4320196 – Física para Engenharia II - Prova P1 - 2012

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \ k = \frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0}$

$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$

$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$

$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$

$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+\gamma^2\Omega^2}}; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$

$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \tau_d = \gamma^{-1}$

Q1 - O gráfico ao lado mostra a aceleração $a(t)$ em função do tempo de um corpo de massa $m = 3$ kg preso a uma mola ideal de constante k em movimento oscilatório. Justificando todas as respostas, determine:

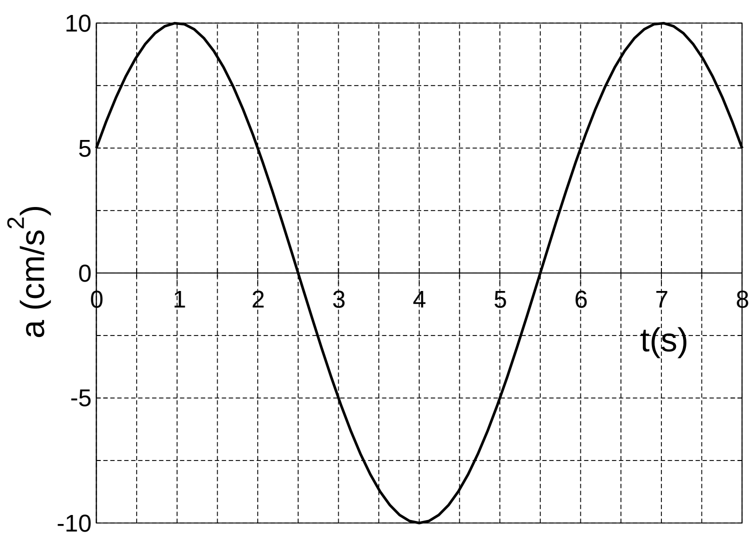
(a) [0.5] O período de oscilação.

(b) [0.5] A amplitude do movimento.

(c) [0.5] A expressão para o deslocamento em função do tempo $x(t)$ em relação à posição de equilíbrio.

(d) [0.5] A velocidade do corpo em $t = 0$.

(e) [0.5] A energia mecânica do sistema.



Solução Q1:

(a) No MHS, o período de oscilação é dado pela distância entre dois máximos de $a(t)$. Do gráfico, temos: $\boxed{T = 7 - 1 = 6\text{s}}$

(b) No MHS, temos $x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$ e $a(t) = -\omega^2.A.\cos(\omega t + \varphi)$. Pelo gráfico, vemos que $|\omega^2.A| = 10\text{cm/s}^2$. Sendo $\omega = 2\pi/T = \pi/3$, de modo que $\boxed{A = 90/\pi^2 \text{ cm}}$.

(c) Para $t = 0$, temos $a(0) = 5$ cm/s^2. Logo, $-10\cos(\varphi) = +5 \Rightarrow \cos(\varphi) = -1/2$ ou seja: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ou $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Para determinar completamente, temos, por exemplo: $a(1) = +10$ cm/s^2 de modo que $-10\cos(\pi/3 + \varphi) = +10$ ou seja $\varphi + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$.

A resposta será então $\boxed{x(t) = \frac{90}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)\text{ cm}}$.

(Também aceito: $x(t) = -\frac{90}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$ cm)

(d) A velocidade será dada por $v(t) = -\frac{\pi}{3}\frac{90}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-30}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

