MAC0329 05/05/2020

BOM DIA!

$\langle B, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$

$B = \{0, 1\}$

Variáveis booleanas : $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Expressões booleanas :
- $b \in B$
- x_i , $\bar{x}_i$
- $x + y$, $x \cdot y$, $\bar{x}$

Produto	Soma	Produto canônico (em n variáveis)

Produto	Soma		
$x_1 x_3$	$x_1 + x_3$		
$x_2 \bar{x}_4$	$x_2 + \bar{x}_4$	$n=2$	
		$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$
$x_1 x_2 x_3$	$x_1 + x_2 + x_3$	$\bar{x}_1 x_2$	$(\bar{x}_1 + x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$x_1 \bar{x}_2$	$(x_1 + \bar{x}_2)$
$x_1 x_1 x_2$ ✗	$(x_1 + x_1 + x_2)$ ✗	$x_1 x_2$	$(x_1 + x_2)$
$x_1 \bar{x}_1 x_2$ ✗	$\vdots$		
$x_1 (x_2 + x_3)$ ✗			

2^2 produtos canônicos em 2 variáveis (x_1, x_2)

Função Booleana (em n variáveis)

$$f : B^n \longrightarrow B$$

$$\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

se e somente se pode ser expressa por uma <u>expressão booleana</u>.

Álgebra booleana das funções booleanas

$$B(n) = \{\, f : B^n \to B \;,\; f \text{ é função booleana} \}$$

$$f + g \quad , \quad f \cdot g \quad , \quad \overline{f}$$

$+$ sobre $B(n)$

$$\underbrace{(f + g)}_{\in B(n)}(x) = \underbrace{f(x)}_{} + \underbrace{g(x)}_{\in B}$$

$+$ sobre $\underline{\underline{B}}$

$B(n)$

$$f \overset{B(n)}{\leq} g \iff f+g=g \iff f\cdot g=f$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) \underset{B}{\leq} g(x), \quad \forall x \in B^n$$

Fato: os mintermos (produtos canônicos) são os átomos de $\boxed{B(n)} \longrightarrow f : B^n \to B$

Duas variáveis $\bar{x}_1\bar{x}_2$, $\bar{x}_1 x_2$, $x_1\bar{x}_2$, $x_1 x_2$

$n=2$ 2 variáveis

x_1	x_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	$x_1 x_2$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

