não existe nenhum número racional cujo quadrado seja 2.

    [*Sugestão*: Seguir um raciocínio de redução ao absurdo. Supõe-se $(a/b)^2 = 2$, com a e b inteiros, um dos quais, pelo menos, é ímpar. Utilizar partes do Exercício 10 para reduzir o raciocínio ao absurdo.]

12. A propriedade arquimediana do sistema dos números reais foi deduzida como consequência do axioma do extremo superior. Demonstrar que o conjunto dos números racionais satisfaz à propriedade arquimediana, mas não ao axioma do extremo superior. Isto prova que a propriedade arquimediana não implica o axioma do extremo superior.

*I 3.13. Existência de raízes quadradas para os números reais não negativos

Foi apontado anteriormente que a equação $x^2 = 2$ não tem soluções entre os números racionais. Com auxílio do axioma 10, podemos demonstrar que a equação $x^2 = a$ tem soluções entre os números *reais* se $a \geq 0$. Cada tal x chama-se *raíz quadrada de a*.

Em primeiro lugar vejamos algumas considerações relativas à raíz quadrada, sem ter em conta o axioma 10. Os números negativos não podem ter raíz quadrada, porque se $x^2 = a$, então a, sendo um quadrado, deve ser não negativo (pelo teorema I.20). Além disso se $a = 0$, $x = 0$ é a única raíz quadrada (pelo teorema I.11). Suponhamos, então, que $a > 0$. Se $x^2 = a$, então $x \neq 0$ e $(-x)^2 = a$ e assim x e o seu simétrico são ambos raízes quadradas. Por outras palavras, se a tem uma raíz quadrada, então tem duas raízes quadradas, uma positiva e outra negativa. Além disso, tem *quando muito duas* porque se $x^2 = a$ e $y^2 = a$, então $x^2 = y^2$ e

$(x - y)(x + y) = 0$ e, deste modo, pelo teorema I.11 ou $x = y$ ou $x = -y$. Portanto, se a tem uma raíz quadrada tem *exactamente duas.*

A existência de pelo menos uma raíz quadrada pode ser deduzida por recurso a um importante teorema do cálculo, mas é instrutivo ver como pode essa existência ser provada diretamente, a partir do axioma 10.

TEOREMA I.35. *Todo o número real não negativo* a *tem uma raíz quadrada não negativa única.*

Nota: Se $a \geqslant 0$, representamos a sua raíz quadrada não negativa por $a^{1/2}$ ou por $\sqrt{a}$. **Seja** $a > 0$, a raíz quadrada negativa é $-a^{1/2}$ ou $-\sqrt{a}$.

Demonstração. Se $a = 0$, então *0* é a única raíz quadrada. Suponhamos, então, que $a > 0$. Seja S o conjunto de todos os números x reais positivos tais que $x^2 \leq a$. Uma vez que $(1 + a)^2 > a$, o número $1 + a$ é um limite superior de S. Mas S é não vazio porque o número $a/(1 + a)$ pertence a S; com efeito $a^2 \leq a(1 + a)^2$ e daqui $a^2/(1 + a)^2 \leq a$. Pelo axioma 10, S tem supremo que designaremos por b. Repare-se que $b \geq a/(1 + a)$ e portanto $b > 0$. Existem unicamente três possibilidades: $b^2 > a$, $b^2 < a$ ou $b^2 = a$.

Suponhamos $b^2 > a$ e seja $c = b - (b^2 - a)/(2b) = \dfrac{1}{2}(b + a/b)$. Então $0 < c < b$ e $c^2 = b^2 - (b^2 - a) + (b^2 - a)^2/(4b^2) = a + (b^2 - a)^2/(4b^2) > a$. Portanto $c^2 > x^2$ para cada x de S, isto é, $c > x$ para cada x de S; esta conclusão significa que c é um limite superior de S. Uma vez que $c < b$, estamos perante uma contradição porque b era o *menor* limite superior de S. Portanto a desigualdade $b^2 > a$ é impossível.

Suponhamos $b^2 < a$. Se $b > 0$, podemos escolher um número positivo c tal que $c < b$ e $c < (a - b^2)/(3b)$ e então pode escrever-se

$$(b + c)^2 = b^2 + c(2b + c) < b^2 + 3bc < b^2 + (a - b^2) = a\,.$$

Quer dizer, $b + c$ pertence a S. Porque $b + c > b$, isto contradiz o fato de b ser um limite superior de S, e a desigualdade $b^2 < a$ é impossível, restando como única hipótese possível $b^2 = a$.

*I 3.14 Raízes de ordem superior. Potências racionais

O axioma do extremo superior pode utilizar-se para mostrar também a existência de raízes de ordem superior. Por exemplo, se n é um inteiro positivo *ímpar,* então para cada real x existe um é um só real y tal que $y^n = x$. Este y denomina-se *raíz n*-enésima de x e representa-se por

$$y = x^{1/n} \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt[n]{x}\,. \tag{I.15}$$

Se n é *par*, a situação é um pouco diferente. Neste caso, se x é negativo não existe nenhum real y tal que $y^n = x$, porque $y^n \geq 0$ para todo o real y. Porém, se x é positivo pode demonstrar-se que existe um e um só positivo y tal que $y^n = x$. Este y denomina-se a *n-enésima raíz positiva* de x e representa-se pelos símbolos (I.15). Sendo n par $(-y)^n = y^n$ e portanto cada $x > 0$ tem duas raízes n-enésimas reais, y e $-y$. Contudo os símbolos $x^{1/n}$ e $\sqrt[n]{x}$ reservam-se para a *n-enésima raíz positiva*. Não expomos as demonstrações destas afirmações aqui, porque elas deduzir-se-ão, mais adiante, como consequências do teorema de valor intermédio para funções contínuas (Ver Secção 3.10).

