“Relatividade Especial I”

Esmerindo Bernardes

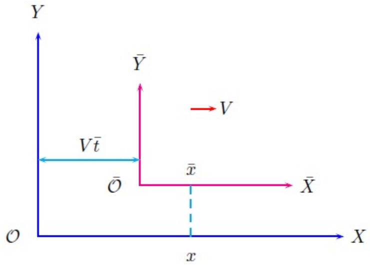
IFSC, USP

24 de março de 2020

Conteúdo I

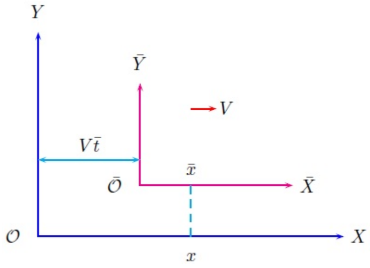
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa *V*).



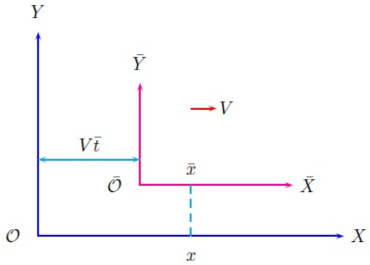
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.



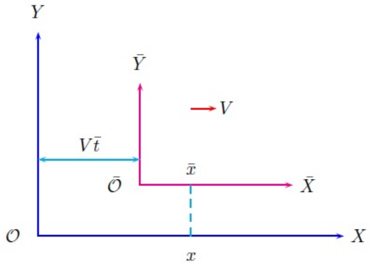
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.



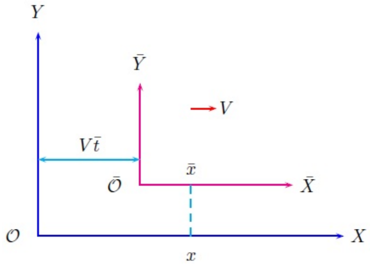
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.



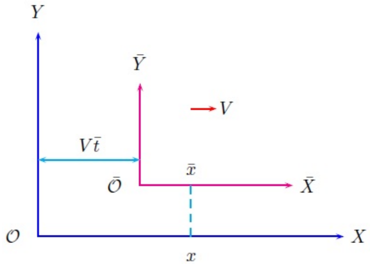
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.



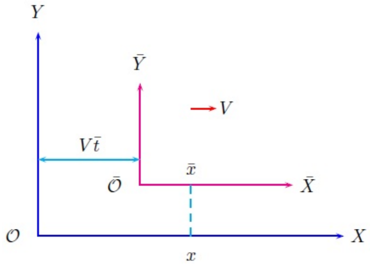
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$



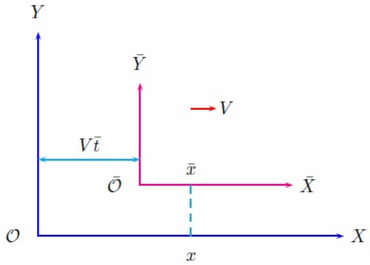
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$



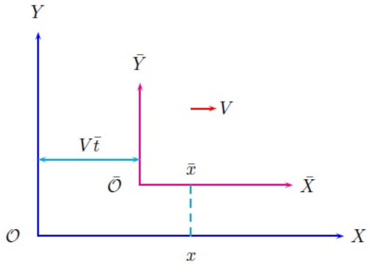
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$



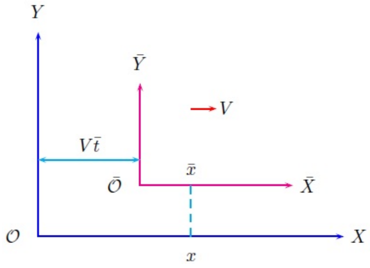
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$



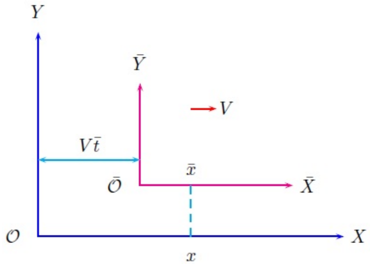
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
  - Galileu–Newton:



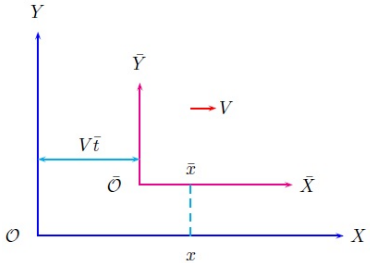
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
    - Galileu–Newton:
        - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.



