Outros modelos radiais: IRS, DRS e FDH

Enzo Barberio Mariano

Questões

1. Qual a diferença entre retornos constantes e retornos variáveis de escala?
2. Qual a origem do modelo BCC?
3. O que caracteriza os retornos de escala crescente, decrescente e constante?
4. Quais os dois principais fatores que afetam a produtividade de uma empresa?
5. O que é escala ótima de produção?
6. O que é eficiência de escala?
7. Qual a diferença entre os modelos matemáticos do BCC e CCR na forma dos multiplicadores? E na forma do envelope?
8. Quais são os dois métodos para se determinar os retornos de escala?

Características de um modelo radial

- **Modelos radiais:**
  - CCR, BCC, IRS, DRS e FDH
- **Só tem duas orientações possíveis:**
  - Ao input e ao output;
- **A eficiência é:**
  - Redução equiproporcional do inputs necessário até a fronteira
  - Aumento equiproporcional dos outputs necessário até a fronteira
- **A eficiência tem um viés causado pelas folgas;**

Modelos Híbridos

- **Modelo IRS ou NDRS;**
  - Modelo de retornos crescentes de escala (IRS) ou Modelo de retornos de escala não decrescentes (NDRS);
  - Pode apresentar retornos constantes ou crescentes

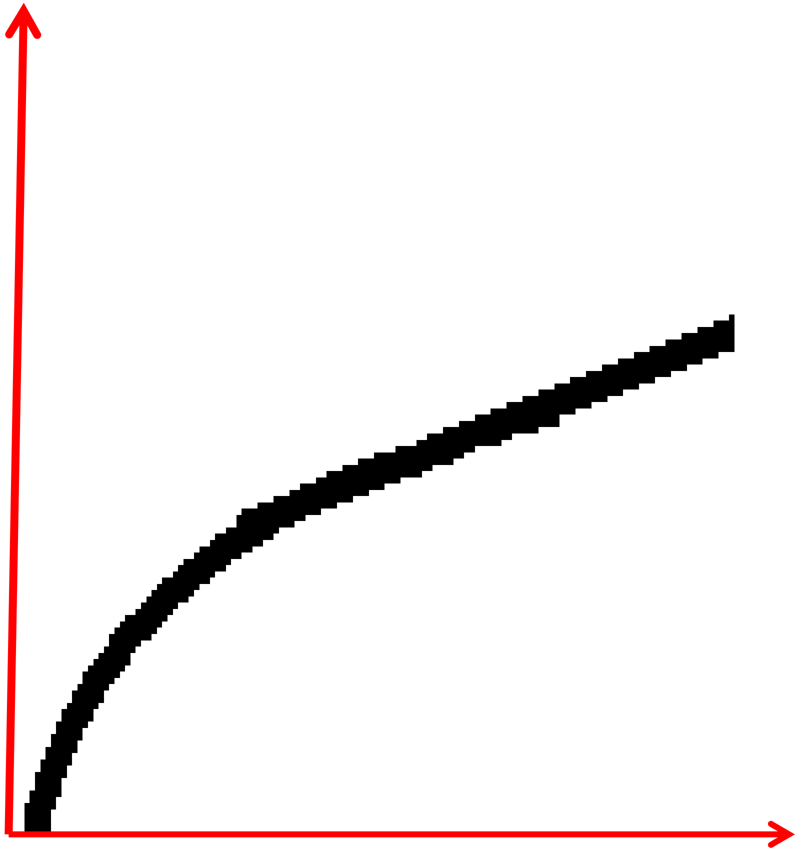
- **Modelo DRS ou NIRS;**
  - Modelo de retornos decrescentes de escala (DRS) ou Modelos de retornos não crescentes de escala (NIRS)
  - Pode apresentar retornos constantes ou decrescentes;

