



# Modelo CCR - forma do Envelope

Enzo Barberio Mariano

# Questões

1. Explique o que representa a eficiência dada por um modelo radial?
2. O que significa um modelo operar com retornos constantes de escala?
3. Explique a ideia por trás do modelo CCR fracionário orientado ao input e ao output?
4. Explique o processo de linearização do modelo fracionário para que se chegue a forma dos multiplicadores?
5. Como deve ser interpretado o peso atribuído pela DEA?
6. Como se determina contribuição relativa de uma variável?

# Conceitos básicos do modelo do envelope

1. Dualidade;
2. Projeção radial;
3. Conjunto de possibilidade de produção (P);
4. Folgas;
5. Eficiência forte e fraca;
6. Metas e Benchmarks



# Dualidade

- **Para todo problema de programação linear:**
  - Existe um outro problema a ele associado chamado seu **Dual**;
  - O problema original é chamado **Primal**;
- **O resultado da função objetivo do **Primal** e do **Dual** são iguais;**
  - Dual e Primal fornecem possibilidades complementares de análise;

# Regras de conversão

1. Cada restrição do Primal equivale a uma variável do Dual;
2. Cada variável do Primal equivale a uma restrição do Dual;
3. Coeficientes da função objetivo e termos independentes são trocados;
4. Problemas de maximização viram de minimização e vice-versa;
5. Os sinais das restrições são trocados.



# Forma do envelope da DEA

- Os modelos fracionários do DEA, após a linearização, são chamados:
  - “Forma dos multiplicadores”:
- O modelo Dual é chamado de “forma do envelope”:
  - Permite achar as metas para que cada DMU ineficiente se torne eficiente;
  - Permite achar quais unidades eficientes são benchmarks das unidades ineficientes;
  - Permite identificar unidades falsamente eficientes;
  - Permite determinar os retornos de escala.



# Modelo Primal x Dual

- **Número de restrições:**
  - **Primal**: Há uma restrição para cada DMU, uma para cada variável e uma restrição adicional;
  - **Dual**: Há uma restrição para cada input e cada output;
- **Número de variáveis de decisão:**
  - **Primal**: Há uma variável para cada input e cada output ( $u_i$  e  $v_j$ )
  - **Dual**: Há uma variável para cada DMU ( $\lambda_k$ ), uma  $n$  para cada input e output ( $S$ ) e mais uma adicional ( $\theta$  ou  $\eta$ );



# Notação dos modelos duais

- **Variáveis de decisão:**
  - $\theta$ : Eficiência;
  - $\eta$ : Inverso da eficiência
  - $\lambda_k$ : Contribuição da DMU para a meta;
  - $S_i^+$  e  $S_j^-$ : Folgas dos outputs e inputs;
- **Parâmetros do modelo:**
  - $y_{i0}$ : Output  $i$  da DMU em análise;
  - $x_{j0}$ : Input  $j$  da DMU em análise;
  - $y_{ik}$ : Output  $i$  da DMU  $k$ ;
  - $x_{jk}$ : Input  $j$  da DMU  $k$ .





# Modelo CCR *input* orientado na forma do envelope – com folgas

$$\text{Min } \theta - \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = \theta \cdot x_{j0} - S_j^- \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = y_{i0} + S_i^+ \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\theta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$



# Modelo CCR *output* orientado na forma do envelope – com folgas

$$Max \eta + \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = x_{j0} - S_j^- \quad \text{para } j=1,2,3\dots m$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = \eta \cdot y_{i0} + S_i^+ \quad \text{para } i=1,2,3,n$$

$$\eta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$

# Projeção radial

- No modelo CCR a eficiência é baseada na:
  - **Orientação ao input:** Redução equiproporcional de todos os inputs necessário para se atingir a fronteira; ou

$$\text{Projeção radial} = (\theta \cdot x_{j0}, y_{i0})$$

- **Orientação ao output:** Aumento equiproporcional de todos os outputs necessário para se atingir a fronteira;

$$\text{Projeção radial} = (x_{j0}, \eta \cdot y_{i0})$$

A projeção radial não muda as proporções de inputs e outputs



# Conjunto de possibilidade de produção (P)

- São todas as combinações de inputs e outputs em que uma empresa é capaz de produzir;
  - Área abaixo da fronteira de produção;
- A fronteira de produção é limitada pela tecnologia do setor;
  - **Tecnologia:** grau de conhecimento técnico sobre a transformação de entradas em saídas
- O conjunto P quando se considera retornos constantes de escala:
  - É um subespaço vetorial conico;

