Óptica ondulatória:
feixes gaussianos, modos propagantes de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss

Sérgio R. Muniz, *Universidade de São Paulo, IFSC-USP*

Aula 3: *12 de Setembro de 2013*

Neste capítulo veremos uma breve introdução à propagação da luz, dentro do contexto da óptica ondulatória. Veremos que a solução mais simples da equação de Helmholtz num meio homogêneo leva a uma forma de feixe gaussiano. Apresentaremos também os modos de ordem superior, que podem ser usados para descrever formas mais gerais de feixes propagantes, como os modos *Hermite-Gauss* e *Laguerre-Gauss*.

*Estas notas provêem um guia rápido, que busca reunir de forma integrada informações dispersas na literatura. Procura-se também destacar as principais aproximações feitas na resolução do problema, visando ter em mente os limites de validade das mesmas. Não se pretende, porém, ser completo ou rigoroso. Para maiores detalhes o(a) estudante pode consultar a bibliografia indicada ou um bom livro-texto de óptica.

Equação de onda eletromagnética

Nos cursos de electromagnetismo é comum deduzir a equação de onda eletromagnética a partir das Equações de Maxwell, usando relações do cálculo vetorial, do tipo $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}$, que permitem descrever as soluções mais gerais dos campos elétricos e magnéticos, tanto no vácuo, como em meios materiais. Nestes casos, as equações constitutivas dos meios materiais, que podem ser, em geral complicadas (inomogênas, anisotrópicas, etc.), trazem todas as propriedades elétricas e magnéticas característica desses materiais e as soluções da equação de onda descrevem todas as propriedades ópticas da luz (ou campos eletromagnéticos, em geral) ao atravessar e/ou interagir com esses materiais.

Em um meio sem cargas livre, a equação de onda para o campo elétrico é dada por:

$$\nabla^2\vec{E} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0,$$

onde ϵ, μ e g descrevem, respectivamente, as propriedades elétricas, magnéticas e a condutividade do meio material. Assumiremos aqui um meio dielétrico, com $g = 0$, de modo que a equação resume-se aos dois primeiros termos.

Neste capítulo estamos interessados num conjunto particular das soluções da equação de ondas eletromagnéticas, relacionada a feixes ópticos que se propagam ao redor de um certo eixo de simetria, que definiremos como o *eixo óptico* e, por conveniência, denominaremos *eixo-z*:

Equação de Helmholtz

Nosso ponto de partida é a chamada equação de onda reduzida (independente do tempo), também conhecida como equação de Helmholtz, que descreve a parte espacial de uma onda eletromagnética que se propaga segundo $\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \tag{1}$$

A solução geral desta equação terá uma forma do tipo $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{ikS(\vec{r})}$, onde $k = 2\pi/n\lambda$ é o vetor de onda, sendo n é o índice de refração do meio e $S(\vec{r})$ é a função eikonal.

Lembrando a relação entre a velocidade, frequência e comprimento de onda: $v = \lambda\nu$, com $v = c/n$, podemos reescrever a relação $c = (n\lambda/2\pi)(2\pi\nu) = \omega/k$. Em geral, $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$, e as propriedades elétricas e magnéticas podem variar com a posição e a frequência: $\epsilon = \epsilon(\vec{r},\omega)$ e $\mu = \mu(\vec{r},\omega)$. Como, frequentemente o termo dominante é relacionado a parte elétrica, uma forma conveniente e mais geral de descrever a interação da radiação com a matéria é fazer

$$k^2(\vec{r}) = \omega^2\mu\epsilon(\vec{r})\left[1 - i\sigma(\vec{r},\omega)\right],$$

que permite descrever casos que variam com a posição e frequência, além de incluir também efeitos de absorção e ganho em meios absorvedores e ativos, através do termo complexo. Neste capítulo, porém, vamos nos limitar inicialmente ao caso de um meio homogêneo e não dispersivo.

Assim, em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (2)$$

Estamos particularmente interessados em situações que tenham simetria cilíndrica ($\partial^2 f/\partial\theta^2 = 0$), que resume-se a

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (3)$$

de modo que $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, z)$.

Como procuramos soluções que se propagam predominantemente ao longo do eixo de simetria (i.e. um feixe) , estamos buscando soluções que podem ser escritas na forma:

$$E(r,z) = \psi(r,z)\, e^{ikz}, \qquad (4)$$

tal que $\psi(r,z)$ representa a amplitude da onda (forma do feixe) que se propaga ao longo do eixo de simetria (*eixo óptico*).