Se r é um número racional positivo, $r = \dfrac{m}{n}$ com m e n inteiros positivos, definimos x^r como $(x^m)^{1/n}$, isto é a n-enésima raíz de x^m sempre que exista. Se $x \neq 0$ definimos $x^{-r} = 1/x^r$ sempre que x^r seja definido. A partir destas definições é fácil verificar que as propriedades usuais das potências são válidas para expoentes racionais: $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$, $(x^r)^s = x^{rs}$, e $(xy)^r = x^r y^r$.

*I 3.15 Representação dos números reais por meio de decimais

Um número real da forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{I.16}$$

onde a_0 é um inteiro não negativo e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são inteiros verificando $0 \leq a_i \leq 9$, escreve-se mais abreviadamente da maneira seguinte:

$$r = a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_n .$$

Esta é a *representação décimal finita* de r. Por exemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,, \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0{,}02\,, \qquad \frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7{,}25.$$

Números reais deste tipo são necessariamente racionais e todos eles são da forma $r = a/10^n$ com a inteiro. Porém, nem todos os números racionais podem exprimir-se por meio duma representação décimal finita. Por exemplo, se $\dfrac{1}{3}$ pudesse ser expresso assim teríamos $\dfrac{1}{3} = a/10^n$, ou $3a = 10^n$ para algum inteiro a. Mas isto é impossivel, uma vez que 3 não é divisor de nenhuma potência de dez.

Apesar disso, podemos representar um número real qualquer $x > 0$, com um grau de aproximação desejado, por uma soma da forma (I.16), tomando n suficientemente grande. A razão disto pode ver-se mediante o seguinte argumento geométrico: se x não é inteiro está compreendido entre dois inteiros consecutivos, sejam $a_0 < x < a_0 + 1$. O segmento definido por a_0 e $a_0 + 1$ pode dividir-se em dez partes iguais. Se x não coincide com nenhum dos pontos de divisão, estará compreendido entre dois pontos consecutivos. Isto dá lugar ao par de desigualdades da forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

onde a_1 é um inteiro ($0 \leq a_1 \leq 9$). Subdivide-se em seguida o segmento definido por $a_0 + \frac{a_1}{10}$ e $a_0 + (a_1 + 1)/10$ em dez partes iguais (cada uma de medida 10^{-2}) e continua-se o processo. Se depois de um número finito de divisões um dos pontos coincide com x, x é um número da forma (I-16). Se tal não se verifica, o processo continua-se indefinidamente e gera-se um conjunto infinito de inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Neste caso diz-se que x tem a representação décimal infinita

$$x = a_0{,}a_1a_2a_3 \ldots .$$

Depois de n subdivisões, x verifica as desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

as quais nos dão duas aproximações de x, uma por excesso e a outra por defeito, por decimais finitos que diferem de 10^{-n}. Portanto podemos obter um grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar n suficientemente grande.

Quando $x = \dfrac{1}{3}$ é fácil verificar que $a_0 = 0$ e $a_n = 3$ para $n \geq 1$ e portanto a aproximação decimal correspondiente é

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333 \cdots .$$

Cada número irracional tem uma representação decimal infinita. Por exemplo, quando $x = \sqrt{2}$ podemos calcular por tentativas tantos dígitos quantos os desejados da sua representação decimal. Com efeito $\sqrt{2}$ está compreendido entre 1,4 e 1,5, já que $(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$. Do mesmo modo, quadrando e comparando com 2 obtém-se as seguintes aproximações sucessivas

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42, \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415, \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$$

Note-se que o processo anterior gera uma sucessão de intervalos de comprimento 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., cada um contido no anterior e contèndo o ponto x. Este é um exemplo do que se designa por encaixe de intervalos, um conceito que se utiliza algumas vezes como base para construir os números irracionais a partir dos racionais.

Uma vez que neste livro pouco uso se fará dos números decimais, não desenvolveremos com pormenor as suas propriedades e apenas mencionamos como se podem definir analiticamente desenvolvimentos decimais com auxílio do axioma do extremo superior.

Se x e um número real positivo dado, seja a_0 o maior inteiro $\leq x$. Escolhido a_0, seja a_1 o maior inteiro tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x .$$

Em geral, determinados $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, seja a_n o maior inteiro tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x . \tag{I.17}$$

Seja S o conjunto de todos os números

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \tag{I.18}$$

obtidos desta maneira para $n = 0, 1, 2, ...$ Então S é não vazio e limitado superiormente e é fácil verificar que o supremo coincide com x. Os inteiros $a_0, a_1, a_2, ...$ assim obtidos podem utilizar-se par definir uma representação decimal de x, pondo

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$$

onde o digito a_n, que ocupa o n-enésimo lugar, é o maior inteiro que satisfaz a (I-17). Por exemplo, se $x = \frac{1}{8}$ encontramos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ e $a_n = 0$ para $n \geq 4$. Portanto podemos descrever

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000 \cdots .$$

Se em (I.17) substituímos o sinal $\leq$ por $<$ obtemos uma definição ligeiramente diferente da expressão decimal. O extremo superior de todos os números da forma (I.18) é igualmente x, embora os inteiros $a_0, a_1, a_2, ...$ não sejam necessariamente os mesmos que satisfazem (I.17). Por exemplo se esta segunda definição se aplica a $x = \frac{1}{8}$, encontramos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ e $a_n = 9$ para $n \geq 4$. Isto conduz-nos à representação decimal infinita.

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots .$$

O fato de que um número real possa ter duas representações decimais diferentes é simplesmente o reflexo de dois conjuntos diferentes de números reais poderem ter o mesmo supremo.

