Modelos não-radiais

Enzo Barberio Mariano

Questões

1. Quais as características básicas de um modelo DEA radial?
2. O que são e quais são os modelos DEA híbridos?
3. Como se pode construir matematicamente os modelos híbridos da DEA?
4. Qual é o método para se determinar retornos de escala em que se utiliza os resultados dos modelos híbridos?
5. Quais são as principais características do modelo FDH?
6. Como o FDH é construído a partir do modelo BCC?
7. O que é relação de dominância e como esse conceito se relaciona com o modelo FDH?

Modelos não-radiais

- **Não trata os inputs e outputs de maneira uniforme;**
  - Inputs/outputs tem deslocamentos diferentes até a fronteira
- **Podem ter orientações mistas:**
  - Olha ao mesmo tempo para os inputs e outputs
- **Não estão sujeitos aos problemas das folgas;**
  - As folgas tem um outra interpretação nesses modelos;
- **Modelos não radiais**:
  - Aditivo ou Pareto-Koopmans (PK)
  - Slack Based Measure (SBM)
  - Enhanced Russell Measure (ERM)

Modelo aditivo

- **Origem:**
  - Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985)
  - **Título:** "Foundations of data envelopment analysis and Pareto–Koopmans empirical production functions";

- **Características**
  - Primeiro modelo não-radial proposto;
  - Identifica apenas unidades que são eficientes pela definição de Pareto-Koopmans (sem falsos eficientes)
  - Permite calcular a contribuição de cada variável e as metas e benchmarks para DMUs ineficientes;
  - **Não permite calcular um índice de eficiência;**

Conceito de Folga nos modelos radiais e não-radiais

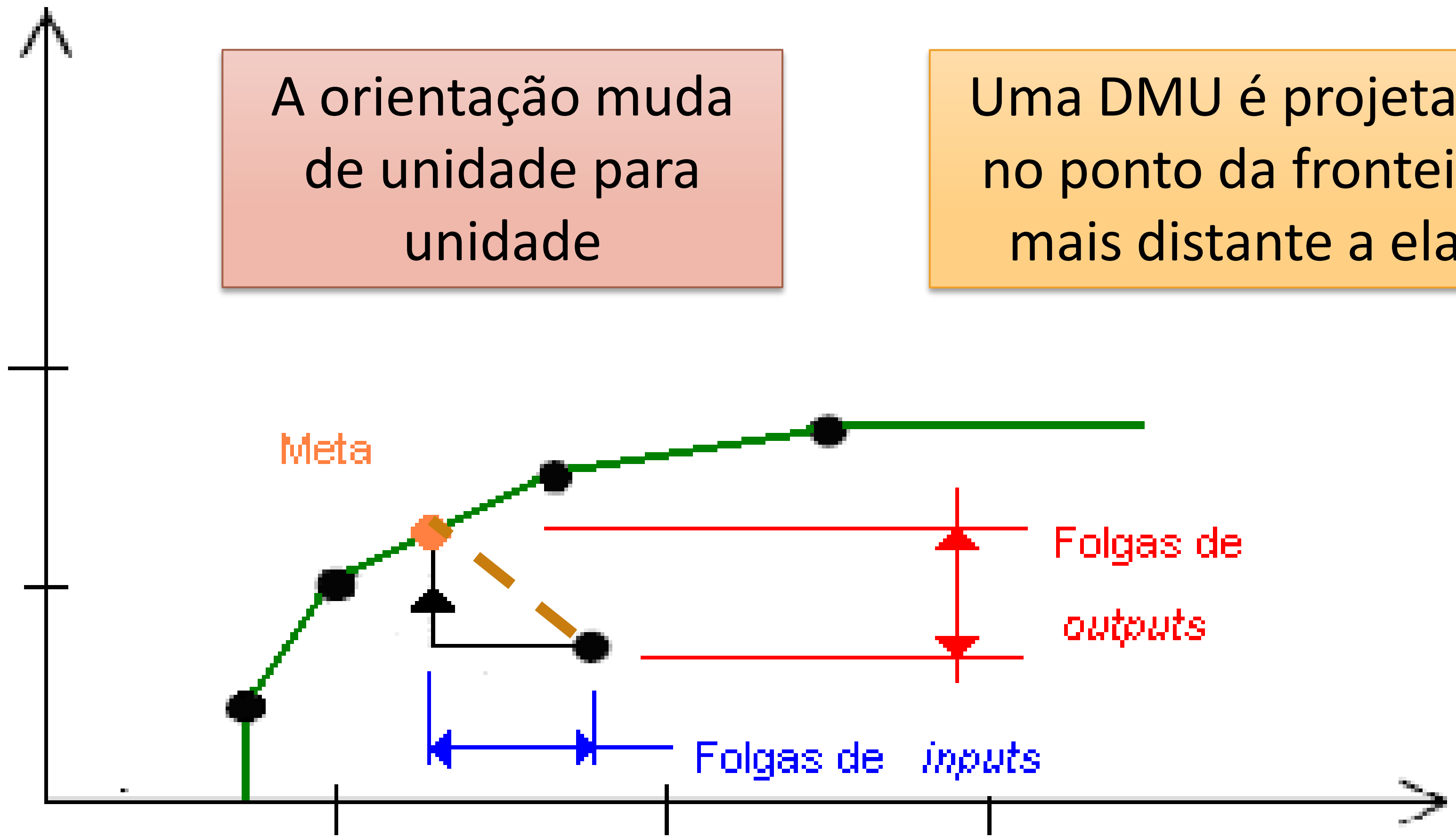
- **Modelos radiais:**
  - Apenas aparecem quando a projeção radial leva a um ponto ineficiente;
  - São as sobras de inputs ou falta de outputs necessárias para que a projeção se torne eficiente;
  - Pode ser interpretado como um viés no modelo;

