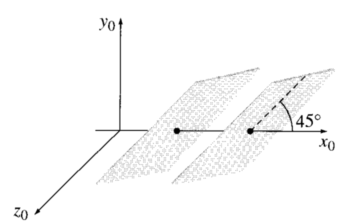
ELETROMAGNETISMO II (4302304) - LISTA 2b

1. Em mecânica clássica, a 2^a lei de Newton pode ser escrita na forma familiar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. A equação relativística, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, não pode ser expressa tão simplesmente. Mostre, por outro lado, que
$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})}{c^2-u^2}\right],$$
onde $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{u}/dt$ é a **3-aceleração ordinária** e $\mathbf{u}$ é a 3-velocidade.

2. Defina a **aceleração própria** na forma
$$\alpha^\mu \equiv \frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$
   (a) Determine α^0 e $\boldsymbol{\alpha}$ em termos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$ (a aceleração ordinária).
   (b) Expresse $\alpha_\mu\alpha^\mu$ em termos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{a}$.
   (c) Mostre que $\eta^\mu\alpha_\mu = 0$.
   (d) Escreva a versão de Minkowski da segunda lei de Newton em termos de α^μ. Avalie o produto invariante $K^\mu\eta_\mu$.

3. Um capacitor de placas paralelas, em repouso num referencial inercial S_0 e inclinado de um ângulo de 45° com respeito ao eixo x_0, carrega densidades de carga $\pm\sigma_0$ sobre as duas placas (ver figura). O sistema S se move para a direita com velocidade v com respeito a S_0.



   (a) Determine $\mathbf{E}_0$, o campo elétrico em S_0.
   (b) Determine $\mathbf{E}$, o campo em S.
   (c) Que ângulo as placas fazem com o eixo x?
   (d) Os campos são perpendiculares às placas em S?

4. (a) Verifique que a lei de Gauss, $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = Q/\epsilon_0$, é obedecida pelo campo de uma carga pontual em movimento uniforme, integrando sobre uma esfera de raio R centrada na carga.
   (b) Determine o vetor de Poynting de uma carga pontual em movimento uniforme. Assuma, por exemplo, que a carga esteja se movendo ao longo do eixo z com velocidade v, e calcule $\mathbf{S}$ no instante em que q passa pela origem.

5. (a) Carga q_A está em repouso na origem no sistema S; carga q_B se move com velocidade v numa trajetória paralela ao eixo x, tal que $y = d$. Determine a força eletromagnética sobre q_B no instante em que ela cruza o eixo y.

(b) Agora estude o mesmo problema no sistema S', que se move para a direita com velocidade v. Determine a força sobre q_B quando q_A cruza o eixo y'. Faça isso de duas formas: (i) usando sua resposta do item (a) e a lei de transformação da força; (ii) calculando os campos em S' e usando a lei de força de Lorentz.

6. (a) Mostre que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ é um invariante relativístico.

   (b) Mostre que $E^2 - c^2 B^2$ é um invariante relativístico.

   (c) Suponha que em um referencial inercial $\mathbf{B} = 0$, mas $\mathbf{E} \neq 0$ (em um dado ponto P). É possível encontrar um outro referencial inercial em que o campo *elétrico* é zero em P?

7. Uma onda eletromagnética plana de frequência angular ω está se propagando na direção x no vácuo. Ela está polarizada na direção y, e a amplitude do campo elétrico é E_0.

   (a) Escreva as expressões para os campos elétrico e magnético, $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ e $\mathbf{B}(x, y, z, t)$. Certifique-se de definer quaisquer quantidades auxiliares você precise introduzir, em termos de ω, E_0 e constantes fundamentais.

   (b) Esta mesma onda é observada de um sistema inercial S' movendo-se na direção x com velocidade v com respeito ao referencial inercial original S. Determine os campos elétrico e magnético em S', expressando-os em termos das coordenadas em S': $\mathbf{E}'(x', y', z', t')$ e $\mathbf{B}'(x', y', z', t')$. Novamente, certifique-se de definir quaisquer quantidades auxiliares introduzidas.

   (c) Qual a frequência ω' da onda em S'? Interprete seu resultado. Qual o comprimento de onda λ' em S'? A partir de ω' e λ', determine a velocidade da onda em S'. É o que você esperava?

   (d) Qual a razão entre a intensidade da onda em S' e em S? Quando jovem, Einstein se perguntava qual o aspecto de uma onda eletromagnética se fosse possível se mover ao seu lado à velocidade da luz. O que você diria a ele sobre a amplitude, frequência e intensidade da onda, à medida que v se aproxima de c?

8. Lembre-se que um 4-vetor *covariante* é obtido a partir de um 4-vetor *contravariante* trocando-se o sinal da componente temporal. O mesmo valr para tensores. Quando abaixa-se um índice para torná-lo covariante, troca-se o sinal caso aquele índice seja igual a zero. Calcule os invariantes:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} G_{\mu\nu},$$

   em termos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

9. Mostre que a equação de Maxwell em formato covariante $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ pode ser expressa em termos do tensor de campo $F^{\mu\nu}$ na forma

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0.$$

10. Você deve ter notado que o operador 4-divergência ∂/∂^μ se comporta como um 4-vetor *covariante*, de fato, ele é em geral representado por ∂_μ. Por exemplo, a equação de continuidade $\partial_\mu J^\mu$ tem a forma de um produto invariante de dois 4-vetores. A correspondente 4-divergência *contravariante* seria $\partial^\mu \equiv \partial x_\mu$. Prove que $\partial^\mu \phi$ é um 4-vetor contravariante, onde ϕ é uma função escalar, determinando a lei de transformação dessa quantidade, fazendo uso da regra da cadeia.

11. "Deduza"a lei de força de Lorentz, da seguinte forma: seja q uma carga em repouso em S', tal que $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$, e assuma que S' se move com velocidade $\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$ com respeito a S. Use as regras de transformação para as componentes paralelas e perpendiculares a $\mathbf{v}$ para reescrever $\mathbf{F}'$ em termos de $\mathbf{F}$, e $\mathbf{E}'$ em termos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. A partir dessas fórmulas, deduza a fórmula de para $\mathbf{F}$ em termos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

12. Uma carga q é liberada a partir do repouso na origem, na presença de um campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$ e um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\hat{\boldsymbol{x}}$. Determine a trajatória da partícula fazendo uma transformação de Lorentz para um referencial em que $\mathbf{E} = 0$, obtendo a trajetória neste sistema e transformando de volta para o sistema original. Assuma que $E_0 < cB_0$.

13. A densidade linear de carga por unidade de comprimento num feixe iônico de seção transversal circular constante é λ. Calcule a força sobre um único íon do feixe de carga Q localizado a uma distância r do centro do feixe, assumindo que o raio do feixe é $R > r$ e que os íons se movem todos com a mesma velocidade v. R: $\frac{Q\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2\gamma^2}\hat{\boldsymbol{r}}$.

14. Uma partícula de massa m e carga e é acelerada por um tempo por um campo elétrico uniforme até atingir uma velocidade não necessariamente pequena com respeito a c.

    (a) Determine o momento da partícula no final do período acelerado. R: eEt

    (b) Determine a velocidade da partícula ao final do período acelerado. R: $v = \frac{eEct}{\sqrt{(eEt)^2+m^2c^2}}$

    (c) A partícula é instável e possui um tempo de vida τ no seu referencial de repouso. Determine o tempo de vida que seria medido por um observador movendo-se com a mesma velocidade da partícula determinada no item (b). R: $\tau' = \tau\sqrt{1+\left(\frac{eEt}{mc}\right)^2}$