Para $t = 0$: $v(0) = -\frac{30}{\pi}\sin\left(+\frac{2\pi}{3}\right)$

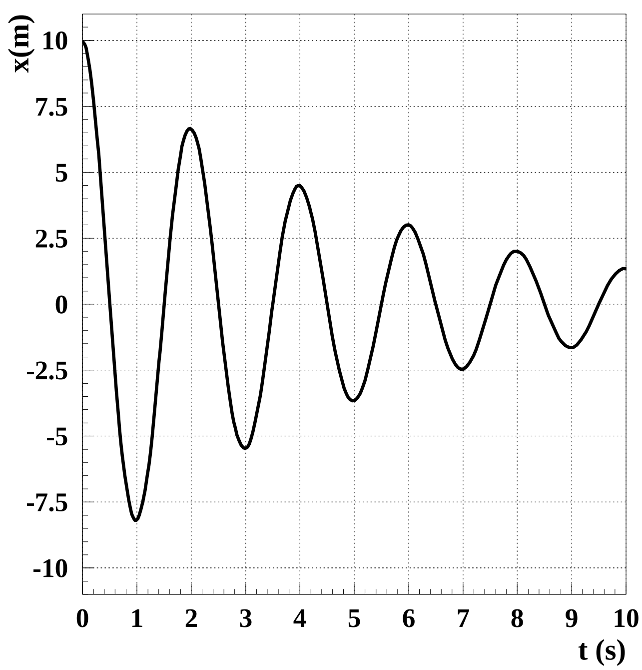
Logo $\boxed{v(0) = -\frac{30\sqrt{3}}{2\pi}}$ cm/s.

(e) Sendo $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$, temos $k = 4\pi^2 m/T^2$. Logo, como $m = 3$kg e $T = 6$s, temos $k = \frac{\pi^2}{3}$ kg/s^2.

Como a energia mecânica do sistema é conservada, ela será dada por: $E_M = \frac{1}{2}m(v(0))^2 + \frac{1}{2}k(x(0))^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3}\frac{0{,}81}{\pi^4}$ (lembrando que $A = \frac{0{,}9}{\pi^2}$m). Logo:

$\boxed{E_M = \frac{0{,}27}{2\pi^2}\text{ J}}$

Q2 - O gráfico ao lado representa a equação horária $x(t)$ de um oscilador, para um sistema que é composto por um bloco de massa $m = 1$ kg preso a uma mola de constante elástica k que está na posição vertical. Este sistema está imerso em um líquido viscoso com coeficiente de resistência $\rho = 0.4$ Ns/m e cuja força de resistência é proporcional à velocidade do corpo que se movimenta em seu interior. Dado que a velocidade inicial do bloco é $v_0 = -2$ m/s, responda sempre levando em consideração o intervalo de tempo mostrado no gráfico:



(a) [1,0] Dado o movimento do bloco no sistema descrito acima, qual a equação horária que descreve este sistema? Inclua os valores explícitos de suas constantes.

(b) [0,5] Determine a frequência natural ω_0 e a constante elástica da mola k.

(c) [0,5] Qual a velocidade do bloco no instante $t = 3$ s?

(d) [0,5] Suponha agora que este mesmo sistema seja retirado do líquido viscoso e passe a oscilar num meio sem resistência. Neste novo regime, o deslocamento máximo é $x_{\max} = 10$ m e a constante de fase é nula. Qual será a nova equação horária do sistema?

Solução Q2:

(a) A partir do gráfico temos: $T = 2$ s $\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad

$x(t=0) = 10 \quad \Rightarrow \quad A\cos(\varphi_0) = 10$

Do enunciado: $\gamma = \frac{\rho}{m} = 0,4\ \text{s}^{-1}$

$x(t) = A\exp(-0,2t)\cos(\pi t + \varphi_0)$

$\dot{x}(t) = -2\exp(-0,2t)\cos(\pi t) - 10\pi\exp(-0,2t)\sin(\pi t)$

$\dot{x}(t=0) = -2 = -A\frac{\gamma}{2}\cos(\varphi_0) - A\pi\sin(\varphi_0) \Rightarrow$ onde $A\cos(\varphi_0) = 10$

$10 \times 0,1 + A\frac{\pi}{2}\sin\varphi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad A\frac{\pi}{2}\sin\varphi_0 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad A = 10$ m

$x(t) = 10\exp(-0,2t)\cos(\pi t)$ m.

(b) $\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \pi^2 + 0,04 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\pi^2 + 0,04}$ rad/s .