Substituindo (4) em (3) obtém-se

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\,\psi' + k^2\psi - \psi'' = 0, \qquad (5)$$

onde ∇_T^2 representa as derivadas transversais (direção radial), $\psi' = \partial\psi/\partial z$ e $\psi'' = \partial^2\psi/\partial z^2$. Iremos considerar aqui apenas os casos onde $[\psi'' \ll k\psi', k^2\psi]$, que corresponde a aproximação onde a amplitude do campo varia lentamente. Essa aproximação é, em geral, boa quando a extensão transversal (diâmetro) do feixe é muito maior que o comprimento de onda.

Na aproximação de *amplitude variando lentamente*, $\psi'' = 0$, a equação (5) reduz-se a

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\,\psi' + k^2\psi = 0. \qquad (6)$$

A chamada *aproximação paraxial*, que corresponde à situação física onde o feixe faz pequenos ângulos ($\ll 1$ rad) com o eixo óptico, leva a uma equação de onda é ainda mais simples:

$$\nabla_T^2\psi - 2ik\,\psi' = 0. \qquad (7)$$

A equação (7) pode ser resolvida com o *Ansatz*

$$\psi(r,z) = \psi_0\,\exp\left\{-i\left[P(z) + \frac{Q(z)}{2}r^2\right]\right\}, \qquad (8)$$

onde $Q(z)$ e $P(z)$, são funções a serem determinadas de modo a satisfazer a equação (6).

Substituindo (7) em (6) resulta em

$$(Q^2 + kQ')r^2 + (2iQ + 2kP') = 0, \qquad (9)$$

sendo, novamente, $Q' = \partial Q/\partial z$ e $P' = \partial P/\partial z$.

Ambos os termos entre parênteses devem ser identicamente nulos, independente do valor da coordenada r, de modo que a resolução do sistema

$$\begin{cases} Q^2 + kQ' = & 0 \\ iQ + kP' = & 0 \end{cases} \qquad (10)$$

leva às soluções

$$Q(z) = \frac{k}{z + q_0} \qquad (11)$$

$$P(z) = -i\,\ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \qquad (12)$$

que substituidas em (7), resulta em

$$\psi(r,z) = \psi_0\frac{q_0}{q_0 + z}\exp\left[\frac{-ik}{2(z + q_0)}r^2\right]. \qquad (13)$$

Note que a constante q_0 é uma constante de integração arbitrária, mas em geral complexa. Para que o feixe esteja concentrado ao redor do eixo é necessário que q_0 seja um número complexo puro, $q_0 = iz_0$, com z_0 de valor positivo. Veremos que é conveniente definir $z_0 = \mathrm{w}_0^2\mathrm{k}/2$, em termos de uma nova constante w_0^2, cujo significado ficará claro a seguir.

Para entender o significado físico de w_0, basta observar a amplitude do campo no ponto $z = 0$

$$\psi(r,0) = \psi_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\mathrm{w}_0^2}\right), \tag{14}$$

onde pode-se observar uma forma gaussiana, de largura w_0. Assim, w_0 representa o tamanho do feixe na posição $z = 0$.

Substituindo $\psi(r,z)$ na expressão (4), podemos reescrever a solução final do campo elétrico numa forma mais conveniente

$$E(r,z) = E_0(r,z) \exp\left\{-i\left[kz - \eta(z) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right]\right\} \tag{15}$$

com a amplitude é dada por

$$E_0(r,z) = E_0 \left(\frac{\mathrm{w}_0}{\mathrm{w(z)}}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\mathrm{w}^2(\mathrm{z})}\right) \tag{16}$$

onde usamos as seguintes definições

$$\mathrm{w}^2(\mathrm{z}) = \mathrm{w}_0^2\left(1 + \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}_0^2}\right) = \mathrm{w}_0^2\left[1 + \left(\frac{\lambda \mathrm{z}}{\pi \mathrm{n} \mathrm{w}_0^2}\right)^2\right] \tag{17}$$

$$R(z) = z\left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right) = z\left[1 + \left(\frac{\pi n \mathrm{w}_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]. \tag{18}$$

Os parâmetros $\mathrm{w(z)}$ e $R(z)$ representam o raio (tamanho transversal) do feixe e o raio de curvatura da frente de onda, como função da posição ao longo da coordenada z, do eixo óptico.