# Propriedades de um cone

- Dado um ponto A  $(x_A, y_A)$  e B  $(x_B, y_B)$  pertencentes a um espaço cônico.
  - Toda combinação linear entre A e B pertencerá a esse conjunto.
- Qualquer ponto de um conjunto convexo pode ser escrito como um combinação linear dos outros pontos do conjunto:
  - Com  $\lambda$ s positivos (combinação cônica)

$$y_{i0} = \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k, \forall i$$

$$x_{j0} = \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k, \forall j$$



# Função objetivo

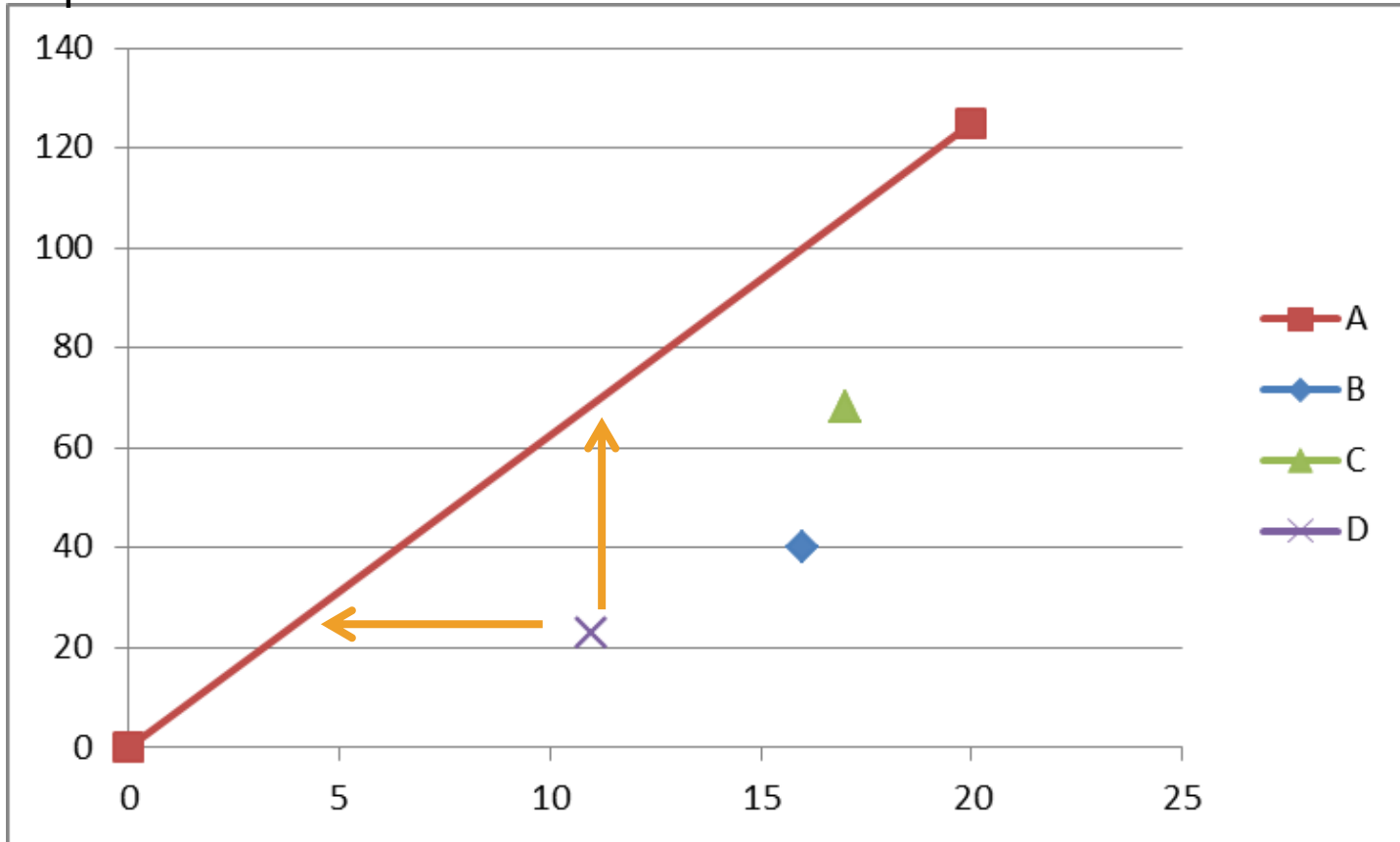
- **Orientação ao input : Min  $\Theta$** 
  - Busca-se a maior redução possível para o vetor de inputs, dentro do conjunto P;
  
- **Orientação ao output: Max  $\eta$** 
  - Busca-se o maior aumento possível para os outputs, dentro do conjunto P;

**Isso levará qualquer ponto P para a fronteira**



# Fronteira CRS

Output virtual



Input virtual

# Restrições do modelo Dual

**Orientação ao input: Min  $\theta$**

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = \theta \cdot x_{j0} - S_j^-$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = y_{i0} + S_i^+$$

**Orientação ao output: Max  $\eta$**

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = x_{j0} - S_j^-$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = \eta \cdot y_{i0} + S_i^+$$

Essas restrições podem levar o problema a inviabilidade.