2^n

$\frac{0}{0}$, 0, 0, 0

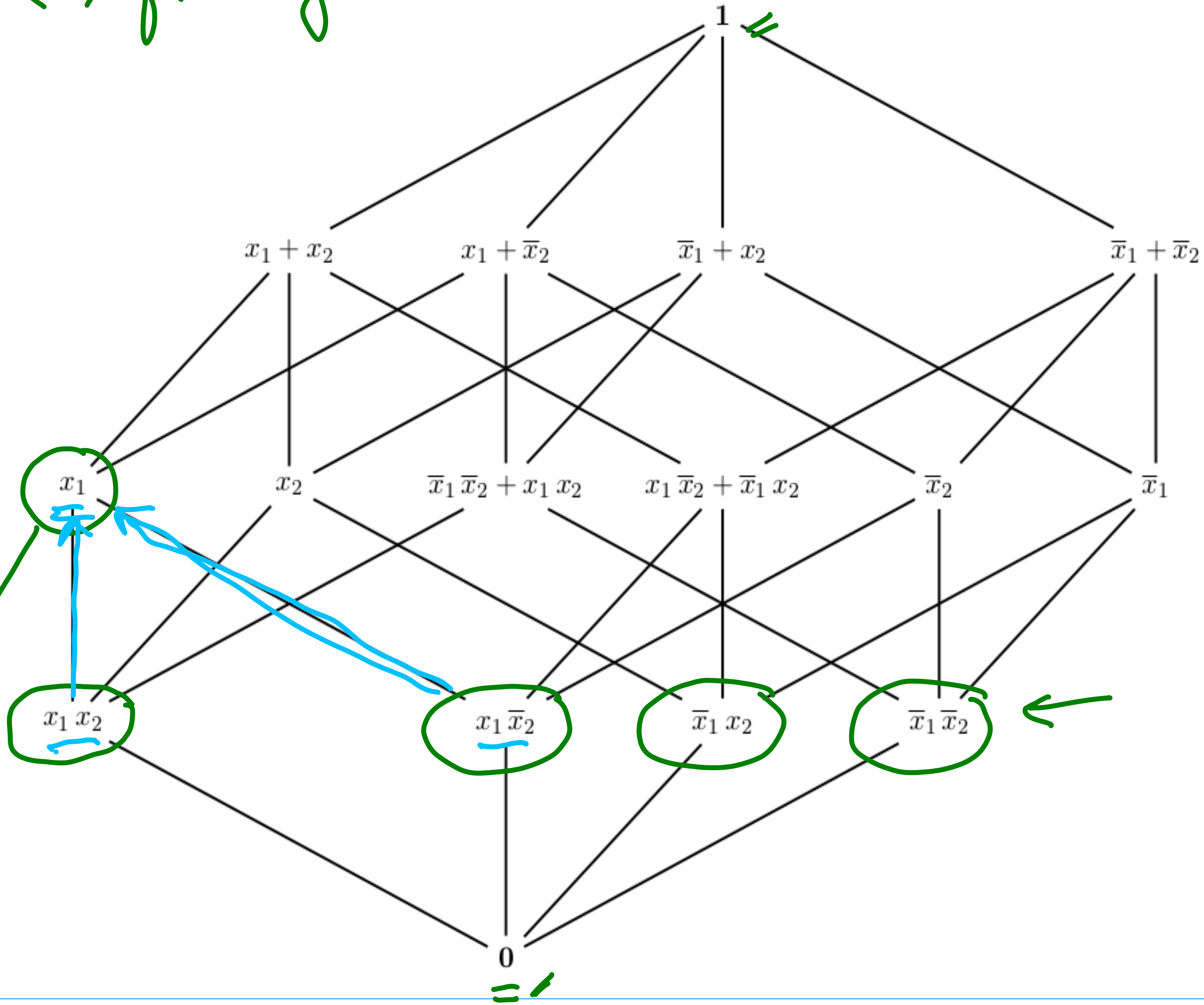
$|B(n)| = 2^{2^n}$

$n=2$

$|B(2)| = 2^{2^2} = 16$

$$f \le g \iff f(x) \le g(x) \quad \forall x \in B^n$$

$f_0(x_1,x_2) = 0$
$f_1(x_1,x_2) = x_1\,x_2$
$f_2(x_1,x_2) = x_1\,\overline{x}_2$
$f_3(x_1,x_2) = x_1$
$f_4(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,x_2$
$f_5(x_1,x_2) = x_2$
$f_6(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,x_2 + x_1\,\overline{x}_2$
$f_7(x_1,x_2) = x_1 + x_2$
$f_8(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2$
$f_9(x_1,x_2) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 + x_1\,x_2$
$f_{10}(x_1,x_2) = \overline{x}_2$
$f_{11}(x_1,x_2) = x_1 + \overline{x}_2$
$f_{12}(x_1,x_2) = \overline{x}_1$
$f_{13}(x_1,x_2) = \overline{x}_1 + x_2$
$f_{14}(x_1,x_2) = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$
$f_{15}(x_1,x_2) = 1$



$$x_1 = x_1(\overline{x}_2 + x_2) = \underbrace{x_1\overline{x}_2} + \underbrace{x_1 x_2}$$

Teorema de expansão de Boole

$$f : B^n \longrightarrow B$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overbrace{\bar{x}_1 \cdot f(0, \underbrace{x_2, \ldots, x_n}_{})}^{} + \underbrace{x_1 \cdot f(1, \underbrace{x_2, \ldots, x_n}_{})}_{}$$

$$\overbrace{x_1 = x_1\bar{x}_2 + x_1 x_2}^{f} \longrightarrow \bar{x}_1 \cdot \underbrace{f(0, x_2)}_{\Downarrow\, 0} + x_1 \underbrace{f(1, x_2)}_{\Downarrow\, 1} = x_1$$