$k = \omega_0^2 m = (\pi^2 + 0,04) \times 1 = (\pi^2 + 0,04)$ kg/s^2.

(Também aceito: se $\pi \approx 3 \Rightarrow k \approx 9,04$ kg/s^2)

(c) $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -10e^{-0,2t}\left[0,2\cos(\pi t) + \pi\sin(\pi t)\right]$. Logo

$v(t = 3s) = +2e^{-0,6}$ m/s

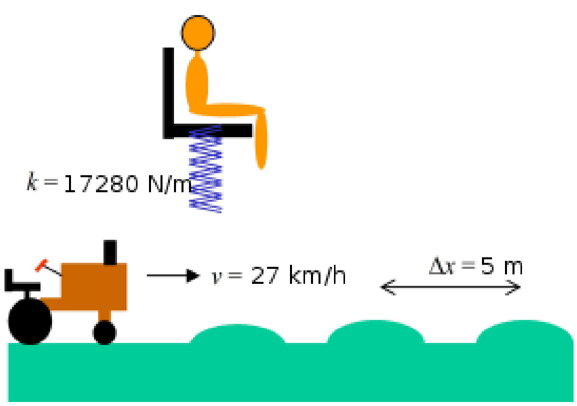
Resposta também aceita: do gráfico, vemos que $x(t)$ está bem próximo a um ponto de mínimo em $t = 3$s. Logo, $v(t = 3) = \dot{x}(t = 3) \approx 0$.

(d) O fator de amortecimento se anula e, em $t = 0$:

$x(t) = 10\cos(\sqrt{(\pi^2 + 0,04)}t)$ m.

[Também aceito: se $\pi \approx 3 \Rightarrow x(t) = 10\cos(\sqrt{9,04}t)$]

Q3 - Considere um trator atravessando um campo onde existem ondulações em intervalos regulares. A distância entre cada monte é de 5m. Existe uma suspensão de mola ligada ao assento do motorista e este oscila num regime em que o amortecimento é desprezível. Podemos assumir uma mola de constante de mola 17280 N/m, a massa do assento é 50 kg e do motorista é 70 kg. O trator trafega a 27 km/h. Considere $\pi \approx 3$.



(a) [0,5] Qual a frequência f com que o trator passa em cada elevação?

(b) [0,5] Qual a frequência natural de oscilação f_0 do sistema assento-passageiro-mola?

(c) [1,0] Se considerar que, durante o trajeto, a força máxima aplicada pelo trator sobre o sistema cadeira-motorista é de 756 N, qual a amplitude máxima do movimento de oscilação do motorista? (assuma que a força é harmônica)

(d) [0,5] Para ocorrer o fenômeno de ressonância entre a força aplicada ao trator pelas ondulações e as oscilações sobre o sistema cadeira-passageiro, qual velocidade o trator deve atingir? (resposta em m/s).

Solução Q3:

(a) Velocidade do trator: é 27/3,6 = 7,5 m/s

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\Delta x} = \frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ Hz}$$

$(\omega = 2\pi f = 3\pi \approx 9 \text{ rad/s})$

(b) $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{17280}{120}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{144} = \frac{6}{\pi}$ Hz.

$(\omega_0 = 2\pi f_0 = 12 \text{ rad/s})$

(c) $A = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$

$A = \frac{756}{120\times((12)^2-(3\pi)^2)}$

Usando $\pi \approx 3$, temos

$A = \frac{756}{120\times(144-81)} = \frac{756}{120\times 63} = 0,1\text{m}$

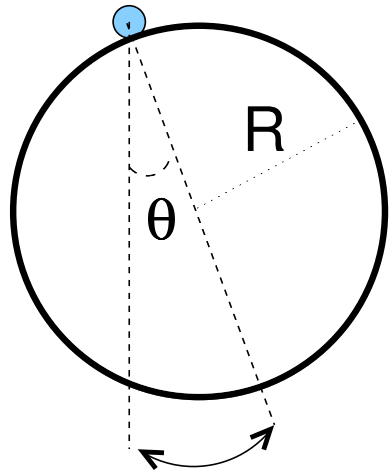
ou $A = 10$ cm.