Devem ser acrescentadas as folgas





# Folgas

- **A projeção radial nem sempre é capaz de conduzir a DMU a um ponto de eficiencia**
  - Pode ser necessário mudar a proporção dos inputs e outputs.
- **Podem haver sobras de inputs ou falta de outputs, mesmo após a projeção**
  - Essas sobras ou faltas são chamadas folgas;
- **Distorções causadas pelo fato da fronteira da DEA ser construída empiricamente;**
- **A DEA sempre vai evitar as folgas o máximo possível.**



# Problema das folgas

- As folgas fazem com que a projeção radial leve a um ponto ineficiente;

**A folga leva a uma superestimação do valor da eficiência**

- **As folgas não podem ser orientadas;**
  - Podem ser recomendado aumento em um output, mesmo nos modelos orientados aos inputs
  - E vice-versa.
- **As folgas podem conduzir a falsos eficientes;**



# Problema dos falsos eficientes

- **Fortemente eficientes:**
  - Nível de eficiencia igual a 1
  - Todas as folgas iguais a 0
- **Fracamente eficientes:**
  - Nível de eficiencia igual a 1
  - Folgas diferentes de zero;



## Modelo CCR *input* orientado na forma do envelope

$$\text{Min } \theta - \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^- - \theta \cdot x_{j0} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ = y_{i0} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\theta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$



## Modelo CCR *output* orientado na forma do envelope

$$\text{Max } \eta + \varepsilon * \left( \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{j=1}^m S_j^- \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j^- = x_{j0} \quad \text{para } j=1,2,3\dots m$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i^+ - \eta \cdot y_{i0} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3,n$$

$$\eta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$



## Exemplo 2

Agência	Empregados	Transações	Serviços
A	20	125	50
B	16	40	20
C	17	68	55
D	11	23	12

Monte o modelo CCR fracionário orientado aos inputs para as DMUs A e C



## Modelo CCR *input* orientado na forma do envelope para DMU A

$$\text{Min } \theta - \varepsilon * (S_1^+ + S_2^+ + S_j^-)$$

Sujeito a:

$$20 \cdot \lambda_1 + 16 \cdot \lambda_2 + 17 \cdot \lambda_3 + 11 \cdot \lambda_4 + S_1^- - 20 \cdot \theta = 0$$

$$125 \cdot \lambda_1 + 40 \cdot \lambda_2 + 65 \cdot \lambda_3 + 25 \cdot \lambda_4 - S_1^+ = 125$$

$$50 \cdot \lambda_1 + 20 \cdot \lambda_2 + 55 \cdot \lambda_3 + 12 \cdot \lambda_4 - S_2^+ = 50$$

$$\theta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$



## Modelo CCR *input* orientado na forma do envelope para DMU C

$$\text{Min } \theta - \varepsilon * (S_1^+ + S_2^+ + S_j^-)$$

Sujeito a:

$$20 \cdot \lambda_1 + 16 \cdot \lambda_2 + 17 \cdot \lambda_3 + 11 \cdot \lambda_4 + S_1^- - 17 \cdot \theta = 0$$

$$125 \cdot \lambda_1 + 40 \cdot \lambda_2 + 65 \cdot \lambda_3 + 25 \cdot \lambda_4 - S_1^+ = 65$$

$$50 \cdot \lambda_1 + 20 \cdot \lambda_2 + 55 \cdot \lambda_3 + 12 \cdot \lambda_4 - S_2^+ = 55$$

$$\theta \text{ e } \lambda_k \geq 0$$





# Resultados exemplo

$\theta$	$\lambda_A$	$\lambda_B$	$\lambda_C$	$\lambda_D$	S1 <sup>-</sup>	S1 <sup>+</sup>	S2 <sup>+</sup>
1	1	0	0	0	0	0	0
0,4550	0,2417	0	0,1438	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0,3905	0,1292	0	0,1007	0	0	0	0

# Informações adicionais da forma do envelope

- Identificação dos benchmarcks de uma DMU eficiente e do nível de importância de cada um;
- Identificação das metas para uma unidade ineficiente se torne eficiente;
- Identificação das folgas e dos falsos eficientes;



