| Q | Valor | Nota |
|---|---|---|
| 1 | 1,0 | |
| 2 | 2,5 | |
| 3 | 2,5 | |
| 4 | 2,5 | |
| 5 | 1,5 | |
| **Total** | **10,0** | |

# MAC0329 – Álgebra Booleana e Aplicações

DCC – IME/USP

Primeira prova — Data: 25/04/2019

**Nome**: ____________________________________________

As seguintes propriedades da álgebra booleana podem ser usadas sem demonstração:

| | |
|---|---|
| Comutativa | $x + y = y + x$<br>$x\,y = y\,x$ |
| Distributiva | $x\,(y + z) = x\,y + x\,z$<br>$x + y\,z = (x + y)\,(x + z)$ |
| Elementos identidade | $x + 0 = x$<br>$x\,1 = x$ |
| Complemento | $x + \overline{x} = 1$<br>$x\,\overline{x} = 0$ |
| Anuladores | $x + 1 = 1$<br>$x\,0 = 0$ |
| Idempotência | $x + x = x$<br>$x\,x = x$ |

| | |
|---|---|
| Associativa | $x + (y + z) = (x + y) + z$<br>$x(y\,z) = (x\,y)z$ |
| Teorema de DeMorgan | $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$<br>$\overline{x\,y} = \overline{x} + \overline{y}$ |
| Unicidade do 0 e 1 | os elementos 0 e 1 são únicos |
| Complemento de 0 e 1 | $\overline{1} = 0$<br>$\overline{0} = 1$ |
| Unicidade de $\overline{x}$ | o complemento é único |
| Involução | $\overline{\overline{x}} = x$ |
| Absorção | $x + x\,y = x$<br>$x\,(x + y) = x$ |

Boa prova!

Procure escrever a resposta de forma clara e completa.

---

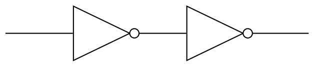
1. (1 ponto) Curtas:

   (a) Escreva o número $(51)_{10}$ em binário

   (b) Considere números binários de 4 *bits*. Escreva o complemento de dois de 1011. A qual número na base 10 correspondem 1011 e seu complemento de dois ?

   (c) Quantos bits são necessários para representar os números inteiros que estão no intervalo de 2 a 47 ? Qual é o intervalo de números (inteiros positivos) que podem ser representados nessa quantidade de *bits* ?

(d) Qual propriedade da álgebra booleana você acha que é retratada pelo seguinte circuito?



---

2. (2.5 pontos) Seja $\langle A, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana. Mostre algebricamente que, para quaisquer $a, b \in A$, as seguintes relações são equivalentes:

   (a) $a + b = b$

   (b) $a\,b = a$

   (c) $\overline{a} + b = 1$

   (d) $a\,\overline{b} = 0$

   **Dica**: basta mostrar que (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (a) (ou, alternativamente, as implicações de modo que formem um circuito fechado)

---

3. (2.5 pontos) Seja $\langle A, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ uma álgebra booleana com a relação de ordem parcial $\leq$ conforme definido em aula. Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o conjunto de átomos de $A$.

   (a) Prove ou dê um contra-exemplo: Para qualquer $x$ não nulo e qualquer átomo $a_i$, vale $a_i x = a_i$

   (b) Seja $x \in A$ tal que $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Prove que $\overline{x} = a_{k+1} + \ldots + a_n$.

---

4. (2.5 pontos) Seja $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$.

   (a) Desenhe o mapa de Karnaugh de $f$

   (b) O produto $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}$ implica $f$ (isto é, $\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} \preceq f$) ?

   (c) Escreva UMA forma SOP minimal de $f$. Existe mais de uma? Explique.

---

5. (1.5 pontos) Na parte 1 do projeto vocês implementaram e testaram um circuito somador. O somador especificado no projeto tem como entradas $\mathbf{A} = (a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ (operando 1), $\mathbf{B} = (b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, b_0)$ (operando 2) e $c_0$ (*carry* na coluna 0) e como saídas $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (8 *bits* da soma), $c_7$ (*carry* na coluna 7), e $c_8$ (*carry* na coluna 8). Desenhe a configuração esquemática do circuito somador indicando as entradas e saídas dele (não é necessário desenhar o que está em seu interior). Indique como devem ser alimentados as entradas do mesmo para a realização da operação de subtração $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ (dois números binários $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, com 8 *bits* cada). Para que podem ser úteis as saídas $c_7$ e $c_8$ ?

---