- **Modelo aditivo;**
  - Não tem projeção radial e as folgas aparecem sempre;
  - A folga é a distância de cada output ou input até a fronteira;
  - A folga é utilizada para a determinação da eficiência;

Folgas e orientação no modelo aditivo

A orientação muda de unidade para unidade

Uma DMU é projetada no ponto da fronteira mais distante a ela;



$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$$

Modelo aditivo na forma do envelope

$$Max \sum_{i=1}^{m} Si + \sum_{j=1}^{n} Sj$$

Pode ser adaptado para retornos de escala constantes, variáveis ou híbridos

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - Si = y_{i0}$$, para todo i

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k + Sj = x_{j0}$$, para todo j

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$$

$\lambda_{k,}$ Sj e Si ≥ 0

Modelo aditivo na forma dos multiplicadores

Pode ser adaptado para retornos de escala constantes, variáveis ou híbridos

$$Min\sum_{i=1}^{m} v_i.x_{j0} - \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot y_{j_0} + w$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i.x_{jk} - \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot y_{j_k} + w \geq 0,$$ para todo k

*u*i ≥ 1 para i = 1,2...m

*v*j ≥ 1 para j = 1,2...n

w sem restrição de sinal

Modelo aditivo x Radial

- **Toda DMU eficiente no modelo aditivo também será no modelo radial correspondente;**
  - DMUs eficientes nos modelos radiais podem não ser no modelo aditivo;
- **O resultado dos modelos radiais tem um sentido prático:**
  - O resultado do modelo aditivo é a soma de valores (folgas) expressos em unidades diversas;
- **Invariância a unidade de medida:**
  - O resultado dos modelos BCC e CCR são invariantes a unidade de medida das variáveis;
  - O resultado do modelo aditivo depende das unidades de medida;
  - **Ex:** Mudar de “Km” para “m” não muda a eficiência nos modelos radiais, mas muda no aditivo

Metas, benchmarks e contribuição relativa

- **Contribuição relativa:**
  - A partir do peso na forma dos multiplicadores;
  - Divisão da contribuição individual de uma variável pelo output ou input virtual total

- **Benchmarks:**
  - Pelas variáveis lambda da forma do envelope;
  - Se forem 0 ou diferente de 0;

Metas no modelo aditivo

- **Procedimento 1:**

$$Meta = x_{j0} - S_j \qquad Meta = y_{i0} + S_i$$

- **Procedimento 2:**

$$Meta = \sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k \qquad Meta = \sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k$$

Exercício

DMUs	Input 1	Input 2	Output
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
$\boxed{\text{F}}$	10	1	1
G	3	7	1

Considere um conjunto de 7 DMUs com dois inputs e um output

O modelo Aditivo com retornos constantes de escala foi rodado

Exercício

DMU	FO	S-1	S-2	S+1	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	Status	Meta I1	Meta I2	Meta O
A	1	1	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0	0	Ineficiente	3	3	1
B	4	4	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0	0	Ineficiente	3	3	1
C	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	Eficiente	8	1	1
D	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	Eficiente	4	2	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	Eficiente	2	4	1
F	2	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	Ineficiente	8	1	1
G	4	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0	Ineficiente	2	4	1

