Métodos Computacionais – Mecânica

Pêndulo Duplo e Seção de Poincaré

Pêndulo Duplo - Objetivos

Com essa aula, queremos que você:

1) Aprenda a implementar o **método de Runge-Kutta de 2a ordem** para o casos de sistemas Lagrangianos e Hamiltonianos de mais de uma partícula interagindo entre si.

2) Tenha visto com o conceito de *Seção de Poincaré* e superfícies de energia.

3) Tenha visualizado na prática os pontos de curvas de energia constante em uma seção de Poincaré do espaço de fase de coordenadas canônicas e correlacionar com as curvas de energia constante vistas na última aula.

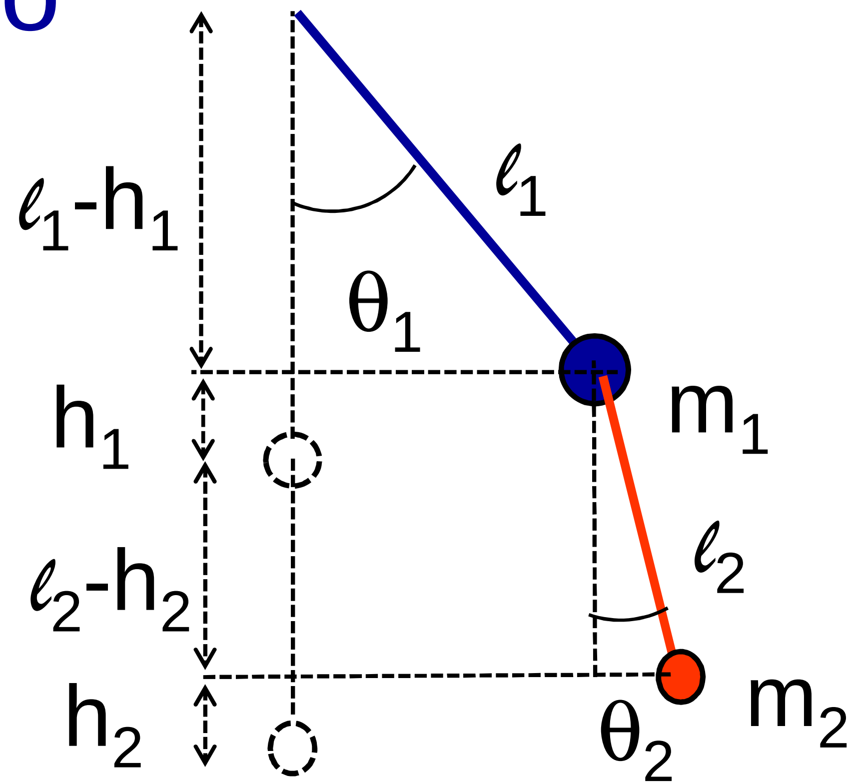
Tarefa: Escrever um script para plotar pontos de superfícies de energia constante em uma seção de Poincaré do espaço de fase do **pêndulo duplo**.

Tempo aproximado: 60 min.

Mecânica: Pêndulo duplo

Lagrangiana:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_1 g h_1 - m_2 g h_2}$$