O termo $\eta(z)$, que recebe o nome de fase de Gouy, é dado por

$$\eta(z) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}_0}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda \mathrm{z}}{\pi \mathrm{n} \mathrm{w}_0^2}\right). \tag{19}$$

Já o temo z_0 é chamado de distância (comprimento ou intervalo) Rayleigh

$$z_0 = n\frac{\pi \mathrm{w}_0^2}{\lambda} \tag{20}$$

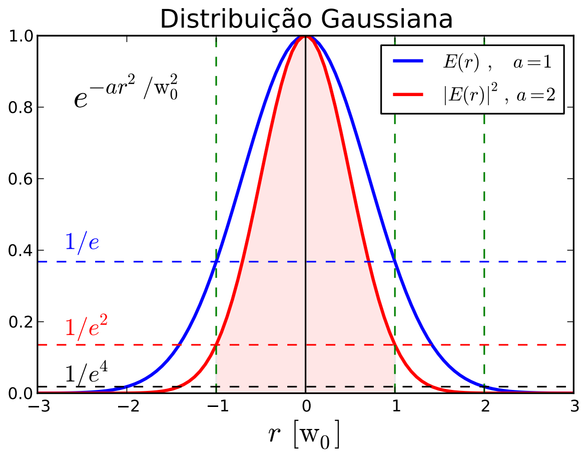
que corresponde a metade da chamada distância confocal ($b = 2z_0$). Na literatura de óptica, é comum utilizar também o símbolo z_R para representar o comprimento Rayleigh. Seu significado é que nesta distância o raio (tamanho) do feixe, quando expresso em termos do campo elétrico, aumenta de um fator $\sqrt{2}$ do seu menor valor w_0, que é chamado de cintura do feixe (o menor raio transversal). Ou seja, na posição $z = z_0$, o raio transversal do feixe é $\mathrm{w(z_0)} = \sqrt{2}\mathrm{w}_0$.

Portanto, a solução da equação de onda, para um meio dielétrico homogêneo, tem uma distribuição espacial na forma gaussiana. Note, porém, que na prática, no caso da luz, estamos geralmente interessados na intensidade do feixe, $I(r,z) \propto |E(r,z)|^2$, que é a grandeza observada experimentalmente, uma vez que as frequências de oscilação do campo são muito grandes.

Neste caso, a distribuição espacial da intensidade no plano $z = 0$ é dada por

$$I(r,0) = I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{\mathrm{w}_0^2}\right). \tag{21}$$

Observe que na posição radial correspondente a cintura do feixe, a intensidade corresponde a $(1/e^2) \approx 0.135$ do valor da intensidade máxima.



Modos de ordem superior

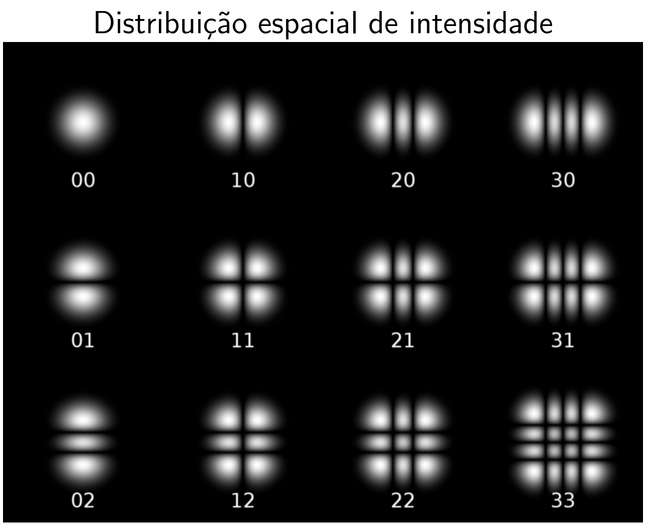
A solução obtida na equação (14) é apenas uma das soluções possíveis da equação de Helmholtz. Se buscarmos soluções mais gerais, não nos limitando, por exemplo, a feixes com simetria azimutal ($\partial^2 f/\partial\theta^2 \neq 0$), iremos encontrar inúmeras outras soluções convenientes dentro dos limites em que estamos interessados aqui (feixes que se propagam ao longo de um eixo de simetria), mesmo dentro da aproximação paraxial e amplitudes que variam lentamente ao longo da direção longitudinal. Chamaremos essas soluções de modos propagantes de ordem superior.

