ACH3584 - Estatística II

Aulas 9 e 10: Testes de hipótese - Introdução

Alexandre Ribeiro Leichsenring
alexandre.leichsenring@usp.br

Organização

Introdução aos testes de hipótese

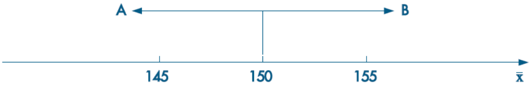
- Como visto, um dos problemas a serem resolvidos pela Inferência Estatística é o de testar uma hipótese
- Isto é, feita determinada afirmação sobre uma população, usualmente sobre um parâmetro dessa, desejamos saber se os resultados experimentais provenientes de uma amostra contrariam ou não tal afirmação
- Muitas vezes, essa afirmação sobre a população é derivada de teorias desenvolvidas no campo substantivo do conhecimento
- A adequação ou não dessa teoria ao universo real pode ser verificada ou refutada pela amostra
- Objetivo do teste de hipóteses: fornecer uma metodologia que nos permita verificar se os dados amostrais trazem evidências que apóiem ou não uma hipótese (estatística) formulada
- Idéia central: supor verdadeira a hipótese em questão e verificar se a amostra observada é “verossímil” nessas condições

Exemplo

Uma indústria estatal usa um parafuso importado, que deve satisfazer a algumas exigências. Uma delas é a resistência à tração. Esses parafusos são fabricados por alguns países, e as especificações técnicas variam de país para país. Por exemplo, o catálogo do país A afirma que a resistência média à tração de seus parafusos é de 145 kg, com desvio padrão de 12 kg. Já para o país B, a média é de 155 kg e desvio padrão 20 kg.

Um lote desses parafusos, de origem desconhecida, será leiloado a um preço muito convidativo. Para que a indústria saiba se faz ou não uma oferta, ela necessita saber qual país produziu tais parafusos. O edital do leiloeiro afirma que, pouco antes do leilão, será divulgada a resistência média $\bar{x}$ de uma amostra de 25 parafusos do lote. Qual regra de decisão deve ser usada pela indústria para dizer se os parafusos são do país A ou B?

Solução Uma resposta que ocorre imediatamente é a que considera como país produtor aquele para o qual a média da amostra mais se aproximar da média da população.



Suponha que, no dia do leilão, fôssemos informados de que $\bar{x} = 148$.

- Diríamos que os parafusos são de origem A.
  - Podemos estar enganados nessa conclusão?
  - É possível que uma amostra de 25 parafusos de origem B apresente média $\bar{x} = 148$?
- Sim, é possível!!!

Precisamos estudar os tipos de erros que podemos cometer e as respectivas

Erro de tipo I

- Dizer que os parafusos são de A quando na realidade são de B.

  Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de B apresenta $\bar{x} \leq 150$

Erro de tipo II

- Dizer que os parafusos são de B, quando na realidade eles são de A.

  Isso ocorre quando uma amostra de 25 parafusos de A apresenta $\bar{x} \geq 150$

Vamos definir duas hipóteses:

H_0: os parafusos são de origem B.

- A resistência X de cada parafuso segue distribuição com
  - media $\mu = 155$
  - desvio padrão $\sigma = 20$

H_1: os parafusos são de origem A.

- A resistência X de cada parafuso segue uma distribuição com
  - media $\mu = 145$
  - desvio padrão $\sigma = 12$

Finalmente, vamos indicar por RC a região correspondente aos valores menores que 150:

$$RC = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 150\}$$

Probabilidade de se cometer cada um dos erros:

$$\mathbf{P}(\text{erro I}) = \mathbf{P}(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

$$\mathbf{P}(\text{erro II}) = \mathbf{P}(\bar{X} \notin RC | H_1 \text{ é verdadeira}) = \beta$$

Quando H_0 for verdadeira (parafusos forem de B), sabemos do TLC que:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu;\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(155;\ \frac{20^2}{25}\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(155;\ 4^2\right) \text{ aproximadamente}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{erro I}) &= \mathbf{P}(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) \\
&= \mathbf{P}\left(\bar{X} \leq 150 | \bar{X} \sim N(155;\ 16)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X} - 155}{4} \leq \frac{150 - 155}{4}\right) \\
&= \mathbf{P}(Z \leq -1,25) = 0,10565 \ \leftarrow \textit{tabela!}
\end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0, 1)$

De modo análogo, quando H_1 for verdadeira, teremos aproximadamente:

$$\bar{X} \sim N\left(145; \frac{12^2}{25}\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(145;\ (2,4)^2\right) \text{ aproximadamente}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{erro II}) &= \mathbf{P}(\bar{X} \notin RC | H_1 \text{ é verdadeira}) \\ &= \mathbf{P}\left(\bar{X} > 150 | \bar{X} \sim N(145;\ (2,4)^2)\right) \\ &= \mathbf{P}(Z > 2,08) = 0,01876 \ \leftarrow \textit{tabela}! \end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0,1)$

Resumo:

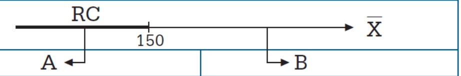
$$\mathbf{P}(\text{erro I}) = 0,10565 = \alpha$$

$$\mathbf{P}(\text{erro II}) = 0,01876 = \beta$$

Observação:

- Com a regra de decisão adotada, estaremos cometendo o erro de tipo I com maior probabilidade do que o erro de tipo II.
- A regra de decisão estabelecida privilegia a afirmação de que os parafusos são de A.