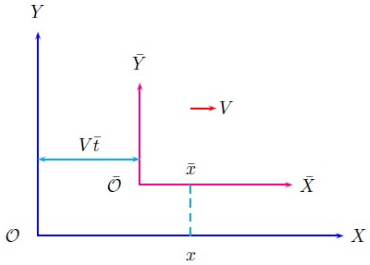
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
    - Galileu–Newton:
        - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.
        - Tempo absoluto ($t = \bar{t}$ sempre).



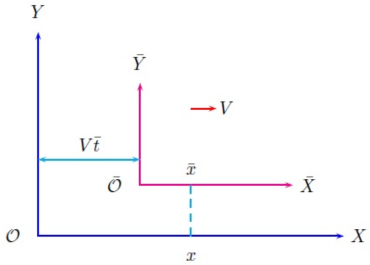
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
  - Galileu–Newton:
    - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo absoluto ($t = \bar{t}$ sempre).
    - Simultaneidade absoluta.



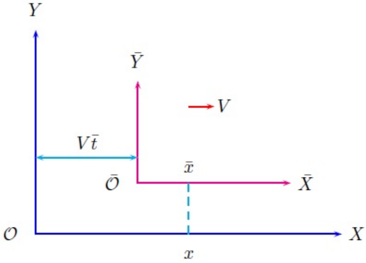
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
    - Galileu–Newton:
        - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.
        - Tempo absoluto ($t = \bar{t}$ sempre).
        - Simultaneidade absoluta.



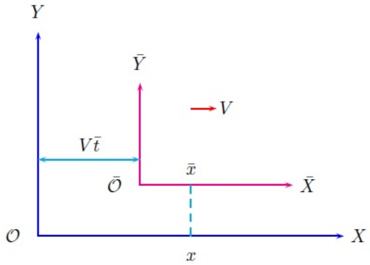
Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
    - Galileu–Newton:
        - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.
        - Tempo absoluto ($t = \bar{t}$ sempre).
        - Simultaneidade absoluta.



Transformações de Galileu–Newton:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- $t = \bar{t} \implies x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \implies \gamma = 1$
- $\boxed{x = \bar{x} + Vt, \quad t = \bar{t}}$ $\boxed{\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V}$
- Preserva a segunda lei: $\boxed{\bar{a}_{\bar{x}} = a_x}$
  - Galileu–Newton:
    - As leis da Mecânica são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo absoluto ($t = \bar{t}$ sempre).
    - Simultaneidade absoluta.



Espaço euclidiano:

- Eventos=(tempo, posição)

Espaço euclidiano:

- Eventos=(tempo, posição)
- Posições: (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$

Espaço euclidiano:

- Eventos=(tempo, posição)
- Posições: (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$
- Distância infinitesimal:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i dx_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij}$$

Espaço euclidiano:

- Eventos=(tempo, posição)
- Posições: (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$
- Distância infinitesimal:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i dx_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij}$$

- Invariância rotacional: $d\bar{s}^2 = ds^2$

$$\bar{x} = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, \quad \bar{y} = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, \quad \bar{z} = z$$

Espaço euclidiano:

- Eventos=(tempo, posição)
- Posições: (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$
- Distância infinitesimal:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i dx_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij}$$

- Invariância rotacional: $d\bar{s}^2 = ds^2$

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \bar{y} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, \quad \bar{z} = z$$

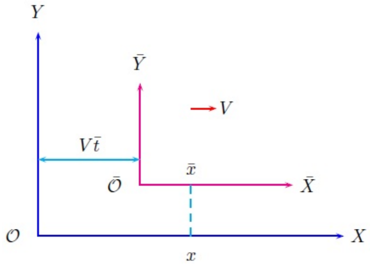
- ds^2 não é invariante pelas transformações de Galileu–Newton:

$$x = \bar{x} + Vt, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \bar{t}$$

Conteúdo I

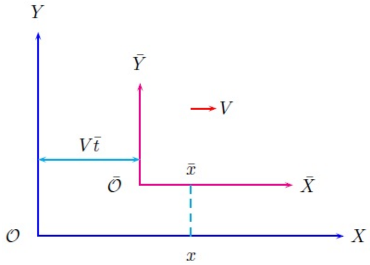
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa *V*).



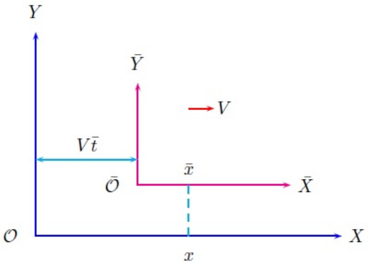
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.



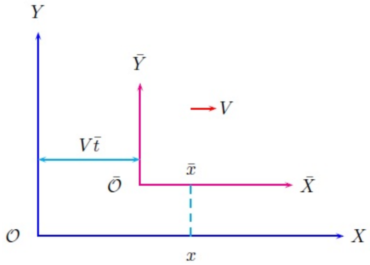
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.