Neste sentido, a solução (14), corresponde ao modo fundamental dessa expansão, chamado de modo gaussiano de ordem zero, ou simplesmente modo TEM_{00}. Essa abreviação significa que este modo de propagação tem componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético nulas, sendo, portanto, totalmente transversais, tanto para o campo elétrico como magnético.

Em coordenadas cartesianas a solução mais geral, na aproximação paraxial, leva a um produto de polinômios de Hermite por funções gaussianas, que tem a mesma forma das soluções do oscilador harmônico quântico. Assim, a forma geral do campo elétrico, neste caso, recebe o nome de modos de Hermite-Gauss, e é dada por

$$E_{mn}(x,y,z) = E_0 \frac{\mathrm{w}_0}{\mathrm{w(z)}} H_m\left(\frac{x\sqrt{2}}{\mathrm{w(z)}}\right) H_n\left(\frac{y\sqrt{2}}{\mathrm{w(z)}}\right) \times \exp\left\{-\frac{r^2}{\mathrm{w}^2\mathrm{(z)}} - ik\frac{r^2}{2R(z)} - ikz + i(m+n+1)\eta\right\} \tag{22}$$

A seguir são mostradas a forma da distribuição espacial dos modos de Hermite-Gauss.

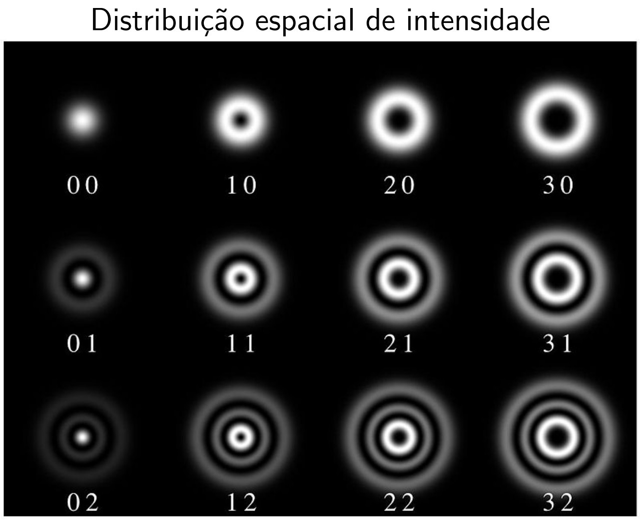


Modos Hermite-Gauss TEM_{mn}

No caso das coordenadas cilíndricas, a mesma expansão de modos de ordem superiores pode ser obtida, levanto, neste caso, a soluções que são escritas em termos de polinômios de Laguerre-Gauss.

$$E_{\ell p}(r,\theta,z) = E_0 \frac{\mathrm{w}_0}{\mathrm{w(z)}} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\mathrm{w(z)}}\right)^{|p|} L_\ell^{|p|}\left(\frac{2r^2}{\mathrm{w}^2\mathrm{(z)}}\right) \times \exp\left\{-\frac{r^2}{\mathrm{w}^2\mathrm{(z)}} - \frac{ikr^2}{2R(z)} - ikz + im\theta + i(2\ell+|p|+1)\eta\right\} \tag{23}$$

A distribuição espacial de intesidade dos modos LG são dados na figura a seguir.



Modos Laguerre-Gauss $\text{LG}_{\ell p}$

Uma propriedade importante dos modos de ordem superior é que, independente do sistema de coordenada utilizado, cada modo é ortogonal aos demais,

$$\int\int E^*_{mn}(x,y,z) E_{ab}(x,y,z) dxdy = \delta_{(mn)(ab)} \tag{24}$$

Desse modo, é possível usá-los como uma base de funções para representar qualquer forma de feixe mais geral

$$E(x,y,z) = \sum_m \sum_n c_{mn} E_{mn}(x,y,z) \tag{25}$$

Isso é útil, pois permite expressar qualquer forma de feixe a partir da combinação linear dos modos de Hermite-Gauss ou Laguerre-Gauss.

Bibliografia sugerida

- *Optical Electronics*, Amnon Yariv.
- *Óptica Moderna*, Sérgio C. Zilio.
- *IEEE Journal of Quantum Electroics, v.**24**, p.512-515 (1988)*, Stuart D. Brorson – para ver solução em coordenadas esféricas e a conexão com o parâmetro confocal.