Coordenadas generalizadas: θ_1 e θ_2

$$h_1 = l_1(1 - \cos(\theta_1))$$

$$h_2 = l_2(1 - \cos(\theta_2)) + h_1$$

$$v_1 = l_1\dot{\theta}_1$$

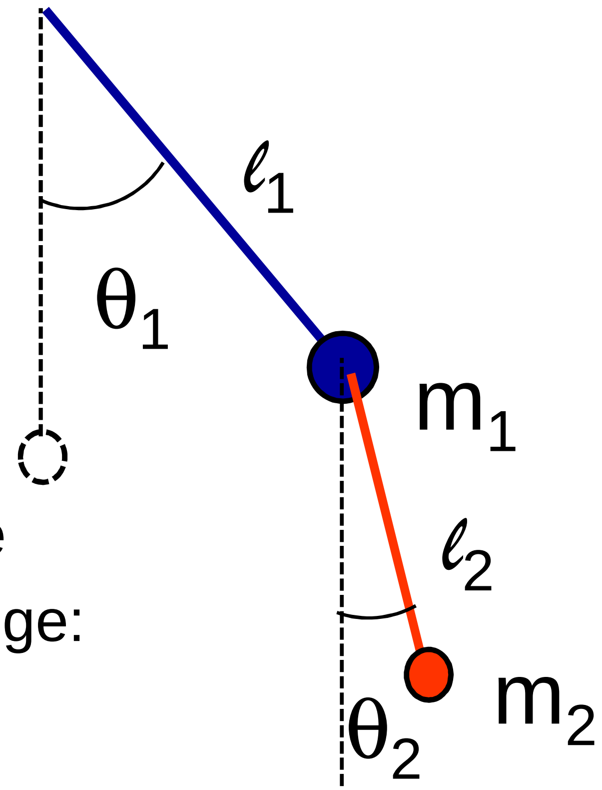
$$v_2^2 = v_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_2)^2 + 2l_2 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$l_2 - h_2 + h_1 = l_2 \cos(\theta_2)$$

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = x_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 = y_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{cases}}$$

Mecânica: Pêndulo duplo



Lagrangiana:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & \frac{(m_1+m_2)}{2} l_1^2 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot{\theta}_2)^2 \\
& + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& - (m_1+m_2) g l_1 (1-\cos\theta_1) \\
& - m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

Equações de Euler-Lagrange:

$$
\begin{cases}
p_{\theta 1} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
p_{\theta 2} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)
\end{cases}
$$

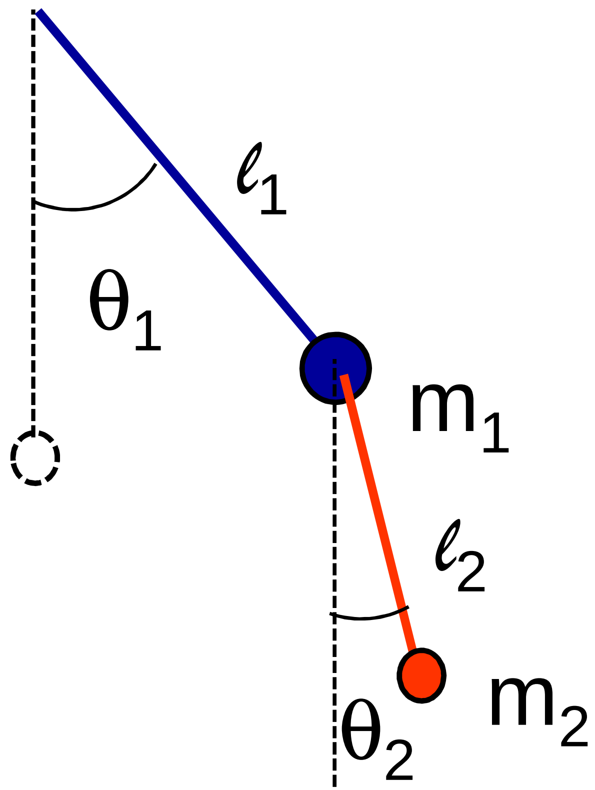
Para simplificar, tomamos o limite:

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow (m_1 + m_2) \approx m_1$$

Aproximação: $m_1 \gg m_2$

Isto implica em:

$$
\begin{cases}
p_{\theta 1} \approx \underline{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1} + \underline{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
p_{\theta 2} = \underline{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2} + \underline{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} \approx \underline{-m_1 g l_1 \sin\theta_1} - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = \underline{-m_2 g l_2 \sin\theta_2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)
\end{cases}
$$



Para colocarmos em uma forma que possamos aplicar o método de Runge-Kutta, precisamos inverter as duas primeiras equações:

$$
\begin{cases}
\dot{\theta}_2 = \dfrac{p_{\theta 1} - m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1}{m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
\Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right) \\
\Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)
\end{cases}
$$