Utilização

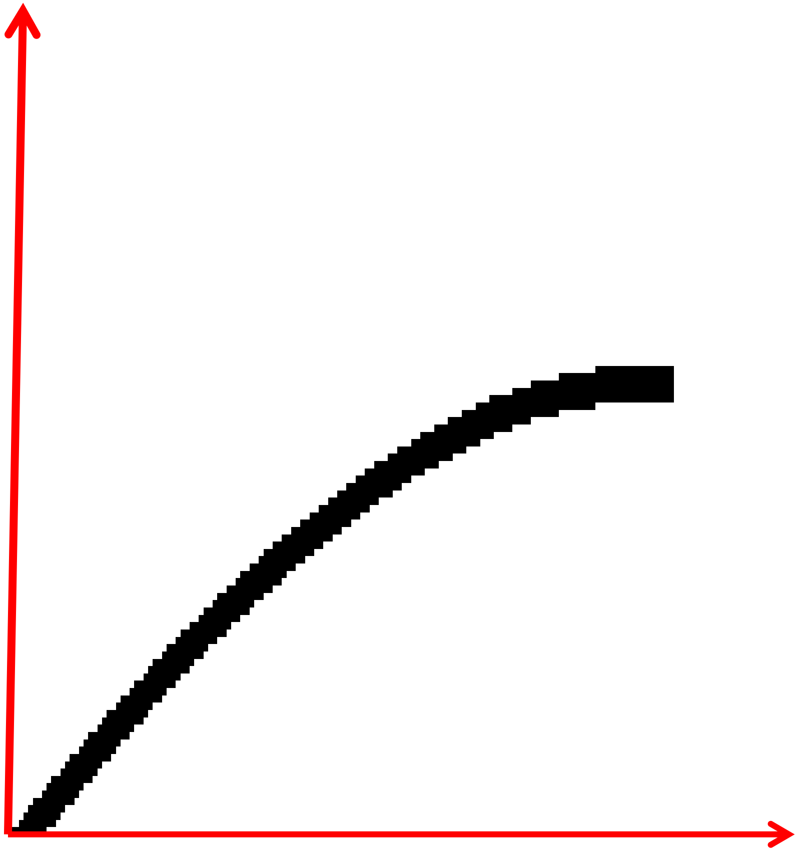
- **Modelo IRS ou NDRS;**
  - As unidades de baixa escala são comparadas com empresas de escala semelhante;
  - As unidades de alta escala são comparadas com empresas que operam em escala ótima (mais produtivas);

- **Modelo DRS ou NIRS;**
  - As unidades de alta escala são comparadas com empresas de escala semelhante;
  - As unidades de baixa escala são comparadas com empresas que operam em escala ótima (mais produtivas);

Fronteiras



Fronteira IRS



Fronteira DRS

Modelos Híbridos

	Modelos Primais	Modelos Duais
CCR	Sem w	Sem restrição
BCC	w sem restrição de sinal	$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$
DRS ou NIRS	w ≤ 0	$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k \leq 1$
IRS ou NDRS	w ≥ 0	$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k \geq 1$

CCR orientado aos *inputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MAX} \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{ij} \leq 0 \text{ , } \quad \text{para} \quad k = 1,2 \ldots..z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

BCC orientado aos *inputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0} + w$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{ij} + w \leq 0, \quad \text{para} \quad k = 1,2 \ldots.z$$

u_i e $v_j \geq \varepsilon$

w sem restrição de sinal

DRS orientado aos *inputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0} + w$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{ij} + w \leq 0, \quad \text{para} \quad k = 1,2 \ldots..z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

$$w \leq 0$$

IRS orientado aos *inputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{i0} + w$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_{ij} + w \leq 0, \quad \text{para} \quad k = 1,2 \ldots..z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

$$w \geq 0$$

Modelo CCR *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta - \varepsilon * (\sum_{i=1}^{n} S_i^{+} + \sum_{j=1}^{m} S_j^{-})$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^{-} = 0$$, para i = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0},$$ para j = 1,2,3....n

θ e λ ≥ 0

Modelo BCC *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta - \varepsilon * (\sum_{i=1}^{n} S_i^{+} + \sum_{j=1}^{m} S_j^{-})$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^{-} = 0$$, para i = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0},$$ para j = 1,2,3....n