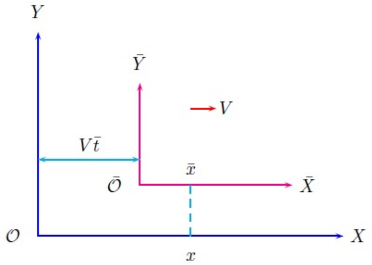
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.



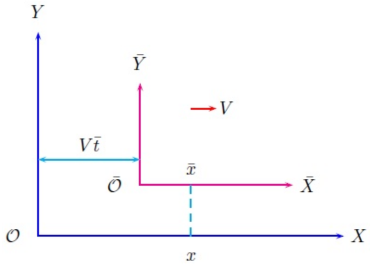
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.



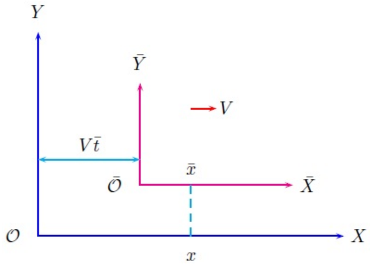
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$



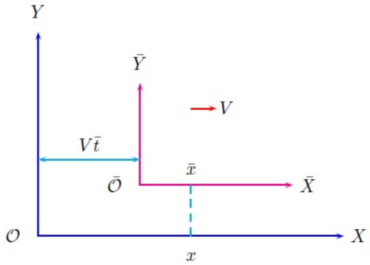
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$



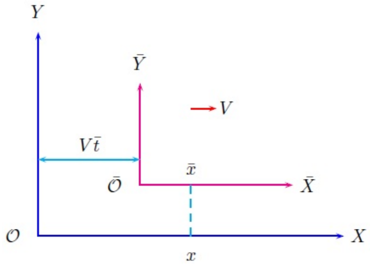
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$



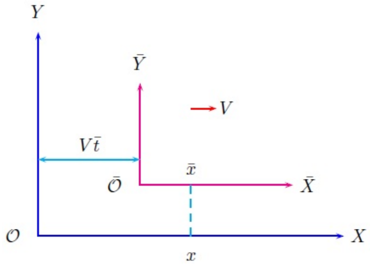
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$



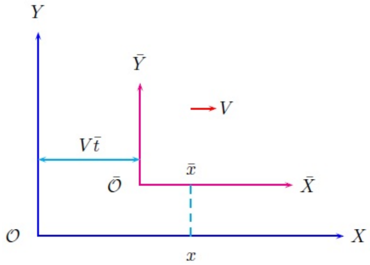
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):



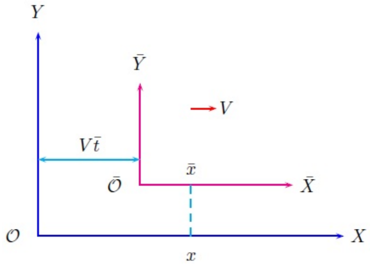
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.



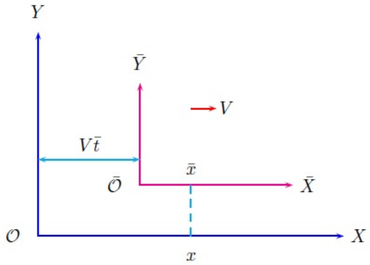
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo não é absoluto.



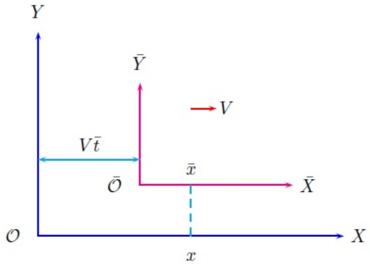
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo não é absoluto.
    - Simultaneidade não é absoluta.



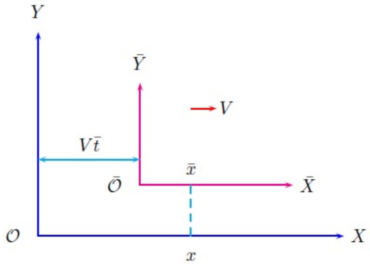
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo não é absoluto.
    - Simultaneidade não é absoluta.
    - $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$



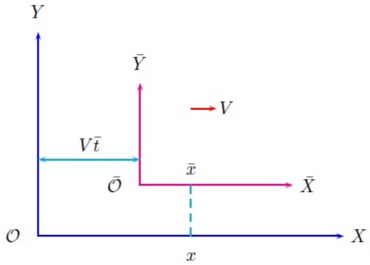
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
    - Einstein (1905):
        - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
        - Tempo não é absoluto.
        - Simultaneidade não é absoluta.
        - $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
        - $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct), \quad c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)}$