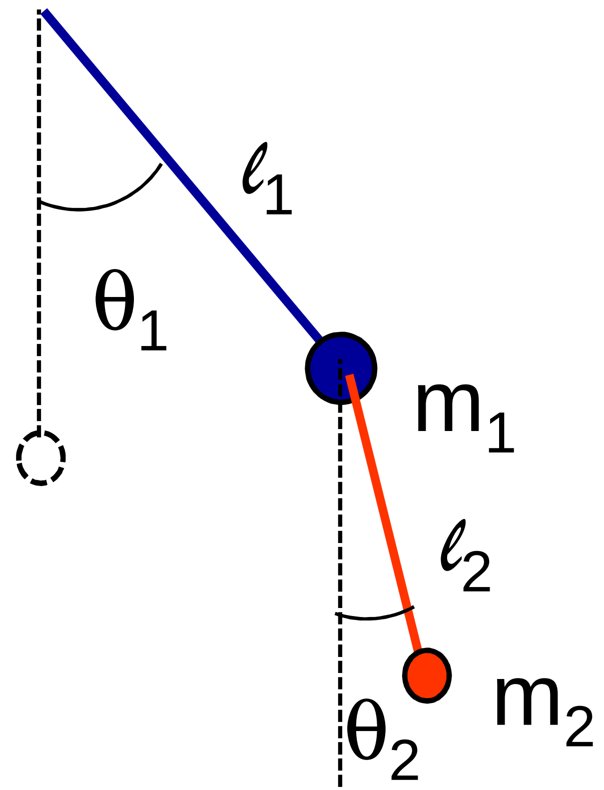
Aproximação: $m_1 \gg m_2$

Equações de movimento:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\[2ex]
\dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\[2ex]
\dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\[2ex]
\dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2}
\end{cases}
$$

Condições iniciais: $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$, $p_{\theta 1}(0)$ e $p_{\theta 2}(0)$.

Aproximação: $m_1 \gg m_2$



Energia: E=T+V (escrevendo em termos dos momentos e ângulos)

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{p_{\theta 1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta 2}^2}{2m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta 1}^2 p_{\theta 2}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\ &\quad + m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\theta_2) \end{aligned}}$$

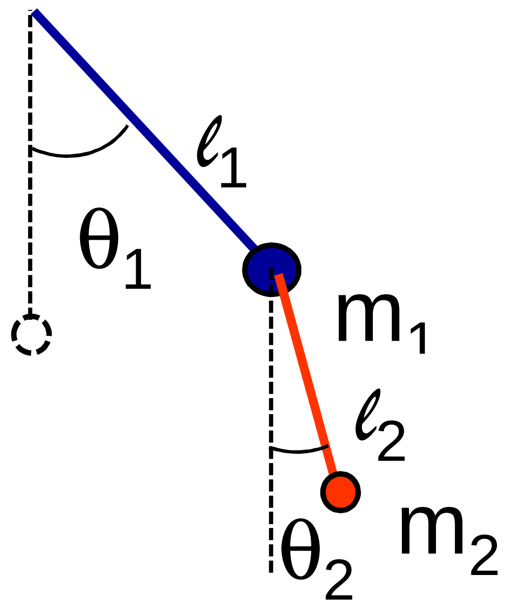
Dado um valor de E, escolhemos : $\theta_2(0)=\pi/2$, $\theta_1(0)=0$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e $p_{\theta 1}(0)=??$.

$$E = \frac{(p_{\theta 1}(0))^2}{2m_1 l_1^2} + m_2 g l_2 \qquad \boxed{\Rightarrow p_{\theta 1}(0) = \pm\sqrt{2m_1 l_1^2 \left[E - m_2 g l_2\right]}}$$

Resumo (c/ aproximação: $m_1 \gg m_2$)

Equações de movimento:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2}
\end{cases}
$$



Condições iniciais: $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=\pi/2$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e

$$p_{\theta 1}(0) = \pm\sqrt{2 m_1 l_1^2 \left[E - m_2 g l_2\right]}$$

RK2: definir quatro k1, quatro k2 e quatro valores a meio-passo!