Modelo SBM

- **Slack Based Measure (SBM)**
  - Medida baseada em folgas;

- **Origem:**
  - Desenvolvido por Kaoru Tone em 2001;
  - Artigo publicado no EJOR;
  - “A slacks-based measure of effciency in data envelopment analysis”

- **Características:**
  - Usa as folgas do modelo aditivo para construir um índice de eficiência;
  - O modelo SBM é invariante a unidade de medida;

- **Pode ser expresso na forma dos multiplicadores ou do envelope;**

Eficiência no modelo SBM

- **É um valor entre 0 e 1:**
  - Representa a redução **média** dos inputs e o aumento **médio** dos outputs necessário para se chegar a fronteira;
  - Os valores não mais equiproporcionais, por isso é uma **média**;

- **Pode ser dividido em dois componentes:**
  - Eficiência relativa aos inputs;
  - Eficiência relativa aos outputs;

- **A eficiência global é a multiplicação dos dois componentes**

Medida baseada em folgas

$$E = \frac{1 - \frac{1}{m} * \sum_{j=1}^{m} \frac{Sj^-}{x_{jo}}}{1 + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{Si^+}{y_{io}}}$$

Eficiência dos inputs

Eficiência dos outputs

$$1 - \frac{1}{m} * \sum_{j=1}^{m} sj^-/x_{jo}$$

X

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{si^+}{y_{io}}}$$

Média das folgas relativas

Folga relativa

Modelo SBM fracionário

$$Min\ FO = \frac{1 - \frac{1}{m} * \sum_{j=1}^{m} \frac{Sj^-}{x_{jo}}}{1 + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{Si^+}{y_{io}}}$$

Modelo de programação fracionária

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ = y_{i0}$$, para todo i

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^- = x_{j0}$$, para todo j

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$$

Passível de ajuste

$\lambda_{k,}$ Sj e Si ≥ 0

Linearização do modelo SBM

- **Usa-se o método desenvolvido por Charnes e Cooper (1973);**
- **Deve-se acrescentar uma variável de linearização chamada "t"**
  - Deve-se multiplicar o numerador e o denominador por t;
  - Deve-se igualar o denominador a 1;
- **A variável t deve ser utilizada para ajustar os valores das variáveis obtidas;**

Modelo SBM na forma do envelope

$$Min\ FO = t - \frac{1}{m} * \sum_{j=1}^{m} \frac{Sj^-}{x_{jo}}$$

Após a resolução as varáveis novas devem ser divididas por t para se obter as antigas

Sujeito a:

$$t + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{Si^+}{y_{io}} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ - t \cdot y_{i0} = 0, \text{ para todo i}$$

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^- - t \cdot x_{j0} = 0, \text{ para todo j}$$

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = t$$

Passível de ajuste: constante, variável ou hibrido

$\lambda_{k,}$ Sj e Si ≥ 0 e t > ε

Metas no modelo SBM

- **Procedimento 1:**

$$Meta = x_{j0} - \frac{S_j}{t}$$

$$Meta = y_{i0} + \frac{S_i}{t}$$

- **Procedimento 2:**

$$Meta = \frac{\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k}{t}$$

$$Meta = \frac{\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k}{t}$$

Exercício

DMUs	Input 1	Input 2	Output
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	10	1	1
G	3	7	1

Considere um conjunto de 7 DMUs com dois inputs e um output

O modelo SBM com retornos constantes de escala foi rodado

Exercício

DMU	FO	t	S-1	S-2	S+1	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	M I1	M I2	M O
A	0,83	1,00	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	4	2	1
B	0,62	0,67	0,67	0	0,33	0	0	0	1	0	0	0	6	3	1,5
C	1,00	1,00	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8	1	1
D	1,00	1,00	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	4	2	1
E	1,00	1,00	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	4	1
F	0,90	1,00	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8	1	1
G	0,62	0,67	0	0,67	0,33	0	0	0	0	1	0	0	3	6	1,5

Modelo SBM na forma dos multiplicadores

$$Max\,\xi$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_{i.} x_{j0} - \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot y_{j_0} + \xi = 1$$

$$-\sum_{i=1}^{m} v_{i.} x_{jk} + \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot y_{j_k} \leq 0$$ para todo k

$$u_j \geq \frac{\xi}{m \cdot y_{0j}} \; para \; j = 1{,}2..n$$

$$v_i \geq \frac{1}{n * x_{0i}}, para \;\; i = 1{,}2 \ldots m$$

Modelos SBM orientados

- **O modelo SMB pode ser adaptado para as orientações aos inputs ou aos outputs;**