Parte 4. Indução matemática, símbolo somatório e questões afins

I 4.1 Um exemplo de demonstração por indução matemática

Uma vez que somando 1 ao inteiro k se obtém $k + 1$ que é maior do que k, não existe nenhum inteiro que seja o *maior de todos.* Contudo, partindo do número 1, podemos alcançar qualquer inteiro positivo depois dum número finito de operações, passando sucessivamente de k a $k + 1$ em cada uma. Esta é a base de um tipo de raciocínio que os matemáticos chamam *demonstração por indução.* Ilustraremos a aplicação deste método, demonstrando a dupla desigualdade usada na Seção I.1.3 para o cálculo da área dum "segmento parabólico", a saber

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2. \qquad \text{(I.19)}$$

Consideremos em primeiro lugar a desigualdade da esquerda, fórmula que abreviadamente se designará por *A(n)* (afirmação respeitante a *n*). É imediata a verificação direta desta asserção para os primeiros valores de *n*, pois que se por exemplo *n* tomar os valores 1, 2 e 3 a afirmação virá

$$A(1)\colon 0 < \frac{1^3}{3}, \qquad A(2)\colon 1^2 < \frac{2^3}{3}, \qquad A(3)\colon 1^2 + 2^2 < \frac{3^3}{3},$$

supondo que se interpreta a soma do primeiro membro como *0* para $n = 1$.

É nosso objetivo provar que *A(n)* é verdadeira para todo o inteiro positivo *n*. O processo consiste no seguinte: suponhamos a afirmação já provada para um valor particular de *n*, digamos $n = k$. Quer isto dizer que supomos provada

$$A(k)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}$$

para um $k \geq 1$. Então *utilizando agora A(k),* devemos provar o correspondente resultado para $k + 1$:

$$A(k+1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}.$$

Somando k^2 a ambos os membros de *A(k)* obtém-se

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2 .$$

e para obter $A(k + 1)$, como consequência daquela, basta mostrar que

$$\frac{k^3}{3} + k^2 < \frac{(k + 1)^3}{3} .$$

Mas isto resulta imediato da igualdade

$$\frac{(k + 1)^3}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{k^3}{3} + k^2 + k + \frac{1}{3} .$$

Portanto provámos que $A(k + 1)$ e uma consequência de $A(k)$. Agora, uma vez que $A(1)$ foi verificada directamente, concluimos que $A(2)$ é também verdadeira. Sabendo que $A(2)$ é verdadeira concluímos que $A(3)$ é verdadeira e assim sucessivamente. Considerando que cada inteiro pode alcançar-se por este processo, *A(n)* é verdadeira para todo o *n* inteiro e positivo. Está assim provada a desigualdade da esquerda em (I.19). A desigualdade da direita pode provar-se do mesmo modo.

I 4.2 O principio da indução matemática

O leitor deve ficar seguro de que compreendeu o *esquema* da demonstração anterior. Em primeiro lugar provou-se a afirmação *A(n)* para $n = 1$. Em seguida mostrou-se que *se* a afirmação é verdadeira para um inteiro dado, *então* é também verdadeira para o inteiro seguinte. A partir daqui conclui-se que a afirmação é verdadeira para todos os inteiros positivos.

A ideia de indução pode ilustrar-se com muitos exemplos *não* matemáticos. Assim, imaginemos uma fila de soldados de chumbo, numerados consecutivamente e suponhamos que estão colocados de tal modo que se um deles cai, por exemplo o assinalado com o símbolo *k*, ele choca com o seguinte, assinalado com $k + 1$. Então qualquer pessoa pode imaginar o que acontecerá se o soldado número 1 é tombado para trás. Também é evidente que se fosse tombado para trás um soldado que não o primeiro, por exemplo o assinalado com n_1, todos os soldados depois *dele* cairíam. Este exemplo ilustra uma generalização do método de indução, a qual pode ser descrita do modo seguinte.

Método de demonstração por indução. Seja *A(n)* uma afirmação referente a um inteiro *n*. Concluímos que *A(n)* é verdadeira para cada $n \geq n_1$ se é possivel:

(a) Provar que $A(n_1)$ è verdadeira.

(b) Provar que, suposta *A(k)* verdadeira com *k* um inteiro positivo fixo $\geq n_1$, $A(k + 1)$ é verdadeira.

Na prática n_1 é geralmente 1. A justificação lógica deste método de demonstração é o seguinte teorema relativo a número reais.

TEOREMA I.36. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA. *Seja S um conjunto de inteiros positivos que goza das seguintes propriedades:*

(a) O número 1 pertence ao conjunto S

(b) Se o número k pertence a S também k + 1 pertence a S.

Logo todo o inteiro positivo pertence ao conjunto S.

Demonstração: As propriedades (*a*) e (*b*) dizem-nos que S é um conjunto indutivo. Mas os inteiros positivos foram definidos como sendo os números reais que pertencem a todo o conjunto indutivo (Ver Seção I 3.6). Portanto S contém todo o inteiro positivo.

Quando efetuamos a demonstração de uma afirmação $A(n)$ para todo $n \geq 1$ por indução matemática, estamos a aplicar o teorema I.36 ao conjunto S de todos os inteiros para os quais a afirmação é verdadeira. Se desejamos provar que $A(n)$ é verdadeira unicamente para $n \geq n_1$, aplicamos o teorema I.36 ao conjunto dos números n para os quais é verdadeira $A(n + n_1 - 1)$.

*I 4.3 O princípio de boa ordenação

Existe uma outra importante propriedade dos inteiros positivos, chamada *o principio de boa ordenação* que é também usada como base para demonstrações por indução. Pode ser estabelecido como segue.