Parâmetros a serem escolhidos: E , $m_1=20m_2$, l_1 , l_2

RK2 para N eq. diferenciais acopladas

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & f_1(x_1, ..., x_N) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & f_2(x_1, ..., x_N) \\ & (\ldots) & \\ \dfrac{dx_N}{dt} & = & f_N(x_1, ..., x_N) \end{cases}$$

Definimos um "k1" para cada um dos $x_n(t)$:

$$k_1^n = f_n(x_1(t), \ldots, x_N(t))\ \Delta t$$

Definimos os "valores em meio passo":

$$x_n(t + \Delta t/2) = x_n(t) + k_1^n/2$$

Finalmente, definimos os "k2":

$$\boxed{k_2^n = f_n \left[x_1 \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right), \ldots, x_N \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \Delta t}$$

e "avançamos" no tempo:

Método de Runge-Kutta de 2a ordem (**RK2**):

$$\boxed{x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + k_2^n}$$

Ou seja, **dados todos os** $x_n(t)$, podemos calcula-los em t+ Δt:

Pendulo duplo – Tarefa (Fazer upload!)

Considere um pêndulo duplo de massas m_1=100 g e m_2=5 g comprimentos l_1=50 cm l_2=20 cm e energia *E*. Utilize condições iniciais $\theta_2(0)=\pi/2$, $\theta_1(0)=0$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e determine $p_{\theta 1}(0)$ a partir de *E* (para cada *E*, use $p_{\theta 1}(0)>0$ e depois $p_{\theta 1}(0)<0$).

- *Varie a energia de E=0,1J até E=1,0J com passo 0,1 J.*
- *Para cada conjunto de condições iniciais (c.c.i.), calcule os ângulos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ e os momentos angulares $p_{\theta 1}(t)$ e $p_{\theta 2}(t)$ dos corpos usando o método de Runge-Kutta (RK2).*
- *Para montar uma Seção de Poincaré (um "corte" em 2D do espaço de fase 4D) guarde $\theta_1(t+\Delta t)$ e $p_{\theta 1}(t+\Delta t)$ em vetores* Theta1Sec *e* Ptheta1Sec ***sempre que $\theta_2(t+\Delta t)>0$ e $\theta_2(t)<0$*** *("$\theta_2(t)$ passa por zero")*
- *Para cada c.c.i, plote os vetores* Theta1Sec *e* Ptheta1Sec (use "hold on"). Os pontos resultantes pertencem à *superfície de energia E no espaço de fase mostradas no "corte" da Seção de Poincaré.*

Pêndulo duplo – Tarefa - Dicas

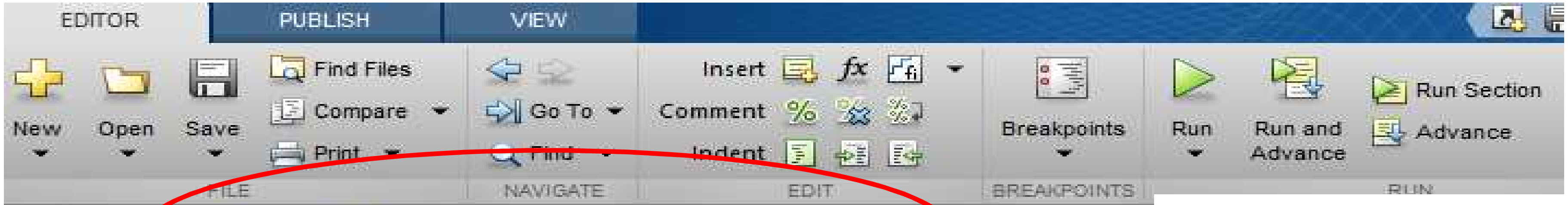
- *Use tempos longos! Você precisa de muitas oscilações para ter um número razoável de pontos na sua seção de Poincaré.*
- *Uma sugestão é usar $t_n=(n-1).\Delta t$ de 0 até $t_N=500$ com $\Delta t=0.01$.*
- *No RK2, você terá que calcular as quatro $f_n(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2})$ (n=1 a 4) do lado direito repetidas vezes (para os k1 e para os k2).*
- *Para saber se $\theta_2(t_n)$ passou por zero, utilize a função* **sign**. *Exemplo:*

```
if ( ( sign( Theta2(n) )~=sign( Theta2(n-1) ) )&&(k2theta2>0) ) ...
```