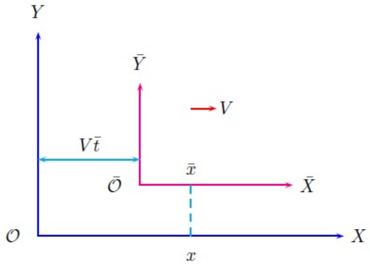
Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo não é absoluto.
    - Simultaneidade não é absoluta.
    - $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
    - $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct), \quad c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)}$



Transformações de Lorentz:

- Referenciais inerciais (rapidez relativa V).
- Cada referencial com relógio próprio.
- Relógios sincronizados em $t = \bar{t} = 0$.
- $x = \bar{\gamma}(\bar{x} + V\bar{t})$ ou $\bar{x} = \gamma(x - Vt)$.
- Homogêneo e isotrópico: $\bar{\gamma} = \gamma = \gamma(V^2)$.
- Luz: $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$
- $ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t$
- $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}}$
  - Einstein (1905):
    - As leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais.
    - Tempo não é absoluto.
    - Simultaneidade não é absoluta.
    - $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\,\bar{x} + c\bar{t})}$
    - $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct), \quad c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)}$



Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{O}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\,\bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow$ $\boxed{T = \gamma\,\bar{T}}$.

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2$, $\Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow$ $\boxed{T = \gamma\, \bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow$ $\boxed{T = \gamma\, \bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**
- Comprimento próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{L}, \quad \bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow \boxed{T = \gamma\, \bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**
- Comprimento próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{L}, \quad \bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$
- Em $\mathcal{O}$: $t_1 = t_2, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = L$ e TL3 $\Longrightarrow \boxed{\bar{L} = \gamma\, L}$.

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow$ $\boxed{T = \gamma\, \bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**
- Comprimento próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{L}, \quad \bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$
- Em $\mathcal{O}$: $t_1 = t_2, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = L$ e TL3 $\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{L} = \gamma\, L}$.
- **O comprimento próprio será sempre o maior comprimento.**

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\,\bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2$, $\Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow$ $\boxed{T = \gamma\,\bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**
- Comprimento próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{L}$, $\bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$
- Em $\mathcal{O}$: $t_1 = t_2$, $\Delta x = x_2 - x_1 = L$ e TL3 $\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{L} = \gamma\, L}$.
- **O comprimento próprio será sempre o maior comprimento.**

Dilatação temporal + contração espacial:

- $x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t})$ $\boxed{ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct)}$ $c\bar{t} = \gamma(-\beta\, x + ct)$
- Tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \bar{T}$
- Em $\mathcal{O}$: $x_1 \neq x_2, \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T$ e TL2 $\Longrightarrow \boxed{T = \gamma\, \bar{T}}$.
- **O tempo próprio será sempre o menor intervalo de tempo.**
- Comprimento próprio em $\bar{\mathcal{O}}$: $\Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{L}, \quad \bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$
- Em $\mathcal{O}$: $t_1 = t_2, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = L$ e TL3 $\Longrightarrow \boxed{\bar{L} = \gamma\, L}$.
- **O comprimento próprio será sempre o maior comprimento.**

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \quad g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta_\mu^\nu$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \quad g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu$
- TL: $\boxed{x^0 = \gamma\bar{x}^0 + \beta\gamma\bar{x}^1, \quad x^1 = \beta\gamma\bar{x}^0 + \gamma\bar{x}^1, \quad ds^2 = d\bar{s}^2}$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \quad g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu$
- TL: $\boxed{x^0 = \gamma\bar{x}^0 + \beta\gamma\bar{x}^1, \quad x^1 = \beta\gamma\bar{x}^0 + \gamma\bar{x}^1, \quad ds^2 = d\bar{s}^2}$
- Forma matricial da TL: $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g \sim \beta \to -\beta$$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \quad g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu$
- TL: $\boxed{x^0 = \gamma\bar{x}^0 + \beta\gamma\bar{x}^1, \quad x^1 = \beta\gamma\bar{x}^0 + \gamma\bar{x}^1, \quad ds^2 = d\bar{s}^2}$
- Forma matricial da TL: $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g \sim \beta \to -\beta$$

Espaço mimkowskiano:

- Evento: $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$
- Distância infinitesimal: $\boxed{(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- Métrica: $\boxed{g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1}$
- Coordenadas covariantes: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu$
- $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \quad g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \quad g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu$
- TL: $\boxed{x^0 = \gamma\bar{x}^0 + \beta\gamma\bar{x}^1, \quad x^1 = \beta\gamma\bar{x}^0 + \gamma\bar{x}^1, \quad ds^2 = d\bar{s}^2}$
- Forma matricial da TL: $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu$