TEOREMA I.37. PRINCÍPIO DE BOA ORDENAÇÃO. *Todo o conjunto não vazio de números inteiros positivos contém um elemento que é o menor.*

Note-se que o princípio refere-se a conjuntos de inteiros *positivos*. O teorema não é verdadeiro para conjuntos de inteiros quaisquer. Por exemplo, o conjunto de todos os inteiros não têm um elemento que seja o menor.

O princípio de boa ordenação pode deduzir-se a partir do princípio de indução, e isso será demonstrado na Seção I.4.5. Concluímos esta seção com um exemplo, no qual se mostra como se pode aplicar o princípio de boa ordenação para demonstrar teoremas relativos a inteiros positivos.

Represente $A(n)$ a seguinte afirmação:

$$A(n)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

De novo se observa que $A(1)$ é verdadeira, uma vez que

$$1^2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}.$$

Há agora somente duas possibilidades. Ou

(i) $A(n)$ é verdadeira para todo o inteiro positivo n, ou

(ii) há pelo menos um inteiro positivo n para o qual $A(n)$ é falsa.

Trata-se de provar que a alternativa (ii) conduz a uma contradição. Suponhamos (ii) verdadeira. Então pelo princípio de boa ordenação existirá um inteiro e positivo *menor que todos os outros*, digamos k, para o qual $A(k)$ é falsa. (Estamos a aplicar o princípio ao conjunto de todos os inteiros positivos n para os quais $A(n)$ é falsa. A alternativa (ii) garante que este conjunto é não vazio.) Este k deve ser maior que 1, porque verificámos que $A(1)$ era verdadeira. Igualmente a afirmação deve ser verdadeira para $k-1$, uma vez que é k o menor inteiro para o qual $A(k)$ é falsa; portanto podemos escrever

$$A(k-1)\colon 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)^3}{3} + \frac{(k-1)^2}{2} + \frac{k-1}{6}.$$

Adicionando k^2 a ambos os membros e simplicando o segundo membro encontramos

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}.$$

Mas esta igualdade prova que $A(k)$ é verdadeira; deste modo estamos perante uma contradição, porque k é um inteiro para o qual $A(k)$ era falsa. Por outras palavras, a alternativa (ii) conduz a uma contradição. Quer isto dizer que (i) se verifica, o que prova que a identidade em questão é válida para $n \geq 1$. Uma consequência imediata desta identidade é a desigualdade da direita em (I.19).

Uma demonstração na qual, como no exemplo apresentado, se faça uso do princípio da boa ordenação, pode substituir-se por uma demonstração por indução. Sem dúvida, que se poderia ter feito a demonstração na forma mais usual, verificando $A(1)$ e depois passando de $A(k)$ a $A(k+1)$.

I 4.4 Exercícios

1. Demonstrar por indução as relações seguintes:

   (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

   (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

   (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

   (d) $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

2. Observar que

$$1 = 1,$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)\,,$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3\,,$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)\,.$$

Inferir a expressão geral e prová-la por indução.

3. Observar que

$$1 + \tfrac{1}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}\,,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}\,,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 2 - \tfrac{1}{8}\,.$$

Inferir a expressão geral e demonstrá-la por indução.

4. Observar que

$$1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,,$$
$$(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}\,,$$
$$(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3})(1 - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\,.$$

Inferir a expressão geral e demonstrá-la por indução.

5. Inferir a expressão geral que exprime de modo simplificado o produto

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

e demonstrá-la por indução.

6. Seja $A(n)$ a proposição: $1 + 2 + ... + n = \dfrac{1}{8}(2n + 1)^2$.

   (a) Provar que se $A(k)$ é verdadeira para um inteiro k, então $A(k + 1)$ é também verdadeira.

   (b) Criticar a afirmação: "Por indução resulta que $A(n)$ é verdadeira para todo o n".

   (c) Modificar $A(n)$, mudando a igualdade numa desigualdade que seja verdadeira para todo o inteiro positivo n.

7. Seja n_1 o menor inteiro positivo n para o qual a desigualdade $(1 + x)^n > 1 + nx + nx^2$ é verdadeira, qualquer que seja $x > 0$. Determinar n_1 e provar que a desigualdade é verdadeira para todo o inteiro $n \geq n_1$.

8. Dados os números reais positivos $a_1, a_2, ...$, tais que $a_n \leq ca_{n-1}$ para todo o $n \geq 2$, com c um número positivo fixo, aplicar o método de indução para provar que $a_n \leq a_1 c^{n-1}$ para todo o $n \geq 1$.

9. Provar, por indução, a seguinte afirmação: Dado um segmento de comprimento uni-

dade, então o segmento de comprimento $\sqrt{n}$ pode construir-se com régua e compasso, para cada inteiro e positivo n.

10. Seja b um inteiro positivo. Demonstrar por indução a proposição seguinte: Para cada inteiro $n \geq 0$, existem inteiros não negativos q e r tais que

$$n = qb + r , \qquad 0 \leq r < b .$$

11. Sejam n e d inteiros. Diz-se que d é um *divisor* de n se $n = cd$ para algum inteiro c. Um inteiro n diz-se *primo* se $n > 1$ e se os únicos divisores positivos de n são n e 1. Provar, por indução, que cada inteiro $n > 1$ ou é primo, ou é um produto de fatores primos.
12. Explicar o erro na seguinte "demonstração" por indução:

Proposição: dado um conjunto de n raparigas loiras, se pelo menos uma delas tem olhos azuis, então as n têm olhos azuis.

