

Sistemas de Numeração e Aritmética

1 Objetivos deste tópico

Ao final do estudo deste tópico você saberá:

- Compreender a utilidade dos números na computação;
- Compreender o conceito de representação de números, especificamente o sistema de numeração posicional;
- Representar números em diferentes bases (bases decimal, binária, octal e hexadecimal);
- Converter a representação de um número de uma base para outra;
- Somar, subtrair, multiplicar e dividir nessas bases numéricas.

Leitura recomendada : seções do livro do Wakerly

- 2.1 Positional Number Systems;
- 2.2 Octal and Hexadecimal Numbers;
- 2.3 General Positional-Number-System Conversions;
- 2.4 Addition and Subtraction of Nondecimal Numbers;
- 2.8 Binary Multiplication;
- 2.9 Binary Division;

2 Números

Números servem para representar:

1. Quantidade;
2. Tamanho;
3. Ordem;
4. Identificador.

3 Representação

- Como podemos representar números?
- Que critérios devemos usar para escolher uma representação adequada para números?
- Sistemas de representação posicional:

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i \times r^i = d_{p-1} \times r^{p-1} + \dots + d_1 \times r^1 + d_0 \times r^0 + d_{-1} \times r^{-1} + \dots + d_{-n} \times r^{-n}$$

- D : número;
- r : base ou *radix*;
- d : dígito ($0 \leq d < r$);
- p : quantidade de dígitos na parte inteira;
- n : quantidade de dígitos na parte fracionária;

- Bases binária, octal e hexadecimal.
- Conversão entre diferentes bases de representação de números.

4 Aritmética

- Adição: adendos, soma;
- Subtração: minuendo, subtraendo, diferença;
- Multiplicação: multiplicando, multiplicador, produto;
- Divisão: dividendo, divisor, quociente, resto;

5 Exercícios

1. Converter os seguintes números binários para as bases decimal, hexadecimal e octal:

(a) 1110_2

(b) 1000100_2

(c) 11010111_2

(d) 011101010100100_2

2. Converter os seguintes números decimais para as bases binária, hexadecimal e octal:

(a) 14_{10}

- (b) 52_{10}
 - (c) 339_{10}
 - (d) 711_{10}
 - (e) 255_{10}
 - (f) 257_{10}
 - (g) 1024_{10}
 - (h) 65335_{10}
3. Converter $FFFF_{16}$ para a base 10. Apresente os cálculos realizados na conversão.
 4. Qual é a menor base b inteira positiva em que o número 1000_{10} é representado por apenas 1 dígito em notação posicional? Sugira uma representação para o número 1001_{10} nesta base b . Justifique a sua resposta.
 5. Quantos números diferentes podemos representar com 2, 4, 8 e 16 bits?
 6. Os valores 1 KB (kilo), 1 MB (mega), 1 GB (giga), 1 TB (tera), 1 PT (peta), 1 EB (exa), 1 ZB (zetta), 1 YT (yotta), correspondem a quantos bits? Dica: ver em https://en.wikipedia.org/wiki/Units_of_information#Size_examples
 7. Os babilônios desenvolveram o sistema sexagesimal (<https://en.wikipedia.org/wiki/Sexagesimal> (base 60) há cerca de 4.000 anos atrás. Quantos bits de informação contém um dígito sexagesimal? Como se representa o número 4000_{10} em sexagesimal?
 8. Classifique as afirmações a seguir como Verdadeira (V) ou Falsa (F):
 - (a) $7FE_{16} = 011111111110_2 = 3776_8$
 - (b) $100_{16} < 100_{10} < 100_8$
 - (c) $77_8 + 1_8 = 100_8$
 - (d) $13021_4 = (1 \times 10^{10} + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0)_4$
 - (e) $E,BC_{16} = (14 \times 10^0 + 12 \times 10^{-1} + 11 \times 10^{-2})_{10}$
 9. Seja uma base numérica com dígitos $\alpha, \beta, \delta, \lambda$, cuja tabela parcial de adição é apresentada na Figura ???. Calcule $\lambda\alpha\beta - \delta\delta\lambda$. Justifique a sua resposta apresentando os cálculos feitos.
 10. Chico foi suspenso por 10 dias por colar na prova de Sistemas Digitais e sua mãe o colocou de castigo em seu quarto. Para contar os dias, ele usou uma tática muito comum entre os encarcerados, que é fazer uma marca como a figura da parede do quarto. Cada marca representa um dia de suspensão e a cada quatro marcas ele desenhará a quinta cruzando as quatro anteriores para facilmente visualizar cinco dias. A Figura ??? mostra como estava a parede do quarto do Chico após o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto dia de suspensão, respectivamente. Pode-se dizer que o Chico criou um sistema de representação numérica. Considere as afirmações sobre este sistema:
 - (a) É posicional, pois a posição de cada marca influencia na quantidade representada;

	α	β	δ	λ
α	α	β	δ	λ
β	β	δ	λ	$\beta\alpha$
δ	δ	λ	$\beta\alpha$	$\beta\beta$
λ	λ	$\beta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\delta$

(Valor da coluna) + (Valor da linha) = valor da célula
Exemplo: $\lambda + \beta = \beta\alpha$

Figura 1: Tabela parcial de adição

- (b) É incapaz de representar a quantidade zero, pois se a parede o quarto do Chico estiver vazia não é possível saber se ele está suspenso ou não;
- (c) É incapaz de representar números fracionários da maneira tradicional, usando um ponto para distinguir a parte inteira da parte fracionária.

Quais são as afirmações que são corretas e incorretas?



Figura 2: Parede do Chico

11. Realize as seguintes operações com números inteiros positivos, nas bases indicadas:

- (a) $\text{BEBAD}_{16} + \text{CA1D0}_{16}$, na base 16
- (b) $251_{16} \times 27_{16}$, na base 16
- (c) $73201_8 - 34032_8$, na base 8
- (d) $33_{10}/6_{10}$, na base 2

12. Realize as seguintes operações:

- (a) (0,5 ponto) Converta FE_{16} para a base 10.
- (b) (0,5 ponto) Converta FE_{16} para a base 2.
- (c) (0,5 ponto) Converta o resultado da expressão em base 2 para a base 8:

$$(1 \times 10^{100} + 1 \times 10^{10} + 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0)_2$$

- (d) (0,5 ponto) Efetue o seguinte cálculo em binário sem sinal (e sem limitação de bits) e apresente o resultado nas base 2 e 10:

$$2F_{16} + 27_8 - 23_4$$

- (e) (0,5 ponto) Efetue o mesmo cálculo do item anterior, desta vez usando a representação em Complemento de 2 em 6 bits. Apresente o resultado na representação em Complemento de 2 e em base 10. Houve transbordo (*overflow*)? Justifique a sua resposta.
13. Engenheiros Romanos também faziam contas. Veja como faziam em <http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/>.
- (a) Converta os números FF_{16} e $A2_{16}$ para a representação dos números romanos. Apresente os cálculos realizados para efetuar a conversão.
- (b) Faça as seguintes operações em hexadecimal e com os métodos desenvolvidos para os números romanos:
- $FF + A2$
 - $FF - A2$
 - $FF \times A2$
 - $FF / A2$