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g \sim \beta \to -\beta$$

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?
- $A \overset{\Psi(V)}{\rightarrow} B, \quad B \overset{\Phi(U)}{\rightarrow} C, \quad A \overset{\Omega(W)}{\rightarrow} C$

Rotações no plano *ct* – *x*:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?
- $A \overset{\Psi(V)}{\to} B, \quad B \overset{\Phi(U)}{\to} C, \quad A \overset{\Omega(W)}{\to} C$
- $\gamma = \cosh\psi, \quad \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \quad \tanh\psi = \beta = V/c$

$$\Psi = (\Psi^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \operatorname{senh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotações no plano *ct* – *x*:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?
- $A \stackrel{\Psi(V)}{\rightarrow} B, \quad B \stackrel{\Phi(U)}{\rightarrow} C, \quad A \stackrel{\Omega(W)}{\rightarrow} C$
- $\gamma = \cosh\psi, \quad \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \quad \tanh\psi = \beta = V/c$

$$\Psi = (\Psi^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \operatorname{senh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Omega = \Psi\Phi$

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?
- $A \overset{\Psi(V)}{\rightarrow} B, \quad B \overset{\Phi(U)}{\rightarrow} C, \quad A \overset{\Omega(W)}{\rightarrow} C$
- $\gamma = \cosh\psi, \quad \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \quad \tanh\psi = \beta = V/c$

$$\Psi = (\Psi^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \operatorname{senh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Omega = \Psi\Phi$

Rotações no plano $ct - x$:

- Três referenciais inerciais, A, B e C.
- O ref. A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o ref. B tem uma velocidade relativa a C dada por U.
- Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V?
- $A \stackrel{\Psi(V)}{\rightarrow} B, \quad B \stackrel{\Phi(U)}{\rightarrow} C, \quad A \stackrel{\Omega(W)}{\rightarrow} C$
- $\gamma = \cosh\psi, \quad \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \quad \tanh\psi = \beta = V/c$

$$\Psi = (\Psi^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \operatorname{senh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Omega = \Psi\Phi$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \mathrm{senh}\,\omega & 0 & 0 \\ \mathrm{senh}\,\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi+\phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \mathrm{senh}\,\omega & 0 & 0 \\ \mathrm{senh}\,\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$ **A velocidade da luz é um limite superior.**

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$ **A velocidade da luz é um limite superior.**
- TL formam um grupo (de Lie, abeliano, não-compacto).

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$ **A velocidade da luz é um limite superior.**
- TL formam um grupo (de Lie, abeliano, não-compacto).

Composição de velocidades:

- $\Omega = \Psi\Phi$:

$$\Omega = (\Omega^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \operatorname{senh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \psi + \phi$$

- $\tanh\psi = \dfrac{V}{c}, \quad \tanh\phi = \dfrac{U}{c}, \quad \tanh\omega = \dfrac{W}{c}$
- $\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \dfrac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}$
- $\boxed{W = \dfrac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$ **A velocidade da luz é um limite superior.**
- TL formam um grupo (de Lie, abeliano, não-compacto).

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\,\bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Composição de velocidades II:

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Conteúdo I

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)
- $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}, \quad \gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \dfrac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v) \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)
- $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}, \quad \gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \dfrac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$
- Definição: $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$, 4-velocidade: $\boxed{(u^\mu) = \gamma\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right)}$

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v) \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$
- Definição: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, 4-velocidade: $\boxed{(u^\mu) = \gamma\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right)}$

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)
- $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}, \quad \gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \dfrac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v) \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$
- Definição: $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$, 4-velocidade: $\boxed{(u^\mu) = \gamma\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right)}$

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\alpha dx_\alpha}{ds^2} = 1$$

4-velocidade:

- Objeto em movimento em um dos referenciais.
- Comprimento infinitesimal: $cdt = \gamma(v)\, ds = \gamma(v)\, cd\tau$.

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt)^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2$$

- Tempo próprio: $d\tau = dt/\gamma(v)$ (sempre menor)
- $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}, \quad \gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \dfrac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma^3(v)\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$
- Definição: $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$, 4-velocidade: $\boxed{(u^\mu) = \gamma\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right)}$