Demonstração: A proposição é verdadeira para $n = 1$. A passagem de k a $k + 1$ pode exemplificar-se passando de 3 a 4. Suponhamos para isso que a proposição é verdadeira para $n = 3$ e sejam G_1, G_2, G_3, G_4 quatro raparigas loiras tais que uma delas, pelo menos, tenha olhos azuis, por exemplo a G_1. Tomando G_1, G_2, G_3 conjuntamente e fazendo uso da proposição verdadeira para $n = 3$, resulta que também G_2 e G_3 têm olhos azuis. Repetindo o processo com G_1, G_2 e G_4 conclui-se igualmente que G_4 tem olhos azuis, isto é, as quatro tem olhos azuis. Um raciocínio análogo permite a passagem de k a $k + 1$ em geral.

Corolário: Todas as raparigas têm olhos azuis.

Demonstração. Uma vez que existe efetivamente uma rapariga com olhos azuis, pode aplicar-se o resultado precedente ao conjunto formado por todas as raparigas loiras.

Nota: Este exemplo deve-se a G. Pólya que sugere ao leitor que comprove experimentalmente a validade da proposição.

*I 4.5 Demonstração do princípio de boa ordenação

Passamos agora à dedução do princípio de boa ordenação, a partir do princípio de indução. Seja T um conjunto não vazio de inteiros positivos. Desejamos provar que T possui um número que é o menor, isto é, que existe em T um inteiro positivo t_0, tal que $t_0 \leqq t$ para qualquer t de T.

Admitamos que tal não se verificava. Devemos provar que isto conduz a uma contradição. O inteiro 1 não pode estar em T (caso contrário, seria ele o menor elemento de T). Represente S o conjunto de todos os inteiros positivos n, tais que $n < t$ para todo o t de T. Por conseguinte 1 está em S porque $1 < t$ para todo o t de T. Em seguida, seja k um inteiro positivo de

S. Então $k < t$ para todo o t de T. Devemos provar que $k + 1$ está também em S. Se tal não se verificasse, então para algum t_1 em T teríamos $t_1 \leqq k + 1$. Uma vez que T não possui nenhum elemento mínimo, existirá um inteiro t_2 em T tal que $t_2 < t_1$ e daqui $t_2 < k + 1$. Mas isto significa que $t_2 \leq k$, contradizendo o fato de que $k < t$ para todo o t em T. Portanto $k + 1$ está em S. Pelo princípio de indução, S contém todos os inteiros e positivos. Uma vez que T é não vazio, existe um inteiro positivo t em T. Mas este t deverá também pertencer a S (pois que S contém todos os inteiros). Resulta da definição de S que $t < t$, o que é absurdo. Portanto a hipótese de que T não possui nenhum elemento menor que todos os outros conduz a uma contradição. Resulta pois que T deve ter um elemento mínimo e, por sua vez, isto prova que o princípio de boa ordenação é uma consequência do princípio de indução.

I 4.6 O símbolo somatório

No cálculo da área do "segmento parabólico" encontrámos a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 . \tag{I.20}$$

Repare-se que o termo geral da soma é da forma k^2 e que se obtêm todos os termos fazendo k variar de 1 até n. Há um símbolo muito útil e conveniente, o qual nos permite escrever somas semelhantes a esta numa forma mais compacta, designando *símbolo somatório* e representado pela letra grega Σ. Fazendo uso do símbolo somatório podemos escrever a soma (I.20) como segue:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Este símbolo lê-se: "Soma de k^2, para k variando de 1 a n". Os números aparecendo em baixo e por cima de Σ dão-nos a série de valores assumidos por k. A letra k designa-se por *índice de somação.* Sem dúvida que não tem significado especial o uso da letra k; qualquer outra letra pode ocupar o seu lugar. Por exemplo em vez de $\Sigma_{k=1}^{n}\ k^2$ poderemos escrever $\Sigma_{i=1}^{n} i^2, \Sigma_{j=1}^{n} j^2, \Sigma_{m=1}^{n} m^2$, etc., sendo todas as expresões alternativas de representação duma mesma coisa. As letras i, j, k, m, etc., utilizadas na notação anterior são *índices mudos*. Não seria muito conveniente ter utilizado n como índice mudo neste exemplo particular, porque n já estava a ser usado para o número de termos.

Mais geralmente, quando desejamos formar a soma de vários números reais, por exemplo $a_1, a_2, ..., a_n$ representamos a soma por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{I.21}$$

a qual, usando o símbolo somatório, se pode escrever

$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{I.22}$$

Por exemplo, temos

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 .$$

Por vezes é necessário iniciar a soma por 0 ou por algum valor superior a 1 do índice. Por exemplo, temos

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ,$$

$$\sum_{n=2}^{5} n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Outras utilizações da notação são apresentadas a seguir:

$$\sum_{m=0}^{4} x^{m+1} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5,$$

$$\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Para dar, uma vez mais, ênfase à importância da escolha do índice mudo, note-se que a última soma pode escrever-se em qualquer uma das seguintes formas:

$$\sum_{q=1}^{6} 2^{q-1} = \sum_{r=0}^{5} 2^r = \sum_{n=0}^{5} 2^{5-n} = \sum_{k=1}^{6} 2^{6-k}.$$

Nota: Dum ponto de vista estrictamente lógico, os símbolos em (I.21) e (I.22) não aparecem entre os primitivos símbolos para o sistema dos números reais. Dum ponto de vista mais rigoroso, dever-se-iam definir estes novos símbolos a partir dos primitivos símbolos não definidos nesse sistema. Pode fazer-se isto recorrendo a um processo designado *definição por indução,* o qual, tal como a demonstração por indução, consta de duas partes:

(a) Define-se

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 .$$

(b) Admitindo definida $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para um $n \geq 1$ fixo, define-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Por exemplo, pode-se tomar $n = 1$ em (b) e utilizar (a) para se obter