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$$

θ e $\lambda \geq 0$

Modelo DRS *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta - \varepsilon * \left(\sum_{i=1}^{n} S_i^{+} + \sum_{j=1}^{m} S_j^{-}\right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^{-} = 0$$, para i = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0}$$, para j = 1,2,3....n

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k \leq 1$$

θ e λ ≥ 0

Modelo IRS *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta - \varepsilon * (\sum_{i=1}^{n} S_i^{+} + \sum_{j=1}^{m} S_j^{-})$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^{-} = 0$$, para i = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^{+} = y_{i0},$$ para j = 1,2,3....n

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k \geq 1$$

θ e λ ≥ 0

Método 3 - determinação dos retornos de escala

- Comparar o resultado dos modelos CCR, BCC, IRS e DRS

- **Se BCC = CCR (= IRS = DRS)**
  - Retornos Constantes de Escala;

- **Se BCC ≠ CCR e BCC = IRS**
  - Retorno Crescentes de Escala

- **Se BCC ≠ CCR e BCC = DRS**
  - Retornos Decrescentes de Escala

Exercício

DMU	CCR	BCC	IRS ou NDRS	DRS ou NIRS	Retorno de escala	Eficiência de escala
A	0,5	0,9	0,5	0,9	Decrescente	0,55
B	0,6	0,6	0,6	0,6	Constante	1
C	1	1	1	1	Constante	1
D	0,4	0,7	0,7	0,4	Crescente	0,57
E	0,7	1	0,7	1	Decrescente	0,7
F	0,3	0,5	0,5	0,3	crescente	0,6

Modelo FDH

- **Free Disposal Hull (FDH):**
  - Livre disposição de envoltória;
  - Desenvolvido por Deprins, Simar e Tulkens (1984)

- **Modelos CCR, BCC ou híbridos;**
  - Cada modelo é comparado com uma DMU real ou virtual
  - DMU virtual: Combinação linear das DMUs reais (meta);