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\alpha dx_\alpha}{ds^2} = 1$$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma^2\left(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\right)}$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2 x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma^2\left(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\right)}$
- Direção: $u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \dfrac{du_\alpha}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\Big(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\Big) + \gamma^2\Big(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\Big)}$
- Direção: $u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \dfrac{du_\alpha}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0$
- Módulo: $w^\alpha w_\alpha = -\dfrac{\gamma^4}{c^4}\Big[a^2 + \dfrac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\Big]$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\Big(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\Big) + \gamma^2\Big(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\Big)}$
- Direção: $u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \dfrac{du_\alpha}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0$
- Módulo: $w^\alpha w_\alpha = -\dfrac{\gamma^4}{c^4}\Big[a^2 + \dfrac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\Big]$
- Aceleração constante $\vec{g}$: $(\bar{w}^\mu) = \big(0, \frac{\vec{g}}{c^2}\big)$, $\quad (\vec{v}\cdot\vec{a})^2 = (va)^2$

$$\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\frac{g^2}{c^4} = w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3}{c^2}\dot{v}\right)^2$$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma^2\left(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\right)}$
- Direção: $u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \dfrac{du_\alpha}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0$
- Módulo: $w^\alpha w_\alpha = -\dfrac{\gamma^4}{c^4}\left[a^2 + \dfrac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\right]$
- Aceleração constante $\vec{g}$: $(\bar{w}^\mu) = \left(0, \frac{\vec{g}}{c^2}\right)$, $\quad (\vec{v}\cdot\vec{a})^2 = (va)^2$

$$\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\frac{g^2}{c^4} = w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3}{c^2}\dot{v}\right)^2$$

4-aceleração:

- Definição: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$, $\boxed{(w^\mu) = \gamma^4 \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\left(1, \dfrac{\vec{v}}{c}\right) + \gamma^2\left(0, \dfrac{\vec{a}}{c^2}\right)}$
- Direção: $u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \dfrac{du_\alpha}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0$
- Módulo: $w^\alpha w_\alpha = -\dfrac{\gamma^4}{c^4}\left[a^2 + \dfrac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\right]$
- Aceleração constante $\vec{g}$: $(\bar{w}^\mu) = \left(0, \frac{\vec{g}}{c^2}\right)$, $\quad (\vec{v}\cdot\vec{a})^2 = (va)^2$

$$\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\frac{g^2}{c^4} = w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3}{c^2}\dot{v}\right)^2$$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\,v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\, v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c} \ll 1$: $v = gt$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\,v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c} \ll 1$: $v = gt$
- Comprimento: $\displaystyle\int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \to ct \ (t \to \infty)$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\, v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c} \ll 1$: $v = gt$
- Comprimento: $\displaystyle\int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \to ct \ (t\to\infty)$
- Tempo próprio: $cd\tau = ds = cdt/\gamma(v)$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=g$ Solução: $\gamma(v)\,v=gt,\quad v(0)=0$

$$v(t)=\frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}},\quad \lim_{t\to\infty}v(t)=c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c}\ll 1$: $v=gt$
- Comprimento: $\displaystyle\int_{t=0}^{t}v(t)dt=\frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}-1\right)\to ct\ (t\to\infty)$
- Tempo próprio: $cd\tau=ds=cdt/\gamma(v)$
- $\displaystyle\tau(t)=\int_0^t\frac{dt}{\gamma(v)}=\frac{c}{g}\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{gt}{c}\right),\quad \lim_{t\to\infty}\tau(t)=\frac{c}{g}\ln(2gt/c)$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\, v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2 t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c} \ll 1$: $v = gt$
- Comprimento: $\displaystyle\int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \to ct \ (t \to \infty)$
- Tempo próprio: $cd\tau = ds = cdt/\gamma(v)$
- $\displaystyle\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{c}{g}\,\mathrm{senh}^{-1}\!\left(\frac{gt}{c}\right), \quad \lim_{t\to\infty} \tau(t) = \frac{c}{g}\ln(2gt/c)$

Queda-livre:

- EDO: $\dfrac{\dot{v}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g$ Solução: $\gamma(v)\, v = gt, \quad v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = c$$

- Regime não-relativístico, $\dfrac{gt}{c} \ll 1$: $v = gt$
- Comprimento: $\displaystyle\int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \to ct \ (t\to\infty)$
- Tempo próprio: $cd\tau = ds = cdt/\gamma(v)$
- $\displaystyle\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{c}{g}\,\mathrm{senh}^{-1}\!\left(\frac{gt}{c}\right), \quad \lim_{t\to\infty}\tau(t) = \frac{c}{g}\ln(2gt/c)$

Conteúdo I

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies$ m **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2u^\mu u_\mu = m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2$$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies$ m **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2u^\mu u_\mu = m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2$$

- Potência=taxa de variação temporal da energia:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{mc^2}{\mathcal{E}}\dot{m}c^2 = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} + \gamma\dot{m}c^2$$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies$ ***m* é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2u^\mu u_\mu = m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2$$

- Potência=taxa de variação temporal da energia:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{mc^2}{\mathcal{E}}\dot{m}c^2 = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} + \gamma\dot{m}c^2$$

4-momentum linear:

