



# Modelo BCC e retornos de escala

Enzo Barberio Mariano



# Questões - revisão

1. A que se refere o conceito de dualidade em programação linear?
2. O que é o conjunto de possibilidades de produção?
3. Qual a principal característica de um conjunto cônico de dados?
4. A que se refere o conceito de folgas nos modelos radiais?
5. O que é uma unidade fracamente eficiente?
6. Como se determina os benchmarks das DMUs ineficientes?
7. Como os benchmarks podem ser utilizados para o desempate de unidades eficientes?
8. Qual a diferença entre projeção radial na fronteira e meta?
9. Quais as duas formas de se determinar as metas de uma DMU ineficiente?



# Origem do modelo BCC

- **Desenvolvido por:**
  - Rajiv Banker, Abraham Charnes (1917-1992) e William Cooper (1914-2012);
- **Título:**
  - “Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis.”
- **Revista:**
  - *Management Science* 30(9): 1078-1092;
- **Ano:** 1984

Citações no Scopus : 4195

Citações no web of Science : 3177

# Modelo BCC ou VRS

- **Retornos Variáveis de Escala (VRS):**
  - Parte do pressuposto de que os *outputs* não variam proporcionalmente aos *inputs*;
  - Fronteira convexa: mais parecida com a função de Cobb-Douglas;
- **O modelo BCC compara uma DMU apenas com:**
  - As que operem em escala semelhante a sua;
  - A produtividade máxima varia com a escala produtiva (tamanho da produção);
- **O modelo BCC isola a influência da escala de produção da eficiência:**
  - Calcula a **eficiência técnica pura**



# Escala de produção

- **A eficiência produtiva é influenciada:**
  - Pela habilidade da DMU em transformar inputs e outputs (eficiência técnica);
  - Pelo tamanho da produção (eficiência de escala);
- **Escala:**
  - Se refere a alteração simultânea de todos os inputs e outputs sem mexer em suas proporções
- **Escala ótima de produção:**
  - É a escala que garante o máximo aproveitamento dos inputs;
  - Por questões de mercado, nem sempre uma DMU tem condições de operar em sua escala ótima;



# Eficiência técnica Pura

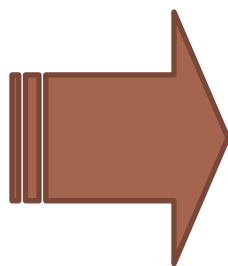
- A produtividade máxima ( $P_{\max}$ ) que uma DMU pode atingir depende da escala em que ela opera;
- **Eficiência técnica pura:**
  - É obtida comparando a produtividade de uma DMU com a produtividade máxima relativa a sua escala de produção;

$$\text{Eficiência} = P / [P_{\max}(\text{escala})]$$



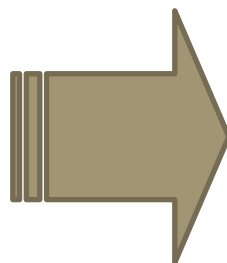
## Tipos de eficiência de cada modelo

Modelo CCR



Eficiência  
produtiva total  
(fronteira linear)

Modelo BCC



Eficiência técnica pura  
(fronteira convexa)