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2.$$

Definida $\Sigma_{k=1}^{2} a_k$, pode aplicar-se novamente (b) agora com $n = 2$ para se obter

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3.$$

Pela propriedade associativa da adição (Axioma 2), a soma $(a_1 + a_2) + a_3$ é a mesma que $a_1 + (a_2 + a_3)$ e, portanto, podem suprimir-se os parêntesis sem perigo de confusão e escrever simplesmente

$$a_1 + a_2 + a_3 \text{ para } \textstyle\sum_{k=1}^{3} a_k.$$

Anàlogamente:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{3} a_k + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4.$$

Neste caso pode *provar-se* que a soma $(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$ é a mesma que $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$ ou $a_1 + (a_2 + a_3 + a_4)$ e, portanto, o parêntesis pode ser eliminado também sem perigo de ambiguidade e escrever-se

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Prosseguindo deste modo, encontra-se que (a) e (b) conjuntamente dão-nos uma definição completa do símbolo (I.22). A notação em I.21 é uma outra forma de escrever (I.22). Tal notação está justificada por uma propriedade associativa geral da adição, a qual não será nem enunciada nem demonstrada aqui. Deve notar-se que a *definição por indução* e a *demonstração por indução* encerram a mesma ideia fundamental. Uma definição por indução diz-se também uma *definição por recorrência.*

I 4.7 Exercícios

1. Achar os valores numericos das seguintes somas:

(a) $\sum_{k=1}^{4} k$, (c) $\sum_{r=0}^{3} 2^{2r+1}$, (e) $\sum_{i=0}^{5} (2i + 1)$,

(b) $\sum_{n=2}^{5} 2^{n-2}$, (d) $\sum_{n=1}^{4} n^n$, (f) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Estabelecer as seguintes propriedades do símbolo somatório,

(a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva)

(b) $\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (propriedade homogênea)

(c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescopica)

Utilizar as propriedades do Exercicio 2, sempre que possível, para deduzir as fórmulas dos Exercícios 3 a 8.

3. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$. (Isto significa $\sum_{k=1}^{n} a_k$, quando cada $a_k = 1$).

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$. [*Sugestão:* $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$].

5. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. [*Sugestão:* Utilizar os exercícios 3 e 4].

6. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. [*Sugestão:* $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$].

7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

8. (a) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ se $x \neq 1$. *Nota:* Por definição, $x^0 = 1$

[*Sugestão:* Aplicar o Exercício 2 a $(1-x)\,\Sigma_{k=0}^{n} x^k$]

(b) A que é igual a soma, quando $x = 1$?

9. Provar, por indução, que a soma $\Sigma_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k + 1)$ é proporcional a n e determinar a constante de proporcionalidade.

10. (a) Dar uma definição aceitável do símbolo $\Sigma_{k=m}^{m+n} a_k$

    (b) Provar, por indução, que para $n \geq 1$ se tem

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

11. Dizer se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Para cada caso justificar a resposta.

(a) $\sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4.$ (d) $\sum_{i=1}^{100} (i + 1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2.$

(b) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200.$ (e) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right).$

(c) $\sum_{k=0}^{100} (2 + k) = 2 + \sum_{k=0}^{100} k.$ (f) $\sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3.$

12. Induzir e demonstrar uma regra geral que simplifique a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

13. Demonstrar que $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ se $n \geq 1$. A partir do resultado anterior provar que

$$2\sqrt{m} - 2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m} - 1$$

se $m > 2$. Em particular quando $m = 10^6$, a soma está compreendida entre 1998 e 1999.

I 4.8 Valores absolutos e desigualdade triangular

Os cálculos com desigualdades são frequentes. São de particular importância as que se relacionam com a noção de *valor absoluto*. Se x é um número real, o valor absoluto de x é um número real não negativo, designado por $|x|$ e definido do modo seguinte:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0\,, \\ -x & \text{se} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Notemos que $-|x| \leq x \leq |x|$. Quando os números reais são representados geometricamente sobre o eixo real, o número $|x|$ representa a *distância* de x a *0*. Se $a > 0$ e se um ponto x está entre $-a$ e a, então $|x|$ está mais próximo de *0* do que de a. A tradução analítica deste fato é dada pelo seguinte teorema.

TEOREMA I.38. *Se $a \geq 0$, então $|x| \leq a$ se e só se $-a \leq x \leq a$.*

Demonstração: Há que provar duas afirmações: primeiro, que a desigualdade $|x| \leq a$ implica a dupla desigualdade $-a \leq x \leq a$ e, inversamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

Suponhamos $|x| \leq a$. Então temos, do mesmo modo, $-a \leq -|x|$. Mas ou $x = |x|$, ou $x = -|x|$ e portanto $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, o que prova a primeira afirmação.

Para provar o recíproco, supomos $-a \leq x \leq a$. Então se $x \geq 0$, temos $|x| = x \leq a$, ao passo que se $x \leq 0$, temos $|x| = -x \leq a$. Em qualquer dos casos ter-se-á $|x| \leq a$, o que completa a demonstração.

A fig. I.9 ilustra o significado geométrico deste teorema

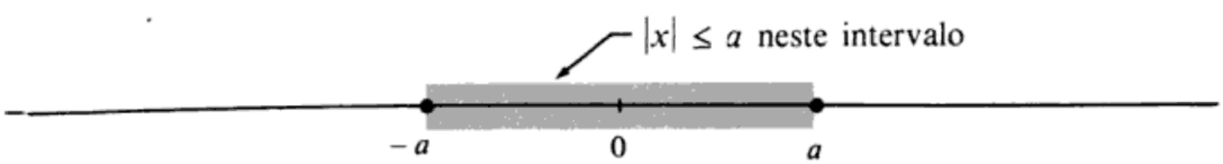


Fig. I.9 — Interpretação geométrica do teorema I.38.