0 - $x_2 x_3 \ldots x_n$

1 : —

x_1	x_2	x_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	x_1+x_2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

$$g(x_1,x_2) = \bar{x}_1\, g(0,x_2) + x_1\, g(1,x_2)$$

$$= \bar{x}_1\left[\bar{x}_2\, g(0,0) + x_2\, g(0,1)\right] +$$

$$x_1\left[\bar{x}_2\, g(1,0) + x_2\, g(1,1)\right]$$

$$= g(0,0)\,\bar{x}_1\bar{x}_2 + g(0,1)\,\bar{x}_1 x_2 +$$

$$g(1,0)\,x_1\bar{x}_2 + g(1,1)\,x_1 x_2$$

$$f(x_1,x_2) =$$

$$0.\bar{x}_1\bar{x}_2 +$$

$$1\,\bar{x}_1 x_2 +$$

$$1\,x_1\bar{x}_2 +$$

$$1\,x_1 x_2 =$$

$$\bar{x}_1 x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1 x_2$$

	a_i	b_i	c_i	s_i	c_{i+1}
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	
	0	1	1	0	
⋮	1	0	0	1	
	1	0	1	0	
	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	

$$S_i(a_i, b_i, c_i) =$$

$$1 \cdot \bar{a}\bar{b}c + 1 \cdot \bar{a}b\bar{c} + 1 \cdot a\bar{b}\bar{c} + 1 \cdot abc$$

$$+ 0 \cdot \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

$$\cancel{0}$$

$$= \sum m(1,2,4,7)$$

$$S_i(a,b,c) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$$

$$m_1 \rightarrow m_{001} \qquad m_{100}$$

$$\bar{a}\bar{b}c \qquad a\bar{b}\bar{c}$$

Teorema: $f : B^n \to B$ é booleana se e somente se ela pode ser expressa na forma soma canônica de produtos:

$$\boxed{f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(e_1, e_2, \dots, e_n) \in B^n} \underbrace{f(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{2^n \text{ entradas possíveis}} \underbrace{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}}_{\substack{e_i = 0 \Rightarrow \bar{x}_i \\ e_i = 1 \Rightarrow x_i}}}$$

$$\underbrace{f(0,1)}_{(0,1) \in B^2} x_1^0 x_2^1 \Rightarrow f(0,1)\, \bar{x}_1 x_2$$

$\boxed{f: B^n \to B}$ são booleanas $+, \cdot, \bar{\ }$

$\Rightarrow$ Existem 2^{2^n} funções do tipo $f: B^n \to B$

$\Rightarrow$ $f: B^n \to B$ é f. booleana $\Longleftrightarrow$ $\bigvee f(\ \ )\, x_1^{e_1} \dots x_n^{e_1}$

$2^{2^n} \longleftrightarrow 2^{2^n}$

$$\boxed{f : A^n \to A}$$

$$|A|^{|A|^n}$$

nº de linhas na tabela

$$00 \to \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

$$01 \to \bar{x}_1 x_2$$

$$\boxed{f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(e_1,\dots,e_n)\in B^n} \overbrace{f(e_1,\dots,e_n)}^{\to |A|} \underbrace{x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}}_{2^n}}$$