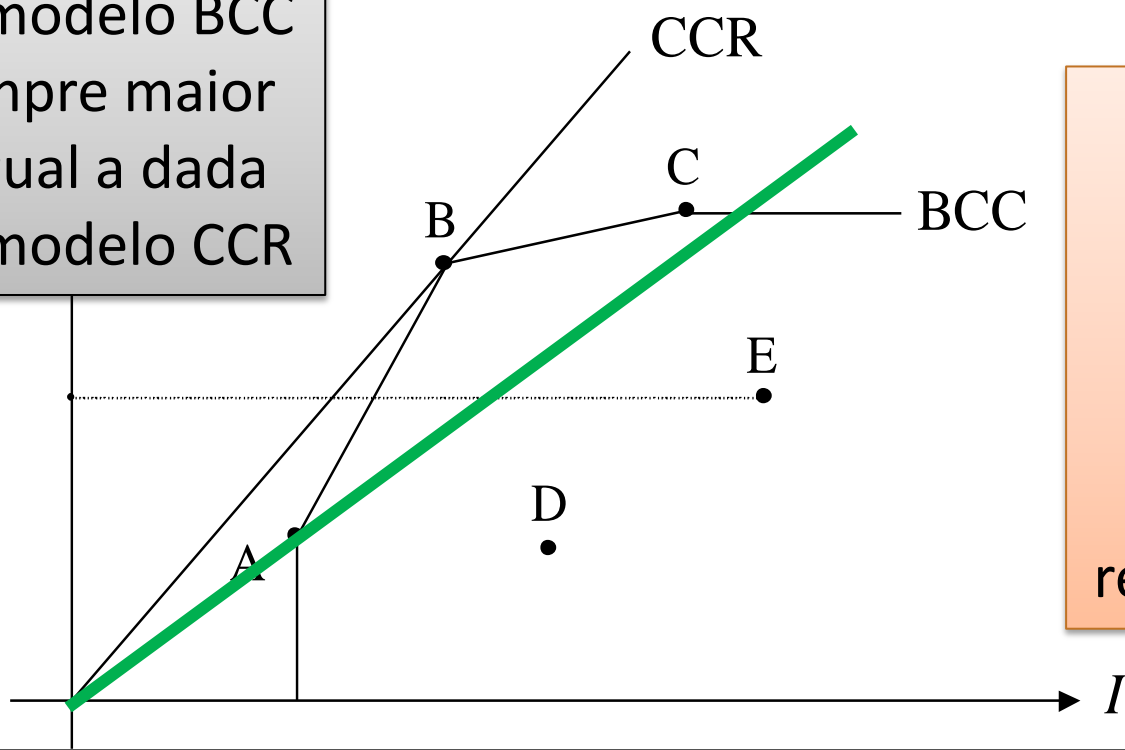


# Comparação entre as Fronteiras CCR e BCC

A eficiência dada pelo modelo BCC é sempre maior ou igual a dada pelo modelo CCR

O ponto B é mais produtivo do que o A

A e B são igualmente eficientes, pois operam com produtividade máxima em suas respectivas escalas







# Eficiência de escala

- **Escala ótima de produção:**
  - É o tamanho em que uma DMU consegue operar com a máxima produtividade;
  - É o ponto em que se atinge o maior valor de  $P_{\max}$
- **Eficiência de escala**
  - Mensura a capacidade de uma empresa de operar próxima a sua escala ótima de produção;
  - Quanto mais próxima da escala ótima, maior é a sua eficiência de escala

# Cálculo da Eficiência de Escala

A eficiência de Escala pode ser obtida a partir das eficiências dos modelos CCR e BCC:

$$\text{Eficiência de escala} = \text{Eficiência CCR} / \text{Eficiência BCC}$$

A eficiência de escala não diz se a DMU está operando acima ou abaixo de sua escala ótima, sendo necessário para isso identificar os retornos de escala

# Exercício

DMU	Eficiência Total (CCR)	Eficiência técnica pura (BCC)	Eficiência de escala
A	0,8	0,9	<b>0,88</b>
B	<b>0,7</b>	1	0,7
C	0,6	<b>1</b>	0,6
D	0,4	0,7	<b>0,57</b>
E	0,4	<b>0,8</b>	0,5
F	<b>0,3</b>	0,3	1
G	0,6	0,7	<b>0,86</b>
H	<b>1</b>	1	1



# Tipos de Retorno de Escala

- **Crescente:**
  - O aumento no número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente maior no número de *outputs*
- **Constante:**
  - O aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento proporcional nos *outputs*
- **Decrescente:**
  - O aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente menor no número de *outputs*



# Tipos de Retorno de Escala

- **Crescente:**
  - A DMU está operando abaixo da sua escala ótima.
  - Deve aumentar a sua produção para ser mais produtiva;
- **Constante:**
  - A DMU está operando na sua escala ótima.
  - Deve permanecer na mesma escala de produção;
- **Decrescente:**
  - A DMU está operando acima da sua escala ótima;
  - Deve diminuir a produção para ser mais produtiva;