Como consequência do Teorema I.38 é fácil derivar uma importante desigualdade, a qual estabelece que o valor absoluto da soma de dois números reais não pode exceder a soma dos valores absolutos desses números.

TEOREMA I.39. *Para x e y números reais arbitrários tem-se*

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

Nota: Esta propriedade é vulgarmente designada por *desigualdade triangular*, porque quando é generalizada a vetores significa que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é igual ou menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração: Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| ,$$

e daqui, pelo Teorema I.38, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se fizermos $x = a - c$ e $y = c - b$, então $x + y = a - b$ e a desigualdade triangular vem

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c| .$$

Esta forma da desigualdade triangular é usada frequentemente na prática.

Por indução matemática, podemos generalizar a desigualdade triangular do modo seguinte:

TEOREMA I.40. *Para os números reais arbitrários a_1, a_2 ..., a_k, tem-se*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Demonstração: Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para $n + 1$ números reais $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ virá

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| .$$

Portanto o teorema é verdadeiro para $n + 1$ números reais se fôr verdadeiro para n; logo, pelo princípio de indução, é verdadeiro para todo o inteiro positivo n.

O teorema seguinte estabelece uma importante desigualdade, que usaremos mais adiante, em ligação com o estudo da Álgebra vetorial.

TEOREMA I. 41. A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ. *Se $a_1, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais arbitrários, tem-se*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) . \tag{I.23}$$

O sinal de igualdade verifica-se se e só se existe um número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada valor de $k = 1, 2, ..., n$.

Demonstração: Temos $\Sigma_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ para todo o real x, porque uma soma de quadrados nunca pode ser negativa. A desigualdade anterior pode escrever-se

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0\,, \tag{I.24}$$

onde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\,, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2\,.$$

Desejamos demonstrar que $B^2 \leq AC$. Se $A = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $A \neq 0$, podemos escrever

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\,.$$

O segundo membro é mínimo quando $x = -B/A$. Fazendo $x = -B/A$ em (1.24) obtemos $B^2 \leq AC$ o que demonstra I.23. O leitor deve verificar que o sinal de igualdade é válido se e só se existir um x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada k.

I 4.9 Exercícios

1. Provar cada uma das propriedades seguintes dos valores absolutos.
   (a) $|x| = 0$ se e só se $x = 0$.
   (b) $|-x| = |x|$.
   (c) $|x - y| = |y - x|$.
   (d) $|x|^2 = x^2$.
   (e) $|x| = \sqrt{x^2}$.
   (f) $|xy| = |x|\,|y|$.
   (g) $|x/y| = |x|/|y|$ se $y \neq 0$.
   (h) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
   (i) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   (j) $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.
2. Cada desigualdade (a_i), escrita a seguir, é equivalente exactamente a uma desigualdade (b_j). Por exemplo, $|x| < 3$ se e só se $-3 < x < 3$ e portanto (a_1) é equivalente a (b_2). Estabelecer todos os pares equivalentes.
   (a_1) $|x| < 3$.
   (a_2) $|x - 1| < 3$.
   (a_3) $|3 - 2x| < 1$.
   (a_4) $|1 + 2x| \leq 1$.
   (a_5) $|x - 1| > 2$.
   (a_6) $|x + 2| \geq 5$.
   (a_7) $|5 - x^{-1}| < 1$.
   (a_8) $|x - 5| < |x + 1|$.
   (a_9) $|x^2 - 2| \leq 1$.
   (a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$.
   (b_1) $4 < x < 6$.
   (b_2) $-3 < x < 3$.
   (b_3) $x > 3$ ou $x < -1$.
   (b_4) $x > 2$.
   (b_5) $-2 < x < 4$.
   (b_6) $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
   (b_7) $1 < x < 2$.
   (b_8) $x \leq -7$ ou $x \geq 3$.
   (b_9) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$.
   (b_{10}) $-1 \leq x \leq 0$.
3. Dizer se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Em qualquer dos casos justificar a resposta.
   (a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

(b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.

(c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -\frac{2}{3}$.

(d) Não há nenhum real x para o qual $|x - 1| = |x - 2|$.

(e) Para cada $x > 0$ existe um $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

4. Demonstrar que o sinal de igualdade, na desigualdade de Cauchy-Schwarz, se mantém se e só se existe um número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo o $k = 1, 2, ..., n$.

*I 4.10 Exercícios vários referentes ao método de indução

Nesta Secção reunem-se um certo número de enunciados cujas demonstrações são boas aplicações do método de indução matemática. Alguns destes exercícios podem servir de base para discussões suplementares entre professor e alunos.

Coeficientes factorial e binomial. O símbolo $n!$ (lê-se *n factorial*) pode definir-se, por indução, do modo seguinte: $0! = 1$, $n! = (n-1)!\,n$ se $n \geq 1$. Note-se que $n! = 1.2.3.4 \ldots n$.

Se $0 \leq k \leq n$ o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ *define-se*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Nota: Algumas vezes escreve-se C_k^n em vez de $\binom{n}{k}$. Estes números aparecem como coeficientes no desenvolvimento da potência do binómio. (Ver Exercício 4 e seguintes).