Obs: *Não esqueça que, como "forçamos que" $-\pi < \theta_{1(2)}(t) < +\pi$ com comandos* **if** *$\theta_{1(2)}(t)>\pi$* **then** *$\theta_{1(2)}(t)=\theta_{1(2)}(t)-2\pi$ etc., a checagem do sinal deve ser feita antes disso.*

- *Para evitar escrever várias vezes a mesma coisa, a dica é definir* ***funções*** *no MatLab/Octave e chamá-las de dentro do seu script.*
- *Veja como definir funções no MatLab/Octave a seguir.*

Escreva sua própria função!




```
function d = Ftest(x,y)
%    Ftest  : função teste
%    Descrição: dadas as coordenadas
%               x e y, calcula a distância
%               à origem d= sqrt(x^2 + y^2);
%   Importante: Declaramos a função como
%               function d = Ftest(x,y)
%   Isto diz que x,y são os argumentos e
%   a função retorna um valor "d".
%   "d" tem que ser calculado em algum lugar.
d=sqrt(x^2+y^2);
end
```

Declara a função.

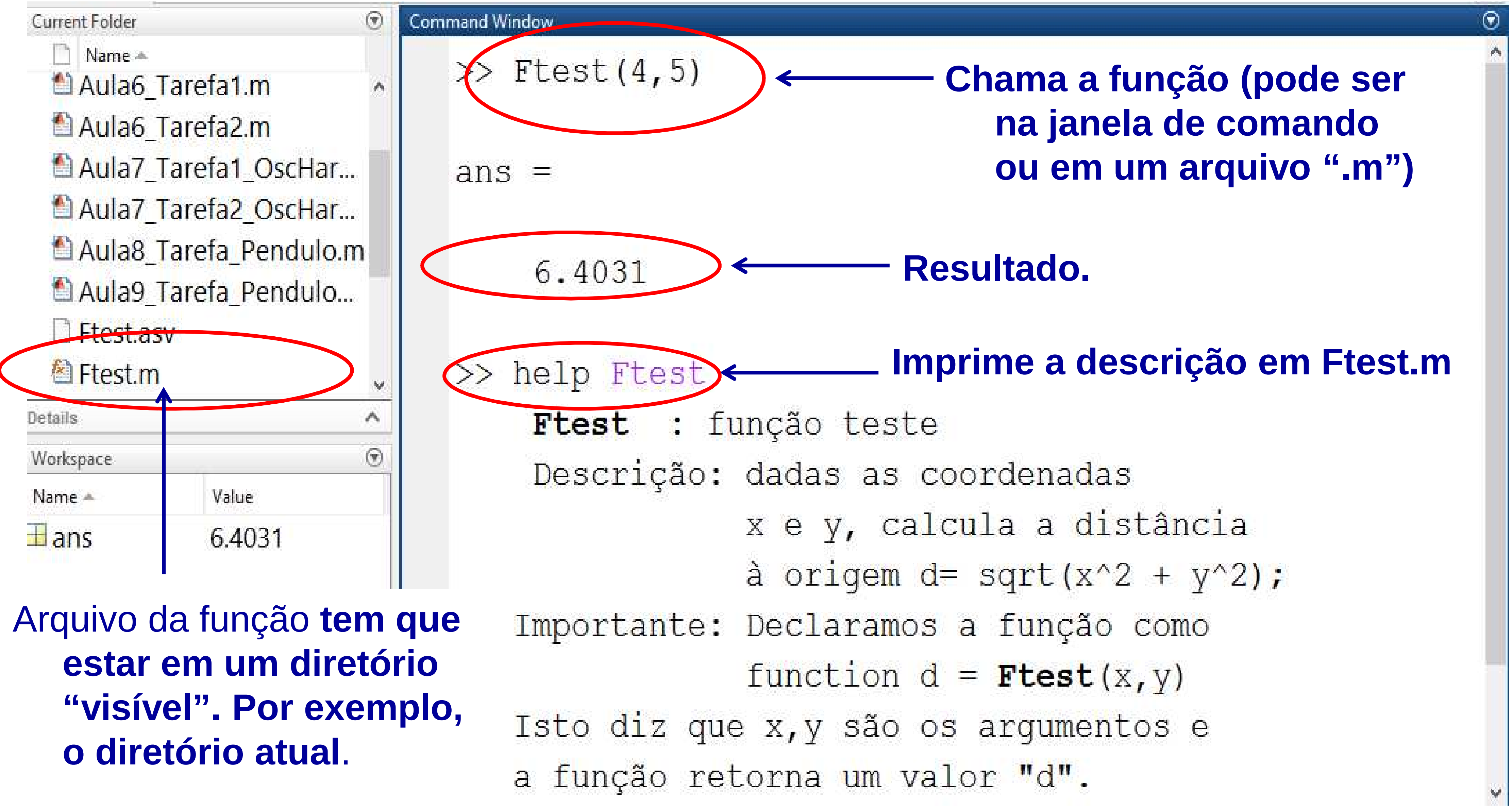
Note a sintaxe!