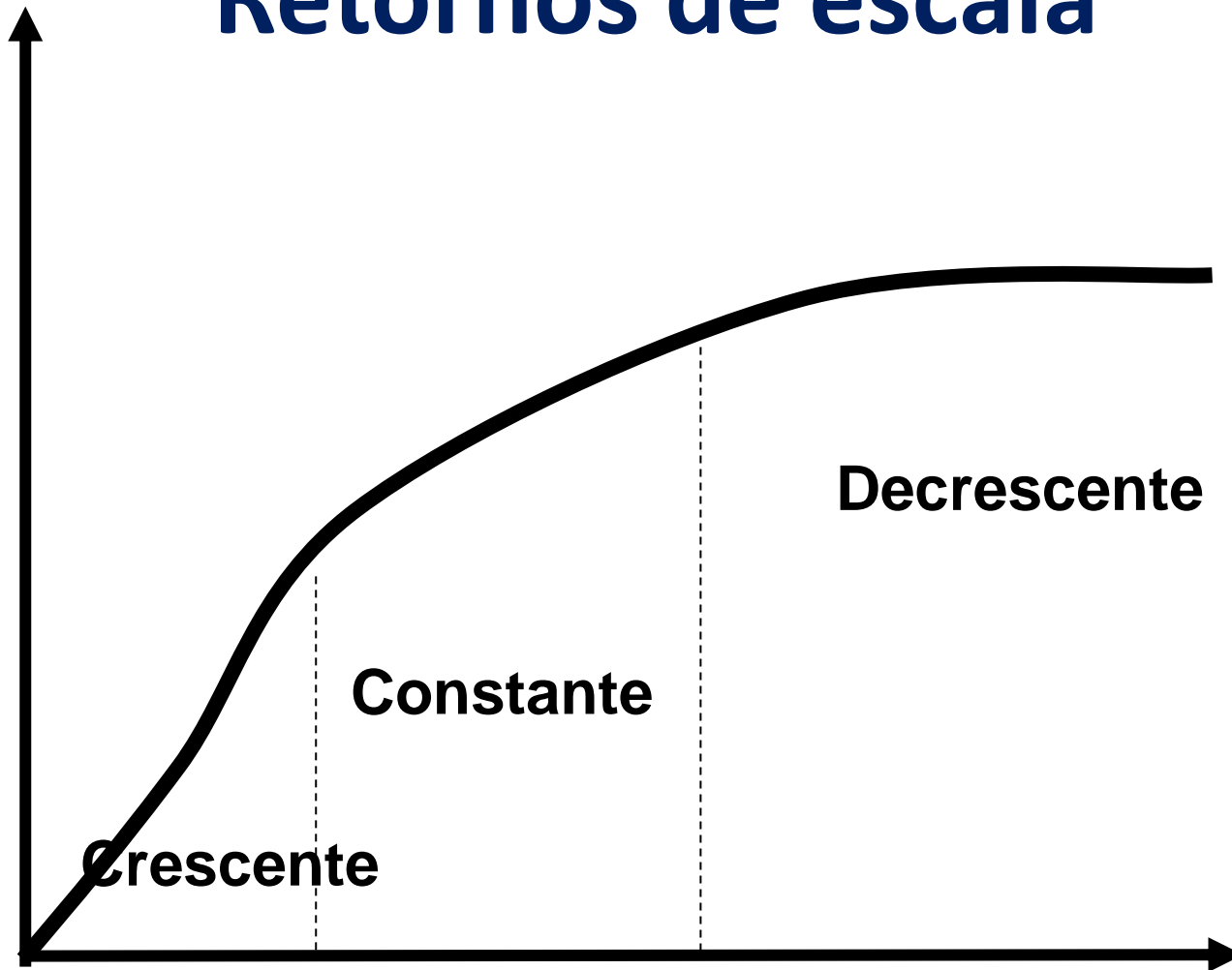
# Exemplo

**Input = 3 → Output = 5**

- **Crescente:**
  - Input = 6 → output = 12
- **Constante**
  - Input = 6 → output = 10
- **Decrescente**
  - Input = 6 → output = 8