1. Calcular os valores dos seguintes coeficientes binomiais:
   (a) $\binom{5}{3}$, (b) $\binom{7}{0}$, (c) $\binom{7}{1}$, (d) $\binom{7}{2}$, (e) $\binom{17}{14}$, (f) $\binom{0}{0}$.
2. (a) Demonstrar que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (c) Sabendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$, calcular k.
   (b) Sabendo que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$, calcular n. (d) Existirá um k tal que $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?
3. Demonstrar que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Esta é a chamada *lei do triângulo de Pascal* que permite um cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais. O triângulo de Pascal é dado a seguir, para $n \leq 6$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

4. Usar o método de indução para provar a fórmula do desenvolvimento do binómio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Em seguida utilizar a fórmula para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad \text{se} \quad n > 0.$$

O símbolo produto. O produto de n números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ representa-se pelo símbolo $\Pi_{k=1}^n a_k$, o qual pode ser definido por indução. A notação $a_1 a_2 \ldots a_n$ é outra forma de escrever o mesmo produto. Notemos que

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

5. Dar uma definição, por indução, do produto $\Pi_{k=1}^n a_k$.

   Demonstrar, por indução, as seguintes propriedades dos produtos:

6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ (propriedade multiplicativa)

   Um caso importante é a relação: $\prod_{k=1}^n (ca_k) = c^n \prod_{k=1}^n a_k$.

7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ se cada $a_k \neq 0$ (propriedade telescópica)

8. Se $x \neq 1$ mostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

   Qual é o valor do produto quando $x = 1$?

9. Se $a_k < b_k$ para cada valor de $k = 1, 2, \ldots, n$ é fácil demonstrar por indução que $\Sigma_{k=1}^n a_k < \Sigma_{k=1}^n b_k$.

   Discutir a desigualdade correspondente para produtos

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} b_k.$$

Algumas desigualdades notáveis.

10. Se $x > 1$, provar por indução que $x^n > x$ para todo o inteiro $n \geq 2$. Se $0 < x < 1$ provar que $x^n < x$ para todo o inteiro $n \geq 2$.
11. Determinar todos os inteiros positivos n para o quais $2^n < n!$
12. (a) Usar o teorema de binómio para provar que, para n inteiro positivo, se tem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)\right\}.$$

(b) Se $n > 1$, utilizar parte da alinea (a) e o Exercício 11 para estabelecer as desigualdades

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$$

13. (a) Seja p um inteiro positivo. Provar que

$$b^p - a^p = (b - a)(b^{p-1} + b^{p-2}a + b^{p-3}a^2 + \cdots + ba^{p-2} + a^{p-1}).$$

[*Sugestão*: usar a propriedade (A) pág. 48].

(b) Sejam p e n inteiros e positivos. Recorrendo a parte de (a) mostrar que

$$n^p < \frac{(n + 1)^{p+1} - n^{p+1}}{p + 1} < (n + 1)^p.$$

(c) Demonstrar, por indução, que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p + 1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

A alínea (b) auxiliará a passar, na indução, de n a $n + 1$.

14. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ n números reais, todos do mesmo sinal e todos maiores que -1. Aplicar o método de indução para demonstrar que:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Em particular, quando $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = x$, onde $x > -1$, transforma-se em

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \textit{(desigualdade de Bernoulli).} \tag{I.25}$$

Provar que se $n > 1$, o sinal de igualdade se apresenta em (I.25) somente para $x = 0$..

15. Se $n \geq 2$, provar que $n!/n^n \leq (\frac{1}{2})^k$, onde k é o enteiro máximo $\leq n/2$.

16. Os números 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., 21, tais que cada um, depois do segundo, é a soma dos dois anteriores, designam-se por *números de Fibonacci.* Podem definir-se por indução da maneira seguinte:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{se} \quad n \geq 2\,.$$

Demonstrar que

$$a_n < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo o $n \geq 1$.

Desigualdades que relacionam diferentes tipos de médias.
Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reais positivos. Se p é um inteiro não nulo, a *média das potências de ordem p*, M_p, define-se do modo seguinte:

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

O número M_1 define a *média aritmética*, M_2 *a média quadrática* e M_{-1} *a média harmónica.*

17. Se $p > 0$ provar que $M_p < M_{2p}$ quando $x_1, x_2, ..., x_n$ não forem todos iguais.

[*Sugestão:* Aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz com $a_k = x_k^p$ e $b_k = 1$.]

18. Aplicar o resultado do exercício anterior para demonstrar que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \tfrac{64}{3}$$

se $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ e $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

19. Sejam $a_1, ..., a_n$ n números reais positivos cujo produto é igual a 1.
Provar que $a_1 + ... + a_n \geq n$ e que o sinal de igualdade se verifica únicamente quando cada $a_k = 1$

[*Sugestão:* Considerar dois casos: (a) todo $a_k = 1$; (b) nem todo $a_k = 1$. Usar o método de indução. No caso (b) reparar que se $a_1, a_2 ... a_{n+1} = 1$, então pelo menos um fator, seja a_1, excederá 1 e pelo menos um fator, seja a_{n+1}, é menor do que 1. Seja $b_1 = a_1 a_{n+1}$ e aplique-se a hipótese de indução ao produto $b_1\, a_2 \dots a_n$, tendo em conta que $(a_1 - 1) \cdot (a_{n+1} - 1) < 0$.]

20. *A média geométrica* G de n números reais positivos $x_1, \dots, x_n$ está definida pela fórmula $G = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$.

(a) Representando-se a *média das potências de ordem* p por M_p, demonstrar que $G \le M_1$ e que $G = M_1$ unicamente quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(b) Sejam p e q inteiros, $q < 0 < p$. A partir de (a) deduzir que $M_q < G < M_p$ se x_1, x_2, ..., x_n não são todos iguais.

21. Servindo-se dos resultados do exercício 20 provar a seguinte proposição: Se a, b, e c são números reais positivos tais que $abc = 8$, então $a + b + c \ge 6$ e $ab + ac + bc \ge 12$.

22. Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números positivos e se $y_k = 1/x_k$ demonstrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \ge n^2 .$$

23. Se a, b, c são positivos e se $a + b + c = 1$, demonstrar que $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \ge 8abc$.