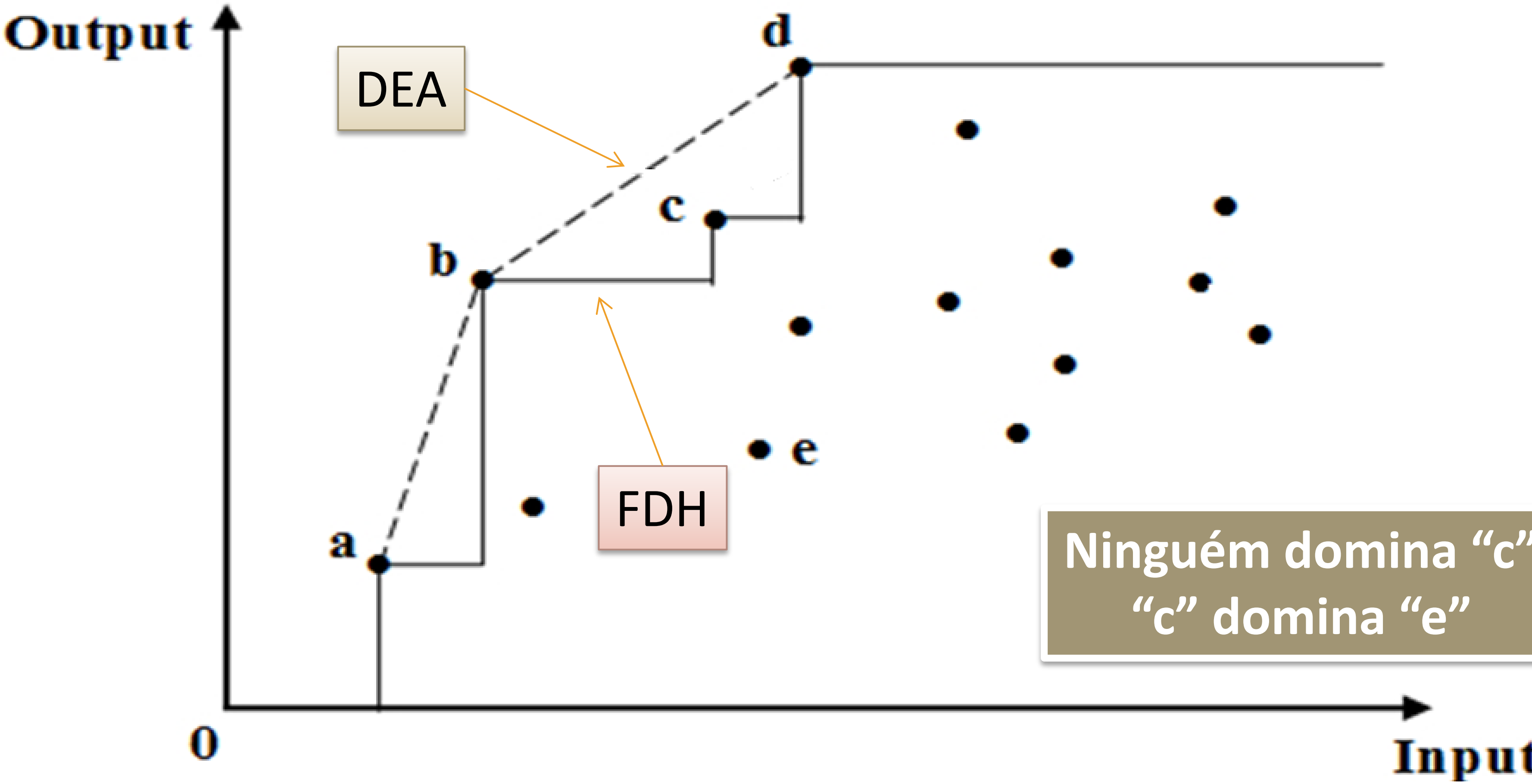
- **Modelo FDH:**
  - Uma DMU é comparada apenas com DMUs reais;
  - A eficiência se baseia em relações de dominância;
  - Fronteira na forma de degraus;

Relação de dominância

- **Uma DMU A pode-se dizer dominante em relação a uma DMU B se:**
  - Todos os inputs de A forem menores que os de B
  - Todos os outputs de A forem maiores que os de B;

- **No modelo FDH uma DMU está na fronteira sempre eu não houver nenhuma outra que a domine;**

Fronteira FDH



Ninguém domina “c”
“c” domina “e”

Modelo FDH x BCC

- **Eficientes:**
  - Toda DMU eficiente no modelo BCC é eficiente no modelo FDH;
  - Nem toda DMU eficiente no modelo FDH é eficientes no modelo BCC;
- **O Modelo FDH gera um grande número de empates**
- **O modelo FDH é expresso apenas na forma do envelope:**
  - Pode ser expresso nas duas orientações
- **O modelo original tem retornos variáveis de escala;**
  - Pode ser adaptado para outros tipos de retornos de escala

Modelo FDH *input* orientado na forma do envelope

$$Min\,\theta - \varepsilon * (\sum_{i=1}^{n} S_i^+ + \sum_{j=1}^{m} S_j^-)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{z} x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^- = 0$$, para i = 1,2,3...m

$$\sum_{k=1}^{z} y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ = y_{i0},$$ para j = 1,2,3....n

$$\sum_{k=1}^{z} \lambda_k = 1$$

$$\theta \geq 0 \text{ e } \lambda \in \{0,1\}$$

Comparação dos modelos radiais

Modelo	Retornos de escala	Orientação	Fronteira
CCR	Constante	Ao input ou output	DMUs reais ou virtuais
BCC	Variável	Ao input ou output	DMUs reais ou virtuais
NDRS	Não decrescente	Ao input ou output	DMUs reais ou virtuais
NIRS	Não crescente	Ao input ou output	DMUs reais ou virtuais
FDH	Variável	Ao input ou output	Apenas DMUs reais