# Retornos de escala





# Possibilidades

Retorno de escala	Eficiência técnica pura (modelo BCC)	
	Eficiente	Ineficiente
<b>Constante</b> <i>(eficiência de escala)</i>	DMU atua sem desperdícios e na escala ótima (eficiente no CCR)	DMU atua na escala ótima, mas desperdiça recursos.
<b>Crescente</b> <i>(ineficiência de escala)</i>	DMU atua sem desperdícios e abaixo escala ótima.	DMU atua abaixo da escala ótima e desperdiça recursos.
<b>Decrescente</b> <i>(ineficiência de escala)</i>	DMU atua sem desperdícios e acima da escala ótima.	DMU atua acima da escala ótima e desperdiça recursos.





## Resultado das orientações

- **No modelo CCR:**
  - As orientações ao input e ao output dão o mesmo resultado;
- **No modelo BCC:**
  - As orientações aos inputs e aos outputs dão resultados distintos;
  - Tanto em relação a eficiência quanto aos retornos de escala;

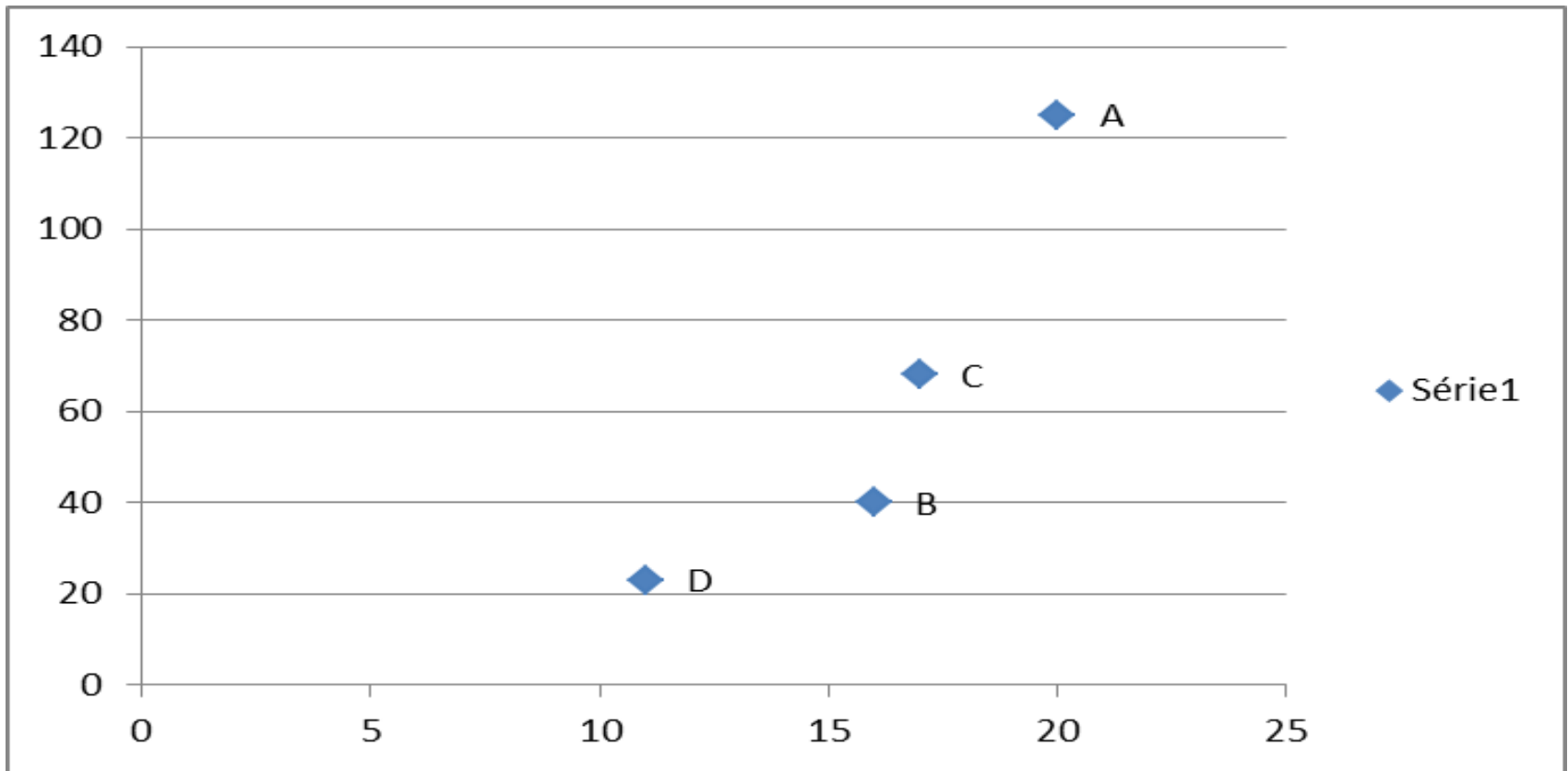
A eficiência de escala e a os retornos de escala são relativos a projeção e não a DMU em sí