Calculo da variável que será retornada (pode ser array, etc.)

Ftest.m

Salva em arquivo .m COM O MESMO NOME da função!

Usando sua função



Chama a função (pode ser na janela de comando ou em um arquivo ".m")

Resultado.

Imprime a descrição em Ftest.m

Arquivo da função **tem que estar em um diretório "visível". Por exemplo, o diretório atual**.

Pêndulo duplo – Dicas para o gráfico.

- *Utilize a opção* 'k.' *para plotar pontos pretos ao invés de simbolos.*
- *Utilize letras gregas (sintaxe tipo Latex) fontes grandes nos labels do gráfico. Por exemplo:*

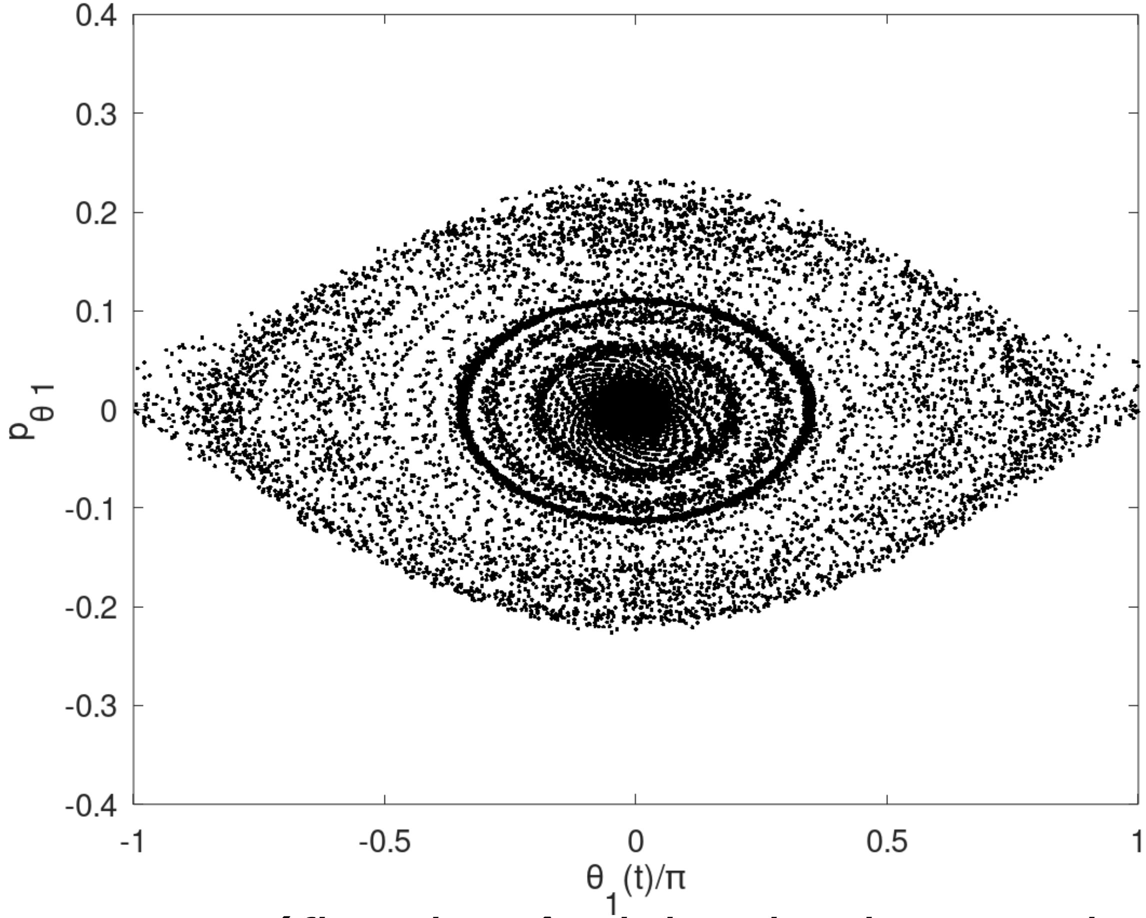
```
xlabel('\theta_1(t)','FontSize',22);
ylabel('p_{\theta 1}','FontSize',22);
```