Resumo do teste $\{H_0 : \mu = 155\}$ x $\{H_1 : \mu = 145\}$

Origem Real dos Parafusos	Decisão	
		
A	Sem erro	Erro tipo II $\beta = 1{,}88\%$
B	Erro tipo I $\alpha = 10{,}56\%$	Sem erro

- Para cada regra de decisão adotada, isto é, se escolhermos um valor x_c em vez de 150 no quadro resumo as probabilidades α e β mudarão.
- Se x_c for escolhido menor que 150 $\Rightarrow$ α diminuirá e β aumentará.
- Constatamos que, escolhido um valor de x_c, podemos achar as probabilidades α e β de cometer cada tipo de erro
- Mas também podemos proceder de modo inverso: fixar um dos erros, digamos α, e encontrar a regra de decisão que irá corresponder à probabilidade de erro de tipo I igual a α.

Por exemplo, fixemos $\alpha = 5\%$, e vejamos qual a regra de decisão correspondente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{erro I}) = 0,05 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(\bar{X} \leq x_c | \bar{X} \sim N(155; 16)) = 0,05 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X} - 155}{4} \leq \frac{x_c - 155}{4}\right) = 0,05 \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{x_c - 155}{4}\right) = 0,05
\end{aligned}$$

Da tabela da Normal, obtemos:

$$\frac{x_c - 155}{4} = -1,645$$

Logo,

$$x_c = 148,42$$

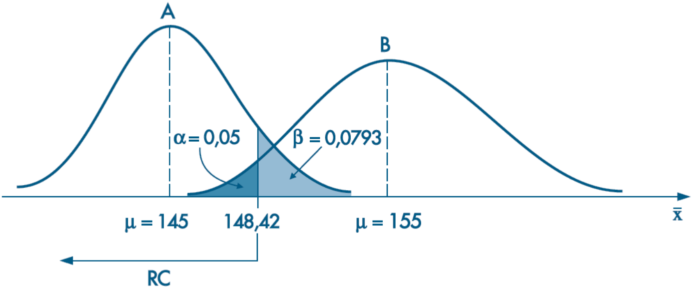
Então, a regra de decisão será:

- Se $\bar{X}$ for inferior a 148,42, dizemos que o lote é de A;
- Caso contrário, dizemos que é de B.

Com essa regra, a probabilidade do erro de tipo II será:

$$\begin{aligned}\beta = \mathbf{P}(\text{erro II}) &= \mathbf{P}(\bar{X} > 148,42 | \bar{X} \sim N(145; 5,76)) \\ &= P(Z > 1,425) = 7,93\%\end{aligned}$$

Ilustração dos erros de tipo I e II



- Esse segundo tipo de procedimento (fixar α e derivar a regra de decisão correspondente) é bastante utilizado, porque usualmente a decisão que devemos tomar não é apenas entre duas possíveis populações
- Os parafusos poderiam ser produzidos por outros países além daqueles citados e, portanto, com outras características quanto à resistência média
- Suponha, ainda, que interessa à indústria fazer uma proposta apenas no caso de o parafuso ser de origem B. Qual a regra de decisão que deve adotar?

A hipótese que nos interessa agora é:

H_0: **os parafusos são de origem B** ($\mu = 155$ e $\sigma = 20$).

A alternativa é muito mais ampla e pode ser expressa como:

H_1: **os parafusos não são de origem B** (μ e σ desconhecidos).

- Vamos supor um problema mais específico. Suponha que a indústria B seja reconhecida por produzir os parafusos mais resistentes e só nos interessa comprar se a origem dos parafusos for a empresa B.
- Como o nosso foco é a resistência, poderíamos formular a hipótese alternativa da seguinte maneira:

  H_0: **os parafusos são de origem B** ($\mu = 155$ e $\sigma = 20$)
  H_1: **os parafusos não são de origem B** ($\mu < 155$ e σ qualquer).

- Isso significa que só iremos desconfiar de H_0 se $\bar{X}$ for muito menor do que 155.
- Ou seja, a nossa regra de decisão deverá ser semelhante à vista anteriormente.
- A regra de decisão depende apenas das informações de H_0
- Se fixarmos novamente $\alpha = 0,05$, a regra de decisão será a mesma anterior:
  - Se $\bar{X}$ for superior a 148,42, dizemos que o lote é de B;
  - Caso contrário, dizemos que não é de B.

Exemplo

Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização A ou B, iremos proceder do seguinte modo:

(i) selecionamos uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinamos a altura média deles;

(ii) se essa altura média for superior a 177, diremos que são descendentes de B; caso contrário, são descendentes de A.

Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:

A. $\mu = 175$ e $\sigma = 10$

B. $\mu = 179$ e $\sigma = 10$

Queremos testar:

H_0: os habitantes são oriundos da civilização A ($\mu = 175$ e $\sigma = 10$)

H_1: os habitantes são oriundos da civilização B ($\mu = 179$ e $\sigma = 10$)

Exemplo (continuação)

a) Defina os erros do tipo I e do tipo II.

b) Qual a probabilidade do erro de tipo I? E do erro de tipo II?

c) Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a probabilidade do erro de tipo I em 5%? Qual a probabilidade do erro de tipo II, nesse caso?

d) A amostra de 100 indivíduos resultou em $\bar{X} = 176,8$. Adotando a regra prescrita no item c), qual deve ser a decisão nesse caso?

B.1 Normal Padrão

Valores de p tais que $\mathbf{P}(Z < z_c) = p$.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998