- Definição: $p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \implies m$ **é um invariante.**
- Taylor: $cp^0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$
- Energia mecânica: $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (não é invariante).
- Momentum linear: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

$$(p^\mu) = mc(u^\mu) = \gamma mc\Big(1, \frac{\vec{v}}{c}\Big) = \big(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\big) = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\Big)$$

- Relação de dispersão: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2c^4$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2u^\mu u_\mu = m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2$$

- Potência=taxa de variação temporal da energia:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}} \cdot \dot{\vec{p}} + \frac{mc^2}{\mathcal{E}}\dot{m}c^2 = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} + \gamma\dot{m}c^2$$

4-força:

- Definição: $F^\mu = \dfrac{dp^\mu}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

4-força:

- Definição: $F^{\mu} = \dfrac{dp^{\mu}}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

4-força:

- Definição: $F^{\mu} = \dfrac{dp^{\mu}}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_{\alpha}F^{\alpha} = p_{\alpha}\frac{dp^{\mu}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_{\alpha}p^{\alpha}) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = cd\tau$$

4-força:

- Definição: $F^{\mu} = \dfrac{dp^{\mu}}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_{\alpha}F^{\alpha} = p_{\alpha}\frac{dp^{\mu}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_{\alpha}p^{\alpha}) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = cd\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_{\alpha}F^{\alpha} = 0}$.

4-força:

- Definição: $F^\mu = \dfrac{dp^\mu}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_\alpha F^\alpha = p_\alpha \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = c d\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_\alpha F^\alpha = 0}$.
- Use: $\gamma\, ds = cdt$ e $(p^\mu) = \left(\mathcal{E}/c, \vec{p}\right)$.

4-força:

- Definição: $F^\mu = \dfrac{dp^\mu}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_\alpha F^\alpha = p_\alpha \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = c d\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_\alpha F^\alpha = 0}$.
- Use: $\gamma\, ds = cdt$ e $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.
- Em termos da energia $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ e do momentum linear $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$(F^\mu) = \frac{\gamma}{c}\Big(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\Big), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4-força:

- Definição: $F^{\mu} = \dfrac{dp^{\mu}}{ds}$, $\quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_{\alpha}F^{\alpha} = p_{\alpha}\frac{dp^{\mu}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_{\alpha}p^{\alpha}) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = cd\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_{\alpha}F^{\alpha} = 0}$.
- Use: $\gamma\, ds = cdt$ e $(p^{\mu}) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.
- Em termos da energia $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ e do momentum linear $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$(F^{\mu}) = \frac{\gamma}{c}\Big(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\Big), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Segunda lei: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

4-força:

- Definição: $F^\mu = \dfrac{dp^\mu}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_\alpha F^\alpha = p_\alpha \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = cd\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_\alpha F^\alpha = 0}$.
- Use: $\gamma\, ds = cdt$ e $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.
- Em termos da energia $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ e do momentum linear $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$(F^\mu) = \frac{\gamma}{c}\Big(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\Big), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Segunda lei: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

4-força:

- Definição: $F^\mu = \dfrac{dp^\mu}{ds}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$p_\alpha F^\alpha = p_\alpha \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(p_\alpha p^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(mc)^2 = mc\frac{dm}{d\tau}, \quad ds = cd\tau$$

- **Massa é um invariante.** Massa constante: $\boxed{u_\alpha F^\alpha = 0}$.
- Use: $\gamma\, ds = cdt$ e $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.
- Em termos da energia $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ e do momentum linear $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$:

$$(F^\mu) = \frac{\gamma}{c}\Big(\frac{\dot{\mathcal{E}}}{c}, \vec{F}\Big), \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Segunda lei: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Conteúdo I

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\,\bar{x} + c\bar{t})}, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$, $\quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$, $\quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$, $\quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Velocidade: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- $\boxed{x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(\beta\, \bar{x} + c\bar{t})}$, $\quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \beta = V/c.$
- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}), \quad cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}} \qquad \boxed{W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}}$$

- Demais componentes: $v_y = \frac{dy}{dt}$ e $v_z = \frac{dz}{dt}$

$$v_x = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}$$

- $\bar{v}_{\bar{x}} = 0 \implies v_x = V, \quad v_y = \bar{v}_{\bar{y}}/\gamma, \quad v_z = \bar{v}_{\bar{z}}/\gamma$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\; cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\,\bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \left(\mathcal{E}/c, \vec{p}\right)$.

