MAC0329 – Álgebra booleana e aplicações

DCC / IME-USP — Primeiro semestre de 2020

Lista de exercícios 3 (Entregue apenas os marcados com $*$)

1. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, juntamente com as operações usuais de adição e multiplicação. Quais dos axiomas A1, A2, A3 da álgebra booleana não são satisfeitos ? É possível definir uma operação unária em $\mathbb{R}$ tal que o axioma A4 seja satisfeito ?

2. Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, ou seja, o conjunto de divisores de 30. Defina operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma operação unária $\bar{}$ da seguinte forma: para quaiquer $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 + a_2 = \text{o mínimo múltiplo comum entre } a_1 \text{ e } \ a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 = \text{o máximo divisor comum entre } a_1 \text{ e } \ a_2$$

$$\overline{a}_1 = 30/a_1$$

   Quais são os elementos identidade (neutro) com respeito a $+$ e $\cdot$? Mostre que A, com as três operações acima, é uma álgebra booleana.

   Dica: considere a decomposição dos elementos de A em fatores primos.

3. Explique o que é o princípio da dualidade em álgebras booleanas. Dê um exemplo que mostre a aplicação do princípio da dualidade.

Daqui em diante, quando não especificado ao contrário, suponha uma álgebra booleana qualquer $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$, e que as variáveis a, b, c, x, y, z, etc, representam elementos quaisquer de A.

4. Prove a igualdade a seguir ou mostre um contra-exemplo :

   $(a + \overline{b})(\overline{a} + b)(\overline{a} + \overline{b}) = \overline{a} + \overline{b}$

5. Simplifique as seguintes expressões (isto é, escreva uma expressão equivalente envolvendo o menor número possível de operações $+$ e $\cdot$ que você conseguir)

   a) $y\,\overline{z}(\overline{z} + \overline{z}\,x) + (\overline{x} + \overline{y})(\overline{x}\,y + \overline{x}\,z)$

   b) $x + x\,y\,z + y\,z\,\overline{x} + w\,x + \overline{w}\,x + \overline{x}\,y$

6. Prove, algebricamente, as seguintes igualdades. Justifique as passagens.

   (a) $x + \overline{x}\,y = x + y$ (e seu dual $x\,(\overline{x} + y) = x\,y$)

(b) $x + y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$ (e seu dual $x\,y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$)

(c) $(x + y)\,(x + \overline{y}) = x$ (e seu dual $x\,y + x\,\overline{y} = x$)

(d) * (Teorema do consenso) $x\,y + y\,z + \overline{x}\,z = x\,y + \overline{x}\,z$ (e seu dual $(x+y)\,(y+z)\,(\overline{x}+z) = (x + y)\,(\overline{x} + z)$)

(e) $y\,x = z\,x$ e $y\,\overline{x} = z\,\overline{x}$ implica que $y = z$

(f) $(x + y + z)\,(x + y) = x + y$

7. A seguinte implicação está correta? Explique.

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

8. Mostre que a relação $\leq$ definida por

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \;\text{ se e somente se }\; x\,y = x \tag{1}$$

é uma relação de ordem parcial.

9. Mostre que

(a) $x + y = y$ se, e somente se, $x\,y = x$

(b) $x\,\overline{y} = 0$ se, e somente se, $x\,y = x$

Daqui em diante suponha que $\leq$ é a relação de ordem parcial definida por $x \leq y \Longleftrightarrow x\,y = x \Longleftrightarrow x + y = y$.

10. Mostre que:

(a) * $x\,y \leq x \leq x + y$

(b) $0 \leq x \leq 1$

11. Quais são os átomos da álgebra booleana $\langle \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, {}^{c}, \emptyset, \{a, b, c\} \rangle$?

12. Seja a um átomo. Mostre que

(a) * $a \leq x + y \Longleftrightarrow a \leq x$ ou $a \leq y$

(b) $a \leq xy \Longleftrightarrow a \leq x$ e $a \leq y$

(c) ou $a \leq x$ ou $a \leq \overline{x}$, mas não ambos.

13. * Existe álgebra booleana com 6 elementos ?