$$|A|^{2^n}$$

$$x_i^{e_i} = x_i \text{ se } e_i = 1$$

$$x_i^{e_i} = \bar{x}_i \text{ se } e_i = 0$$

$A=\{0,\bar a,a,1\}$

$|A|^{2^n} = 4^{2^1} = 16$

$\boxed{f: B^n \to B}$

$0 \quad x \quad \bar x$

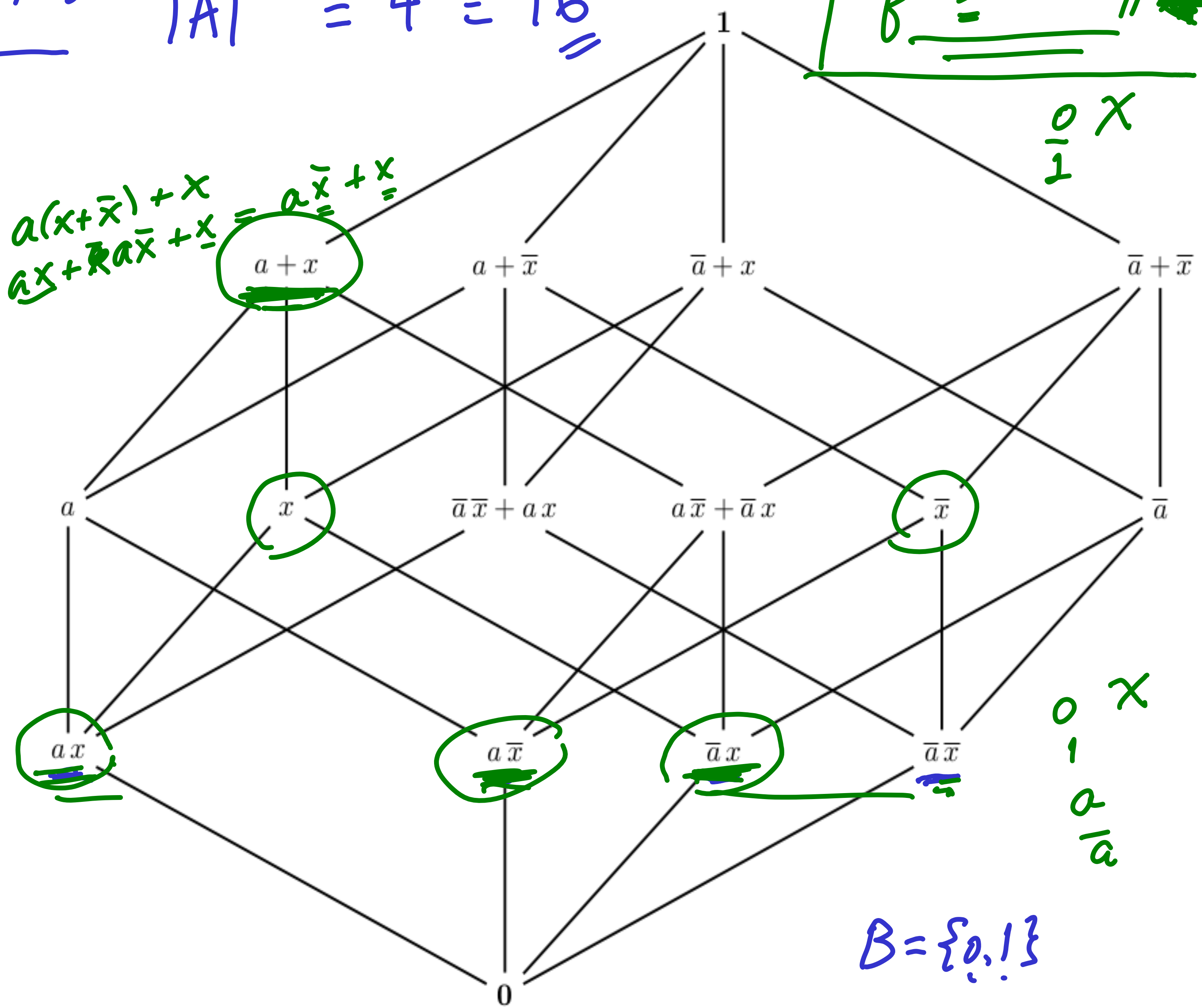
1

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 0\\
f_1(x) &= a\,x\\
f_2(x) &= a\,\overline{x}\\
f_3(x) &= a\\
f_4(x) &= \overline{a}\,x\\
f_5(x) &= x\\
f_6(x) &= \overline{a}\,x + a\,\overline{x}\\
f_7(x) &= a + x\\
f_8(x) &= \overline{a}\,\overline{x}\\
f_9(x) &= \overline{a}\,\overline{x} + a\,x\\
f_{10}(x) &= \overline{x}\\
f_{11}(x) &= a + \overline{x}\\
f_{12}(x) &= \overline{x}\\
f_{13}(x) &= \overline{a} + x\\
f_{14}(x) &= \overline{a} + \overline{x}\\
f_{15}(x) &= 1
\end{aligned}
$$

$f: A^1 \to A$

$a(x+\bar x)+x$

$ax + a\bar x + x = a\bar x + x$



$0 \quad x \quad \bar x$

1

a

$\bar a$

$B=\{0,1\}$

$1x \quad 1\bar x \quad ax \le x$

expressões

funções ~ podem ser escritas usando $+$, $\cdot$, $\bar{\ }$

$f: B^n \to B$ todas são booleanas

existe uma forma <u>soma canônica de produtos</u>

||

soma de <u>funções átomo</u>

prod. canônicos

$f: A^n \to A$ nem todas são booleanas

$\bar{x}$ $A = \{0, \bar{a}, a, 1\}$

$f(x) = a + x$

x	$f(x) = a + x$
0	a
$\bar{a}$	1
a	a
1	1

$$f(x) = f(0)\bar{x} + f(1)x$$

$$= a\bar{x} + 1 \cdot x$$

$$= a\bar{x} + x$$

$$= a\bar{x} + (a + \bar{a})x$$

$$= a\bar{x} + ax + ax$$

$$= a(\bar{x} + x) + x = a + x$$