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\,\bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\, \bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\,\bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \left(\mathcal{E}/c, \vec{p}\right)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\,d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\vec{\bar{v}}\cdot\dot{\vec{\bar{p}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

- Potência: $\dot{\mathcal{E}} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}} + \gamma(v)\dot{m}c^2$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\,\bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\,d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\vec{\bar{v}}\cdot\dot{\vec{\bar{p}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

- Potência: $\dot{\mathcal{E}} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}} + \gamma(v)\dot{m}c^2$
- Demais componentes: $\dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\,\bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \big(\mathcal{E}/c, \vec{p}\big)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\,\bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\,d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\vec{\bar{v}}\cdot\dot{\vec{\bar{p}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

- Potência: $\dot{\mathcal{E}} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}} + \gamma(v)\dot{m}c^2$
- Demais componentes: $\dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$
- $\dot{p}_x = \dfrac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{\bar{v}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{\bar{v}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{\bar{v}}}{c^2}}$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\, \bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \left(\mathcal{E}/c, \vec{p}\right)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\bar{\vec{v}} \cdot \dot{\bar{\vec{p}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

- Potência: $\dot{\mathcal{E}} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} + \gamma(v)\dot{m}c^2$
- Demais componentes: $\dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$
- $\dot{p}_x = \dfrac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}$, $\quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}$

Força: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- $\boxed{dx = \gamma(d\bar{x} + \beta\, cd\bar{t}),\ cdt = \gamma(\beta\, d\bar{x} + cd\bar{t})}$, $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\beta = V/c$.
- $\boxed{p_x = \gamma(\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c),\ \mathcal{E}/c = \gamma(\beta\, \bar{p}_x + \bar{\mathcal{E}}/c)}$, $(p^\mu) = \left(\mathcal{E}/c, \vec{p}\right)$.

$$\dot{p}_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d\bar{p}_x + \beta\, \bar{\mathcal{E}}/c}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}} = \frac{\dot{\bar{p}}_x + V\bar{\vec{v}} \cdot \dot{\bar{\vec{p}}}/c^2}{1 + \frac{V\bar{v}_x}{c^2}}$$

- Potência: $\dot{\mathcal{E}} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} + \gamma(v)\dot{m}c^2$
- Demais componentes: $\dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}, \quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}$
- $\dot{p}_x = \dfrac{\dot{\bar{p}}_x + V\dot{\bar{\mathcal{E}}}/c^2}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}, \quad \dot{p}_y = \dfrac{\dot{\bar{p}}_y/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}, \quad \dot{p}_z = \dfrac{\dot{\bar{p}}_z/\gamma}{1 + \dfrac{\vec{V} \cdot \bar{\vec{v}}}{c^2}}$

Conteúdo I

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \bar{\vec{v}}/c)$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \Longrightarrow$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \Longrightarrow \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \Longrightarrow \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \Longrightarrow$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \Longrightarrow \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \Longrightarrow \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \Longrightarrow \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \Longrightarrow \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$

- $u^2 = \bar{u}^2 \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies \gamma(v)v_z = \gamma(\bar{v})\bar{v}_z \implies$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies \gamma(v)v_z = \gamma(\bar{v})\bar{v}_z \implies v_z = \dfrac{\bar{v}_z/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \bar{\vec{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\left[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\right] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[1 + V\bar{v}_x/c^2\right]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\left[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\right] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\left[V + \bar{v}_x\right]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies \gamma(v)v_z = \gamma(\bar{v})\bar{v}_z \implies v_z = \dfrac{\bar{v}_z/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$

4-velocidade:

- Referencial (O): $(u^\mu) = \gamma(v)(1, \vec{v}/c)$
- Referencial $(\bar{O})$: $(\bar{u}^\mu) = \gamma(\bar{v})(1, \vec{\bar{v}}/c)$
- TL: $u^0 = \gamma(V)\Big[\bar{u}^0 + \beta(V)\bar{u}^1\Big] \implies \boxed{\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\Big[1 + V\bar{v}_x/c^2\Big]}$
- TL: $u^1 = \gamma(V)\Big[\beta(V)\bar{u}^0 + \bar{u}^1\Big] \implies \gamma(v)v_x = \gamma(V)\gamma(\bar{v})\Big[V + \bar{v}_x\Big]$
- Adição de velocidades: $\boxed{v_x = \dfrac{V + \bar{v}_x}{1 + V\bar{v}_x/c^2}}$
- $u^2 = \bar{u}^2 \implies \gamma(v)v_y = \gamma(\bar{v})\bar{v}_y \implies v_y = \dfrac{\bar{v}_y/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$
- $u^3 = \bar{u}^3 \implies \gamma(v)v_z = \gamma(\bar{v})\bar{v}_z \implies v_z = \dfrac{\bar{v}_z/\gamma(V)}{1 + V\bar{v}_x/c^2}$

H. Stephani
Relativity
Cambridge, 2004.

W. Rindler
Relativity
Oxford, 2006.

G. L. Naber
The Geometry of Minkowski Spacetime
Springer, 2012.