- *Debug: primeiros valores das coordenadas para E=0,1J (g=9,8 m/s²)*

```
Energia= 0.1000, P10=0.0672
N=1: tempo=0.0000  theta1=0.0000 Ptheta1=0.0672 theta2=1.5708 Ptheta2=0.0000
N=2: tempo=0.0100  theta1=0.0269 Ptheta1=0.0671 theta2=1.5674 Ptheta2=-0.0001
N=3: tempo=0.0200  theta1=0.0537 Ptheta1=0.0669 theta2=1.5573 Ptheta2=-0.0002
N=4: tempo=0.0300  theta1=0.0804 Ptheta1=0.0665 theta2=1.5401 Ptheta2=-0.0003
N=5: tempo=0.0400  theta1=0.1070 Ptheta1=0.0661 theta2=1.5159 Ptheta2=-0.0003
```

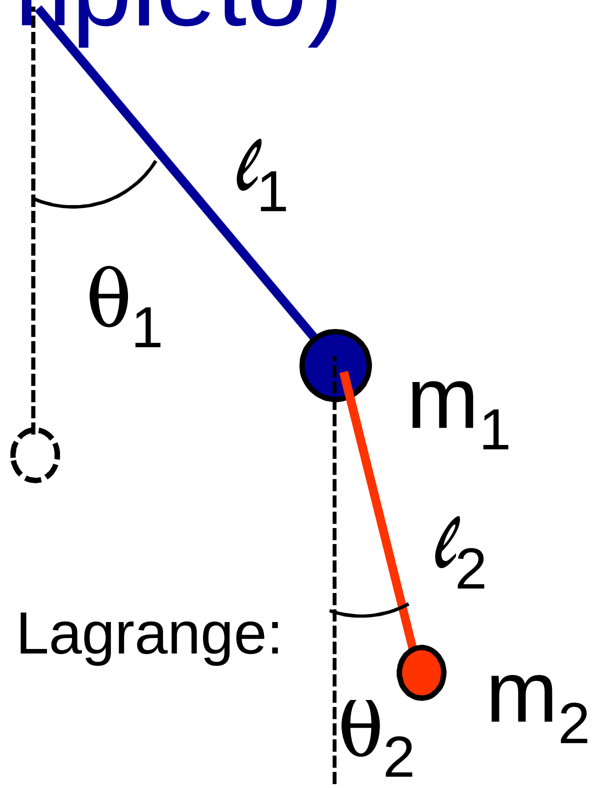
Pêndulo duplo – Dicas para o gráfico.