# Modelo agência bancária: 1 input e 1 output

Agência	Empregados	Transações	Produtividade
A	20	125	6,25
B	16	40	2,5
C	17	68	4
D	11	23	2,09

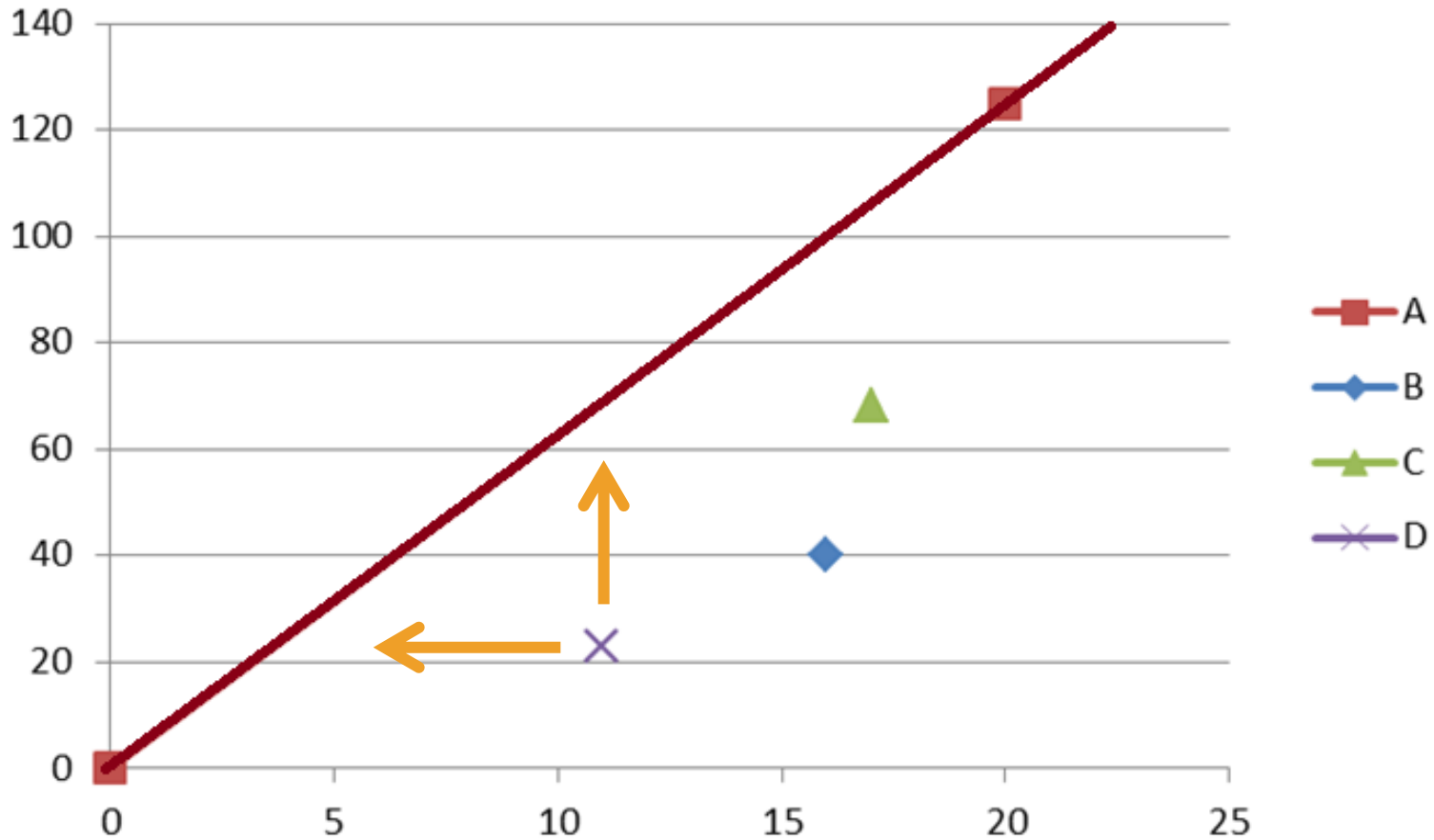


# Gráfico das agências



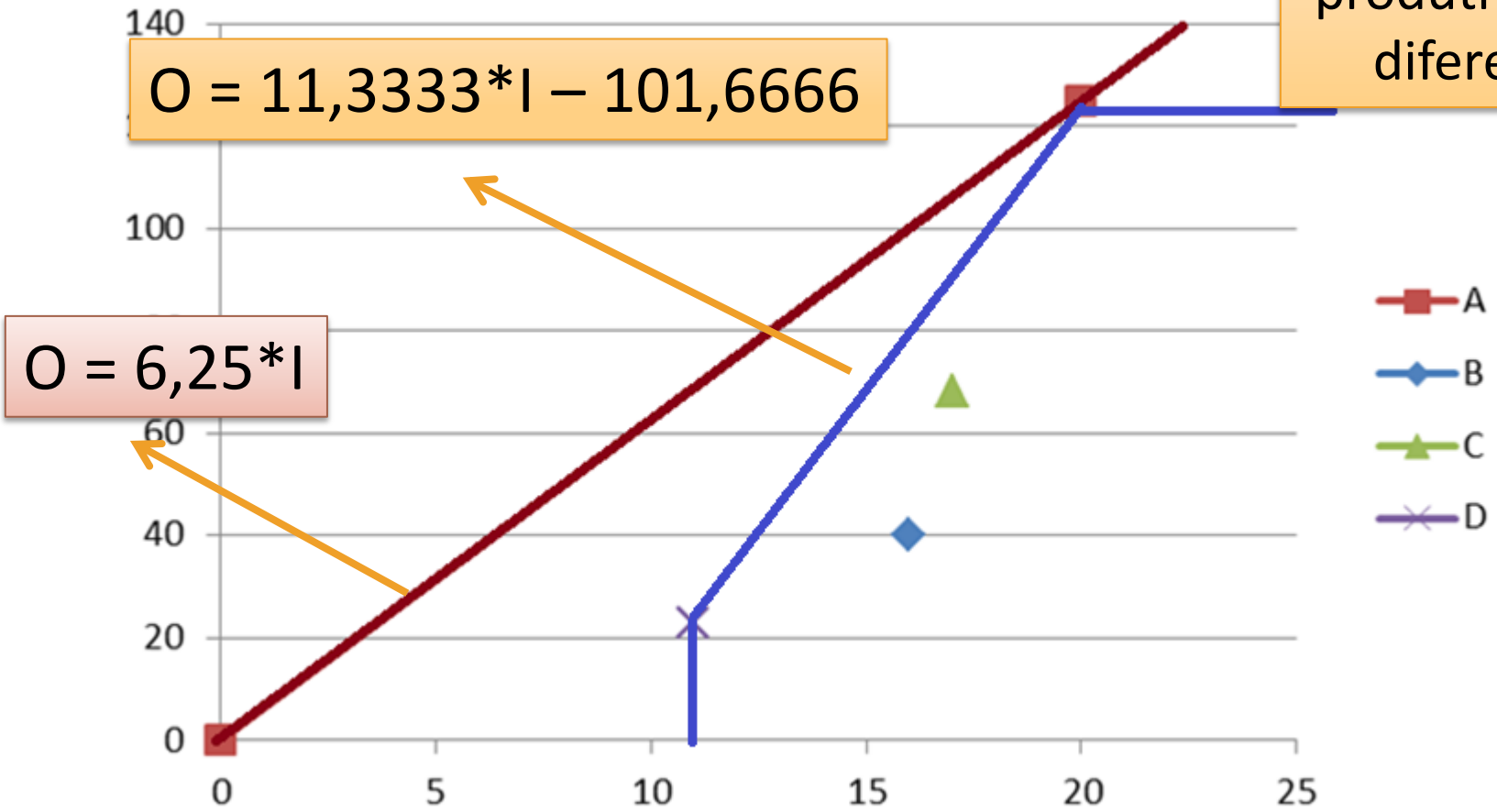


# Fronteira CCR



# Fronteira BCC

Cada ponto do segmento de reta terá uma produtividade diferente



# Cálculo da projeção

Orientação ao input	Atual	Projeção	Eficiência BCC
A	20	20	1
B	16	12,5	0,78
C	17	14,97	0,88
D	11	11	1

Orientação ao output	Atual	Projeção	Eficiência BCC
A	125	125	1
B	40	79,66	0,50
C	68	91	0,74
D	23	23	1



# Eficiências CCR e BCC

Agência	Eficiência CCR	Eficiência BCC (input)	Eficiência BCC (output)
A	1	1	1
B	0,4	0,78	0,50
C	0,64	0,88	0,85
D	0,33	1	1



# Eficiência de escala

Agência	Eficiência de escala (input)	Eficiência de escala (output)	Tipo de retorno de escala (input)	Tipo de retorno de escala (output)
A	1	1	Constante	Constante
B	0,51	0,8	Crescente	Crescente
C	0,72	0,88	Crescente	Crescente
D	0,33	0,33	Crescente	Crescente





# Modelo BCC

- **Modelo radial:**
