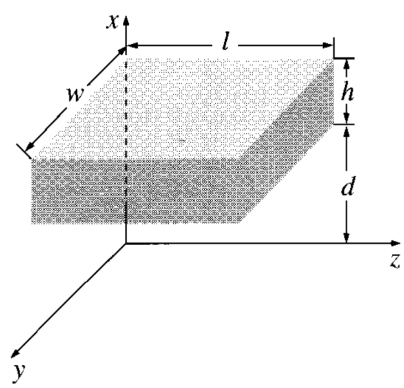
ELETROMAGNETISMO II (4302304) - LISTA 2a

1. Dados os potenciais escalar e vetor

$$V = 0, \qquad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & \text{para } |x| < ct \\ 0, & \text{para } |x| > ct, \end{cases}$$

onde k é uma constante e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, considere uma caixa retangular de comprimento l, largura w e altura h, situada a uma distância acima do plano yz (ver figura).



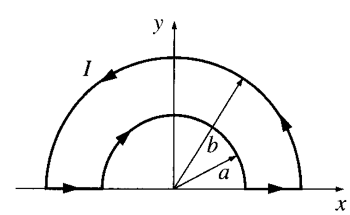
(a) Determine a energia contida na caixa nos instantes $t_1 = d/d$ e $t_2 = (d+h)/c$.

(b) Calcule o vetor de Poynting e determine a energia por unidade de tempo fluindo para dentro da caixa no intervalo $t_1 < t < t_2$.

(c) Integre o resultado do item (b) entre t_1 e t_2 e confirme que o aumento em energia de (a) é consistente com o fluxo de energia de (b).

2. Suponha $V = 0$ e $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{y}}$, onde A_0, ω e k são constantes. Determine os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e verifique que eles satisfazem as equações de Maxwell no vácuo. Que condição deve ser imposta sobre ω e k?

3. Um pedaço de fio moldado na forma de um laço, como mostrado na figura, transporta corrente que aumenta linearmente com o tempo



$$I(t) = kt.$$

Calcule o potencial retardado $\mathbf{A}$ no centro, bem como o campo elétrico no mesmo ponto. Por que esse fio (neutro) produz uma campo elétrico? (Por que não é possível determinar o campo magnético a partir da expressão obtida para $\mathbf{A}$?)

4. Uma partícula de carga q se move num círculo de raio a com velocidade angular constante ω. Assuma que o círculo esteja contido no plano xy, centrado na origem e que em $t = 0$, a carga esteja em $(a, 0)$. Determine os potenciais de Liénard-Wiechert sobre os pontos do eixo z.

5. Ao longo da trajetória de uma partícula, no máximo um ponto da trajetória se comunica com o ponto de campo $\mathbf{r}$. Em alguns casos pode nem haver tal ponto (ou seja, um observador em $\mathbf{r}$ não veria a partícula). Na linguagem da teoria da Relatividade Geral, diz-se que a partícula se encontra "além do horizonte"do observador. Como exemplo, considere uma partícula em **movimento hiperbólico** ao longo do eixo x:

$$\mathbf{w}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}\,\hat{\mathbf{x}} \quad (\infty < t < \infty)$$

Em Relatividade Especial, esta é a trajetória de um partícula sujeita a uma força $F = mc^2/b$.

(a) Esboce o gráfico $w \times t$. Em quatro ou cinco pontos representativos sobre a curva, desenhe a trajetória de um sinal luminoso emitido pela partícula naquele ponto (tanto na região $x < 0$ e $x > 0$).

(b) Que região do gráfico corresponde a pontos do espaço e do tempo (x, t) nos quais a partícula não pode ser vista?

(c) Em quais instantes alguém na posição x recebe o primeiro sinal da partícula? Antes deste instante, na posição x, o potencial é evidentemente nulo.

(d) É possível para uma partícula, uma vez vista, desaparecer da visão?

6. Determine os potenciais de Liénard-Wiechert para uma carga em movimento hiperbólico (exercício anterior). Assuma que o ponto $\mathbf{r}$ se encontra sobre o eixo x à direita da carga.

7. Mostre que para uma carga pontual q em movimento com velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\mathscr{r}c - \boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{v})^3} \left[(\mathscr{r}c - \boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{v})(-\mathbf{v} + \mathscr{r}\mathbf{a}/c) + \frac{\mathscr{r}}{c}(c^2 - v^2 + \boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} \right]$$

8. Suponha que um anel de raio a possua uma densidade linear de carga $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin(\theta/2)$. O anel passa a girar em torno do próprio eixo com velocidade angular ω. Determine os potenciais escalar e vetor exatos no centro do anel. R: $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{3\pi} \left\{ \sin\left[\omega(t - a/c)\right] \hat{\mathbf{x}} - \cos\left[\omega(t - r/c)\right] \hat{\mathbf{y}} \right\}$

9. Verifique que os potenciais gerados por uma carga pontual em movimento com velocidade constante satisfazem a condição do calibre de Lorentz.

10. Uma carga pontual q se move com velocidade constante ao longo do eixo x. Calcule a potencia total atravessando o plano $x = a$ no instante em a partícula está na origem. R: $q^2 v/(32\pi\epsilon_0 a^2)$

11. Determine o vetor de Poynting para uma partícula se movendo com velocidade constante e mostre que a potência total irradiada é nula.

12. Mostre que no limite de baixas velocidades $v/c << 1$, o termo dominante do vetor de Poynting em regiões distantes de uma carga em movimento pode ser aproximado por

$$\mathbf{S} \simeq \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{(\boldsymbol{\mathscr{r}} \times \mathbf{a})^2\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^5},$$

onde as quatidades, é claro, devem ser calculadas no tempo retardado.

13. Mostre que na situação do exercício anterior, a potência total irradiada no limite de baixas velocidades é

$$P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{a^2}{c^3} \qquad \text{(Fórmula de Larmor)}$$

Uma escolha conveniente de superfície de integração é uma casca esférica centrada na posição retardada da partícula.

14. Quando uma onda eletromagnética atravessa um material com elétrons livres (ou fracamente ligados), esses elétrons são forçados a oscilar com a frequência da onda eletromagnética. Usando a aproximação de baixas velocidades, mostre que a média temporal da potência irradiada por elétron do material na presença de um campo eletromagnético externo se propagando na direção z

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin[\omega(t - z/v)]$$

é dada por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0}\frac{e^4 E_0^2}{m_e c^3}$$