- *O gráfico final (demora alguns minutos!) deve ficar assim:*



- *Compare com o gráfico do Pêndulo Simples. Quais as diferenças?*
- *Reduza o valor de m_2 para 0,1 g mantendo m_1=100g. O que acontece?*

Mecânica: Pêndulo duplo (completo)



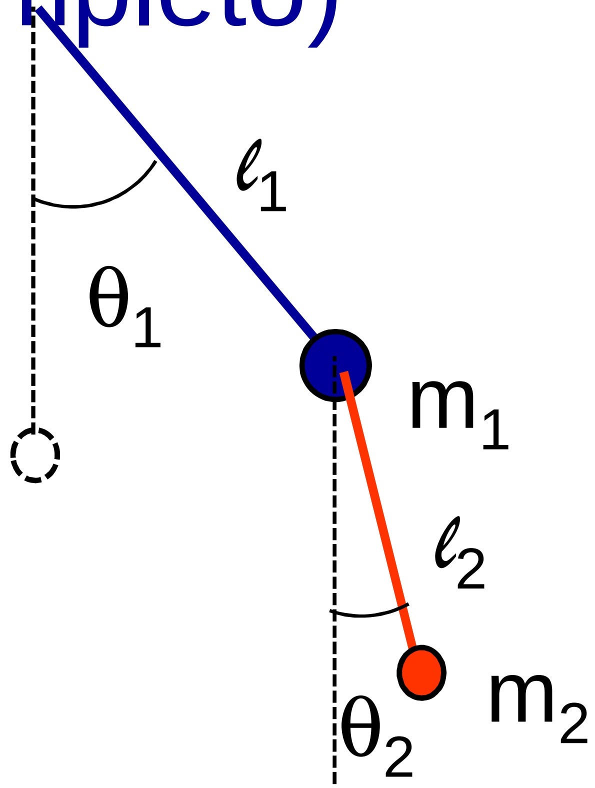
Lagrangiana:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \frac{(m_1+m_2)}{2} l_1^2(\dot\theta_1)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2(\dot\theta_2)^2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ & -(m_1+m_2) g l_1 (1-\cos\theta_1) \\ & -m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2)\end{aligned}}$$

Equações de Lagrange:

$$\left\{\begin{aligned} p_{\theta 1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ p_{\theta 2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{dp_{\theta 1}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{dp_{\theta 2}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}\right.$$

Mecânica: Pêndulo duplo (completo)



Para colocarmos em uma forma que possamos aplicar o método de Runge-Kutta, precisamos inverter as duas primeiras equações:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{\theta}_2 &= \frac{p_{\theta 1} - (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1}{m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
\Rightarrow \dot{\theta}_1 &= \frac{l_2 p_{\theta 1} - l_1 p_{\theta 2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \\
\Rightarrow \dot{\theta}_2 &= \frac{-l_2 p_{\theta 1} \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 (1 + m_1/m_2) p_{\theta 2}}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}
\end{aligned}
\right.
$$

e substituir para obter o *Hamiltoniano*. $\mathcal{H} = \dot{\theta}_1 p_{\theta 1} + \dot{\theta}_2 p_{\theta 2} - \mathcal{L}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \left[\frac{p_{\theta 1}^2}{2 m_1 l_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_{\theta 2}^2}{2 m_1 m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta 1}^2 p_{\theta 2}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \right] \\
&\quad + (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

Mecânica: Pêndulo duplo (completo)

e chegamos às *Equações de Hamilton*:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta 1}} = \dfrac{l_2 p_{\theta 1} - l_1 p_{\theta 2}\cos(\theta_1-\theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta 2}} = \dfrac{-l_2 p_{\theta 1}\cos(\theta_1-\theta_2) + l_1(1+m_1/m_2)p_{\theta 2}}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 - A(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) + B(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) \\ \dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + A(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) - B(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) \end{cases}$$

onde A e B são dadas por:

$$\begin{cases} A(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) = \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2} \sin(\theta_1-\theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2)]} \\ B(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2}) = \dfrac{l_2^2 m_2 p_{\theta 1}^2 + l_1^2 (m_1+m_2) p_{\theta 2}^2 - l_1 l_2 m_2 p_{\theta 1} p_{\theta 2} \cos(\theta_1-\theta_2)}{2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2)]^2} \sin 2(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$