(d) Para $f = f_0$, temos

$v = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x}{T_0} = f_0 \times \Delta x = \frac{6}{\pi}.5 = \frac{30}{\pi}$ m/s.

Aproximando $\pi \sim 3$, temos $v = 30/3 = 10$m/s ou $v = 36$ km/h.

Q4 - Uma bola de Natal (esfera oca) de massa M e raio R é pendurada em um ramo de árvore por um pequeno fio (comprimento desprezível) preso à superfície da esfera (vide figura) e oscila sob a ação da gravidade.



(a) [0.5] Escreva a equação diferencial de movimento para o ângulo $\theta(t)$ que o eixo da bola de Natal faz com a vertical (desprezando o atrito).

(b) [0.5] Se a bola é deslocada por um angulo pequeno ($\theta \ll 1$ rad) e solto a seguir, calcule a frequência natural de oscilação do sistema.

Considere agora que o atrito com o ar gere um torque proporcional à velocidade angular e à área A da bola de Natal: $\tau_{\text{res}} = -b.A.\frac{d\theta}{dt}$ onde b é uma constante (considere $\theta \ll 1$ rad e despreze outros tipos de atrito). Nesse caso:

(c) [0.5] Calcule o fator de qualidade do sistema em termos dos dados do problema.

(d) [1.0] Calcule, em função dos outros dados do problema, o raio máximo da bola R_{max} para que o regime de amortecimento seja subcrítico .

NOTA: **Expresse suas respostas em termos dos dados do problema (M, R, b) e de constantes como g e π.**

Formulário adicional: - Momento de inércia de uma esfera oca de raio R_e e massa m_e em relação a um eixo que passa pela seu borda: $I = \frac{5}{3} m_e R_e^2$; Área de uma esfera de raio R_e: $A = 4\pi R_e^2$

Solução Q4:

(a) A variação do momento angular em relação ao eixo do ramo será igual ao torque da força gravitacional: $\frac{dL}{dt} = \tau_g = -mgR\sin(\theta)$. Como $L = I\frac{d\theta}{dt}$ (onde I é o momento de inércia em relação ao eixo definido pelo ramo), temos:

$$\left(\frac{5}{3}mR^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\sin(\theta) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{5R}\sin(\theta)$$

(b) Para $\theta \ll 1$ rad, temos $\sin(\theta) \approx \theta$. Logo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{5R}\theta(t) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta(t)$$

que é a equação diferencial para um oscilador harmônico de frequência $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{5R}}}$.

(c) Para o caso com atrito, a variação do momento angular será dada por $\frac{dL}{dt} = \tau_g + \tau_{\text{res}}$, ou seja:

$$\left(\frac{5}{3}mR^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\sin(\theta) - b.A.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{5R}\sin(\theta) - b.\left(4\pi R^2\right).\frac{3}{5mR^2}\frac{d\theta}{dt}$$

ou seja, para θ pequeno, temos a eq. diferencial para θ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b.\frac{12\pi}{5m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{3g}{5R}\theta = 0$$

que é equivalente a eq. diferencial de um oscilador Harmônico amortecido do tipo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$$

onde $\gamma = \frac{12b\pi}{5m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{5R}}$

O fator de qualidade desse sistema é dado por $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{3g}{5R}}\frac{5m}{12b\pi} = \frac{m}{4\pi b}\sqrt{\frac{5g}{3R}}}$.

(d) O regime subcrítico ocorre quando $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ ou $\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$. Logo, temos

$$\frac{12.12.b^2.\pi^2}{4.25m^2} < \frac{3g}{5R} \Rightarrow R < \frac{5m^2g}{12\pi^2b^2}$$

Logo $\boxed{R_{\max} = \frac{5m^2g}{12\pi^2b^2}}$.