  - A eficiência representa a redução equiproporcional dos inputs ou aumento equiproporcional dos outputs necessário para se chegar a fronteira;
- **A fronteira é linear por partes:**
  - Também possui o problema das folgas e dos falsos eficientes;
- **Muda apenas a convexidade da fronteira**



# Modelo BCC

- **Forma dos multiplicadores:**
  - Determina os pesos de cada unidade;
  - Orientação:
    - Ao input
    - Ao output
  
- **Forma do envelope:**
  - Determina os benchmarcks e metas;
  - Orientação:
    - Ao input
    - Ao output

Envolve o acréscimo de uma variável  $w$  (fator de escala) sem restrição de sinal

Envolve o acréscimo de uma restrição de convexidade

# Conjunto de possibilidades de produção

- **Conjunto cônico (retornos constantes de escala):**
  - Todo ponto pode ser escrito como uma combinação linear cônica dos outros pontos de um conjunto
  - Com  $\lambda$ s positivos (combinação linear cônica)
- **Conjunto convexo (retornos variáveis de escala):**
  - Todo ponto pode ser escrito como uma combinação linear convexa dos outros pontos de um conjunto
  - Com  $\lambda$ s positivos e somando 1 (combinação linear convexa)

$$x_{j0} = \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k, \forall j$$

$$y_{i0} = \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k, \forall i$$



## Modelo BCC *input* orientado na forma do envelope

$$\text{Min } \theta - \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} + S_j^- = 0, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ = y_{i0}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$$

$$\theta \text{ e } \lambda \geq 0$$



## Modelo BCC *output* orientado na forma do envelope

$$\text{Max } \eta + \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^- = x_{j0}, \quad \text{para } j=1,2,3,\dots,n$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - \eta \cdot y_{i0} - S_i^+ = 0, \quad \text{para } i=1,2,3,m$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$$

$$\eta \text{ e } \lambda \geq 0$$



## Variável de escala ( $w$ )

- A restrição de convexidade vira uma variável no modelo dos multiplicadores
- Essa variável pode ser negativa ou positiva;
- Pode ser utilizada para interpretar o tipo de retorno de escala