# Determinação dos benchmarks das DMUs ineficientes

- **O benchmarks das DMUs ineficientes são aquelas em que:**
  - Os coeficientes  $\lambda$  obtidos são diferentes de zero;
- **O conjunto de benchmarks de uma DMU é chamado conjunto de referência;**
  - O quanto uma DMU serve de referência para outras unidades pode servir como um modelo de desempenho;
- **O benchmark das DMUs eficientes será apenas ela própria;**
- **O valor de  $\lambda$  pode ser interpretado como o nível de importância do benchmark;**



# Cálculo das metas das DMUs ineficientes

- Graças as folgas nem sempre a projeção na fronteira será uma DMU eficiente;
- Devem ser incorporadas as folgas:
  - *Modelo orientado ao input*

$$x_{meta} = \theta \cdot x_{j0} - S_j$$

$$y_{meta} = y_{i0} + S_i$$

- *Modelo orientado ao output*

$$y_{meta} = \eta \cdot y_{i0} + S_i$$

$$x_{meta} = x_{j0} - S_j$$



# Cálculo das metas das DMUs ineficientes

- Todos os pontos eficientes podem ser escrito como uma combinação linear das DMUs eficientes
- Pelos benchmarks:

$$y_{meta} = \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k$$

$$x_{meta} = \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k$$



# Determinação das metas

- **Cálculo do aumento/diminuição relativo para se atingir a eficiência:**
  - É a relação entre o valor atual da variáveis de uma DMU e a meta estabelecida pela DEA:
- **Mesmo em modelos orientados ao *input* podem existir recomendações de aumento dos outputs e vice versa;**
  - Os responsáveis por isso são as folgas;

# Exercício

Considere um conjunto de 7 DMUs com dois inputs e um output

DMUs	Input 1	Input 2	Output
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	10	1	1
G	3	7	1

O modelo CCR orientado ao input na forma do envelope foi rodado

# Resultados do modelo

DMU	Eficiência (%)	Folga Input 1	Folga Input 2	Folga Output	$\lambda A$	$\lambda B$	$\lambda C$	$\lambda D$	$\lambda E$	$\lambda F$	$\lambda G$
A	85,71	0	0	0	0	0	0	0,714	0,296	0	0
B	63,16	0	0	0	0	0	0,105	0,895	0	0	0
C	100	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
D	100	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
E	100	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	100	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
G	66,67	0	0,667	0	0	0	0	0	1	0	0

Identifique as DMUs fracamente eficientes e determine a meta para que cada DMU se torne eficiente.



## Resposta

- **Metas para A:**

- $I_{1\text{meta}} = 0,8571 * 4 = 3,43$

- $I_{2\text{meta}} = 0,8571 * 3 = 2,57$

- $O_{\text{meta}} = 1$

$$0,714 * 4 + 0,286 * 2 = 3,43$$

$$0,714 * 2 + 0,286 * 4 = 2,57$$

$$0,714 * 1 + 0,286 * 1 = 1$$

- **Metas para B:**

- $I_{1\text{meta}} = 0,6316 * 7 = 4,42$

- $I_{2\text{meta}} = 0,6316 * 3 = 1,89$

- $O_{\text{meta}} = 1$

$$0,105 * 8 + 0,895 * 4 = 4,42$$

$$0,105 * 1 + 0,895 * 2 = 1,89$$

$$0,105 * 1 + 0,895 * 1 = 1$$



# Resposta

- **Metas para G:**

–  $I1_{meta} = 0,6667 * 3 = 2$

$1 * 2 = 2$

–  $I2_{meta} = 0,6767 * 7 - 0,67 = 4$

$1 * 4 = 4$

–  $O_{meta} = 1$

$1 * 1 = 1$

- **Metas para F:**

–  $I1_{meta} = 1 * 10 - 2 = 8$

$1 * 8 = 8$

–  $I2_{meta} = 1 * 1 = 1$

$1 * 1 = 1$

–  $O_{meta} = 1$

$1 * 1 = 1$

# Exemplo

- A partir dos resultados das variáveis  $\lambda$  e das folgas do modelo do envelope orientado aos inputs, determine as DMUs eficientes fortes e fracas, os benchmarks de cada DMU e desempate entre as DMUs eficientes

DMU	Eficiência	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$S^-_1$	$S^-_2$	$S^+_1$
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0,02	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,8	0	0,5	0	0	0	0	0,2	0	0	0
4	0,9	0	0,2	0	0	0,6	0	0,4	0,01	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0,75	0	0,3	0	0	0,6	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0