

Co e Contravariantes

Esmerindo Bernardes¹

¹*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil*
(Dated: 16 de março de 2020)

Apresentação “experimental” de coordenadas co e contravariantes no plano euclidiano.

I. PLANO EUCLIDIANO

Quando os eixos de um sistema de coordenadas não são ortogonais, como aquele mostrado no lado direito da Figura 1, por exemplo, então há dois procedimentos “canônicos” para grafarmos as coordenadas de um mesmo ponto P . Podemos traçar retas paralelas aos eixos coordenados passando pelo ponto P : os pontos x_1 e x_2 , intersecção destas retas paralelas (retas tracejadas em vermelho) com os eixos coordenados, são as coordenadas covariantes. Também podemos usar retas perpendiculares (azuis) aos eixos coordenados: neste caso os pontos x^1 e x^2 são as coordenadas contravariantes. Note que as coordenadas covariantes possuem índices para baixo (subíndices) como os vetores de base \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . Note também que em um sistema de coordenadas ortonormal, como aquele mostrado no lado esquerdo da Figura 1, as duas formas canônicas da grafia de pontos são idênticas.

Naturalmente, as coordenadas de vetores descritos em sistemas de coordenadas não-ortogonais seguem a mesma nomenclatura das coordenadas de pontos.

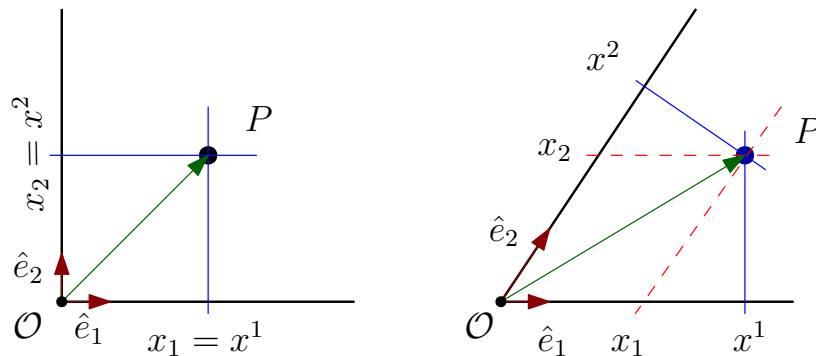


Figura 1. Coordenadas co e contravariantes em dois sistemas de coordenadas. Esquerda: sistema ortonormal. Direita: sistema não-ortogonal.

A relação entre coordenadas co e contravariantes é feita através da métrica (em duas dimensões)

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Usando a métrica e sua inversa relacionamos coordenadas co e contravariantes:

$$x_i = \sum_{j=1}^2 g_{ij} x^j = g_{ij} x^j, \quad x^i = \sum_{j=1}^2 g^{ij} x_j = g^{ij} x_j, \quad \sum_{k=1}^2 g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i. \quad (2)$$

É comum omitir o sinal de somatório em um termo contendo o mesmo índice de soma nas formas co e contravariante. O símbolo g^{ij} representam os elementos da matriz inversa da métrica definida em (1). Toda vez que compramos um sistema de coordenadas no Departamento de Geometria do ICMC, recebemos a métrica (1) junto com o manual de uso. A métrica contém informações sobre a orientação relativa dos eixos coordenados. Num sistema ortonormal, a métrica é a matriz identidade (ou proporcional a ela).

No caso do espaço de Minkowski (não-euclidiano), a métrica é diagonal, evidenciando que os eixos coordenados são ortogonais, porém ela não é proporcional à identidade, evidenciando que a forma de calcular distâncias será diferente da forma euclidiana.