## BCC orientado aos *inputs* na forma dos multiplicadores

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} \quad (+ w)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{ij} \quad (+ w) \leq 0, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

$w$  sem restrição de sinal



## Modelo BCC orientado aos *outputs na forma dos multiplicadores*

$$\text{MIN} \quad \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{ij} \quad (-w)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ij} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{ij} \quad (+w) \leq 0 \quad , \quad \text{para } k = 1, 2 \dots z$$

$$u_i \text{ e } v_j \geq \varepsilon$$

$w$  sem restrição de sinal





# Determinação dos retornos de escala

- Não adianta conhecer a eficiência de escala se não se souber em que direção agir;
- Métodos básicos para determinação dos retornos de escala:
  - **Pelo modelo BCC na forma dos multiplicadores:**
    - Através da variável de escala  $w$ ;
  - **Pelo modelo CCR na forma do envelope:**
    - Através da soma das variáveis  $\lambda$ ;



# Interpretação pelo BCC multiplicadores

Variável $w$	Situação	Interpretação
Positivo	Em todas as soluções ótimas	Retorno crescente de escala
Negativo	Em todas as soluções ótimas	Retorno decrescente de escala
Zero	Em qualquer solução	Retorno constante de escala



# Interpretação pelo modelo CCR envelope

Variável $\lambda$	Situação	Interpretação
$\sum_{k=1}^z \lambda_k > 1$	Em todas as soluções	Retornos Decrescentes de Escala
$\sum_{k=1}^z \lambda_k < 1$	Em todas as soluções	Retornos Crescentes de Escala
$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$	Em qualquer solução	Retornos constantes de Escala



# Problema das variáveis

- **Podem existir unidades que possuem múltiplas soluções ótimas;**
  - Tanto no modelo CCR quanto no BCC;
  - Para essas unidades as interpretações anteriores não são confiáveis;
- Seiford e Zhu (1999) apresentaram 3 métodos confiáveis para determinar os retornos de escala



# Método 1 - BCC multiplicadores

Variável w	Situação	Interpretação
Positivo	$BCC \neq CCR$	Retorno crescente de escala
Negativo	$BCC \neq CCR$	Retorno decrescente de escala
$CCR = BCC$		Retorno constante de escala



# Exercício

DMU	$\Theta$ CCR	$\Theta$ BCC	Variável w	Retornos de escala	Eficiência de escala
1	0,8	1	-1,0	Decrescente	0,8
2	0,4	0,6	3,4	Crescente	0,66
3	1	1	-0,7	Constante	1
4	0,8	0,8	0	Constante	1
5	0,5	0,7	3,0	Crescente	0,71
6	1	1	0	Constante	1
7	0,7	0,9	-2,3	Decrescente	0,77
8	0,6	1	3,6	Crescente	0,6
9	0,5	0,9	-5,7	Decrescente	0,55



# Método 2 - CCR envelope

Variável $\lambda$	Situação	Interpretação
$\sum_{k=1}^z \lambda_k > 1$	BCC $\neq$ CCR	Retornos Decrescentes de Escala
$\sum_{k=1}^z \lambda_k < 1$	BCC $\neq$ CCR	Retornos Crescentes de Escala
CCR = BCC		Retornos constantes de Escala



# Exercício – Coeficientes CCR

DMU	$\Theta$ CCR	$\Theta$ BCC	Coeficientes CCR									Retornos de escala	Eficiência de escala
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$		
1	0,8	1	0	0	0,6	0	0	0,5	0	0	0	Decrescente	0,8
2	0,4	0,6	0	0	0,4	0	0	0,5	0	0	0	Crescente	0,66
3	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	Constante	1
4	0,8	0,8	0	0	0,3	0	0	0,6	0	0	0	Constante	1
5	0,5	0,7	0	0	0,2	0	0	0,7	0	0	0	Crescente	0,71
6	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	Constante	1
7	0,7	0,9	0	0	0,3	0	0	0,8	0	0	0	Decrescente	0,77
8	0,6	1	0	0	0,5	0	0	0,4	0	0	0	Crescente	0,6
9	0,5	0,9	0	0	0,6	0	0	0,7	0	0	0	Decrescente	0,55