- **O modelo SBM orientado também está sujeito ao problema dos falsos eficientes;**

- **Teorema:**
  – A eficiência dos SBM orientado será sempre maior que a do SBM sem orientação;
  – Devido ao viés da eficiência das folgas omitidas;

Modelos SBM Orientados

SBM ao Input

$$Min\ FO = 1 - \frac{1}{m} * \sum_{j=1}^{m} Sj^{-}/x_{jo}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0}, \text{ para todo i}$$

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^{-} = x_{j0}, \text{ para todo j}$$

$\lambda_{k,}$ Sj e Si ≥ 0

SBM ao output

$$Max\ FO = 1 + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{Si^{+}}{y_{io}}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0}, \text{ para todo i}$$

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^{-} = x_{j0}\ , \text{ para todo j}$$

$\lambda_{k,}$ Sj e Si ≥ 0

SBM ao input

DMU	FO	S-1	S-2	S+1	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7
A	0,83	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
B	0,62	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0
C	1,00	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
D	1,00	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
E	1,00	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	0,90	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
G	0,62	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0

SBM ao output

DMU	FO	S-1	S-2	S+1	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7
A	0,86	0	0	0,17	0	0	0	0,83	0,33	0	0
B	0,63	0	0	0,58	0	0	0,17	1,42	0	0	0
C	1,00	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
D	1,00	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
E	1,00	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	1,00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
G	0,67	0	1	0,5	0	0	0	0	1,5	0	0

Enhanced Russell Measure (ERM)

- **Desenvolvido por Pastor, Ruiz e Sirvent em 1999;**
  - Artigo também publicado no EJOR;
  - "An enhanced DEA Russell graph efficiency measure"
- **Baseia-se no cálculo de um valor de eficiência para cada input e para cada output:**
  - θj – Eficiência relacionada ao input j
  - ηi – Inverso da eficiência relacionada ao output i;
- **A eficiência total da DMU é uma medida baseada nessas eficiências individuais;**
- **O modelo ERM é equivalente ao SBM**

Enhanced Russell Measure (ERM)

$$Min\ FO = \frac{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\theta_j}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i}$$

A linearização também é feita com o acréscimo de uma variável de linearização "t"

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik}\cdot\lambda_k \geq \eta_i \cdot y_{i0}$$, para todo i

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk}\cdot\lambda_k \leq \theta_j \cdot x_{j0}$$, para todo j

$$\sum_{k=1}^{z}\lambda_k = 1$$

Passível de ajuste

$\lambda_k \geq 0$ $\eta_k \geq 1$ $0 \geq \theta_k \geq 1$

Enhanced Russell Measure (E

Para voltar as variáveis originais, deve-se dividir o valor das variáveis por t

$$Min\ FO = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\theta_j$$

Sujeito a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i = 1$$

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik}\cdot\lambda_k \geq \eta_i \cdot y_{i0}$$, para todo i

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk}\cdot\lambda_k \leq \theta_j \cdot x_{j0}$$, para todo j

$\eta_i - t \geq 0$, para todo i

$\theta_j - t \leq 0$, para todo j

$\lambda_k \geq 0$ e $0 \leq t \leq 1$

Pode ser adaptado para outros tipos de retorno de escala:

$$\sum_{k=1}^{z}\lambda_k = t$$

Metas no modelo ERM

- **Procedimento 1:**

$$Meta = \frac{x_{j0} * \theta}{t}$$

$$Meta = \frac{y_{i0} * \eta}{t}$$

- **Procedimento 2:**

$$Meta = \frac{\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k}{t}$$

$$Meta = \frac{\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k}{t}$$

Exercício

DMUs	Input 1	Input 2	Output
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	10	1	1
G	3	7	1

Considere um conjunto de 7 DMUs com dois inputs e um output

O modelo SBM com retornos constantes de escala foi rodado

Exercício

DMU	FO	t	θ1	θ2	η1	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	λ7	M I1	M I2	M O
A	0,83	1	1	0,67	1	0	0	0	1	0	0	0	4	2	1
B	0,62	0,67	0,57	0,67	1	0	0	0	1	0	0	0	6	3	1,5
C	1,00	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	8	1	1
D	1,00	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	4	2	1
E	1,00	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	2	4	1
F	0,90	1	0,8	1	1	0	0	1	0	0	0	0	8	1	1
G	0,62	1	0,67	0,57	1	0	0	0	0	1	0	0	2	4	1