



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Materiais
Magnéticos
Histerese
Perda Foucault
(Correntes Parasitas)**



Materiais Magnéticos

- **Diamagnéticos:**

Sob campo externo \mathbf{B} , induz no material momento médio \mathbf{m} , em oposição a $\mathbf{B} \rightarrow \mu_r < 1$

- **Paramagnéticos:**

Sob \mathbf{B} externo $\rightarrow \mu_r > 1$

- **Ferromagnéticos:**

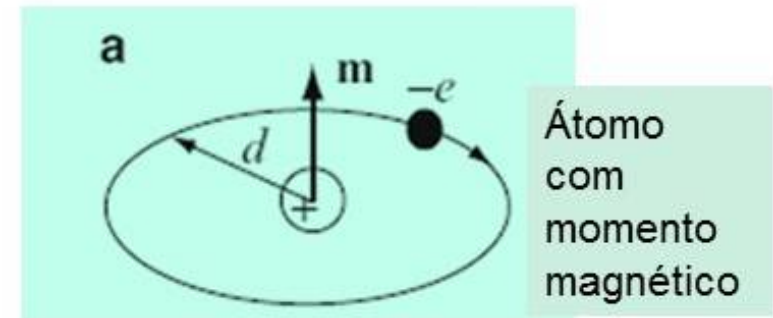
Possui magnetização espontânea, mesmo se $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$, $\mu_r \gg 1$,

- **Antiferromagnéticos:**

Moléculas com momentos em alinhamento antiparalelo

- **Ferrimagnéticos** (ferritas):

Alinhamento antiparalelo, baixa densidade, σ pequeno

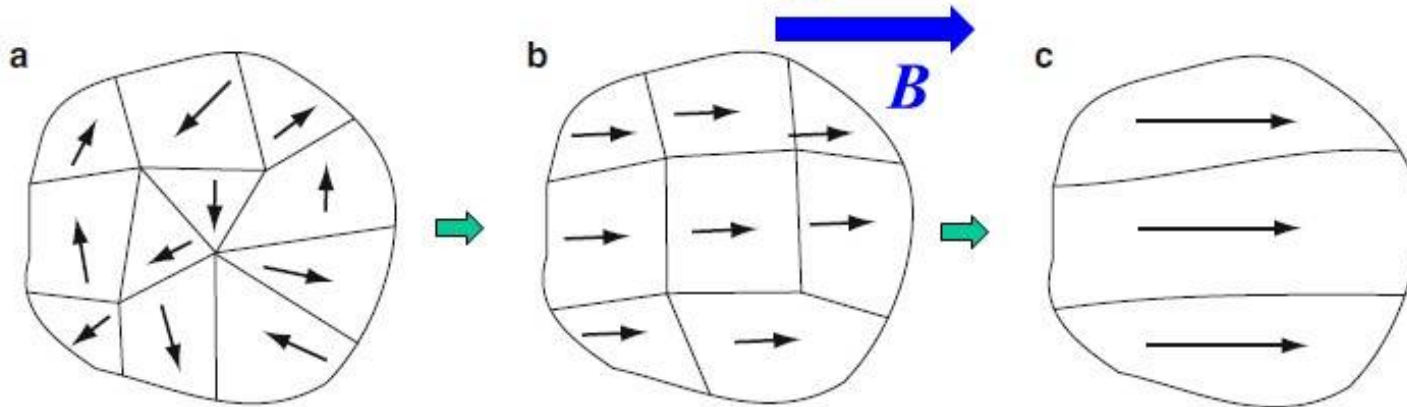


Átomo com momento magnético



Materiais Magnéticos

Alinhamento de domínios sob B externo crescente



$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

Magnetização

$$\vec{M} = \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m \mu_0} \vec{B}$$

Susceptibilidade Magnética



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Materiais Magnéticos - Permeabilidade

Material	μ_r	Material	μ_r
Bismuto	0,9998333	Titânio	1,00018
Ouro	0,99996	Platina	1,0003
Mercúrio	0,999968	Paládio	1,0008
Prata	0,9999736	Manganês	1,001
Chumbo	0,9999831	Ferro fundido	150
Cobre	0,9999906	Cobalto	250
Água	0,9999912	Níquel	600
Parafina	0,99999942	Ferrita de níquel zinco (Ni-Zn-Fe ₂ O ₃)	650
Madeira	0,9999995	Ferrita de manganês zinco (Mn-Zn-Fe ₂ O ₃)	1200
Vácuo	1	Aço	2000
Ar	1,00000037	Ferro (0,4% impureza)	5000
Berílio	1,0000007	Ferro silício (4% Si)	7000
Oxigênio	1,000002	Permaloi (78,5% Ni, 21,5% Fe)	7×10^4
Magnésio	1,000012	Mu-metal(75% Ni, 14%Fe, 5% Cu, 4% Mo, 2% Cr)	10^5
Alumínio	1,00002	Ferro (purificado – 0,04% impureza)	2×10^5
Tungstênio	1,00008	Supermaloi (79,5% Ni, 15%Fe, 5% Mo, 0,5%Mn)	10^6

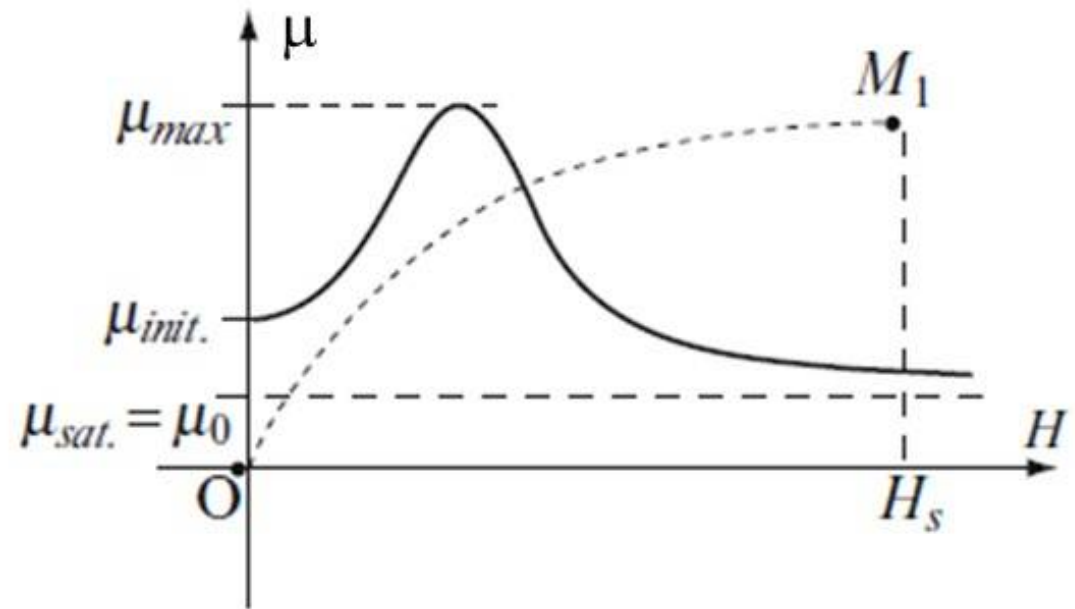
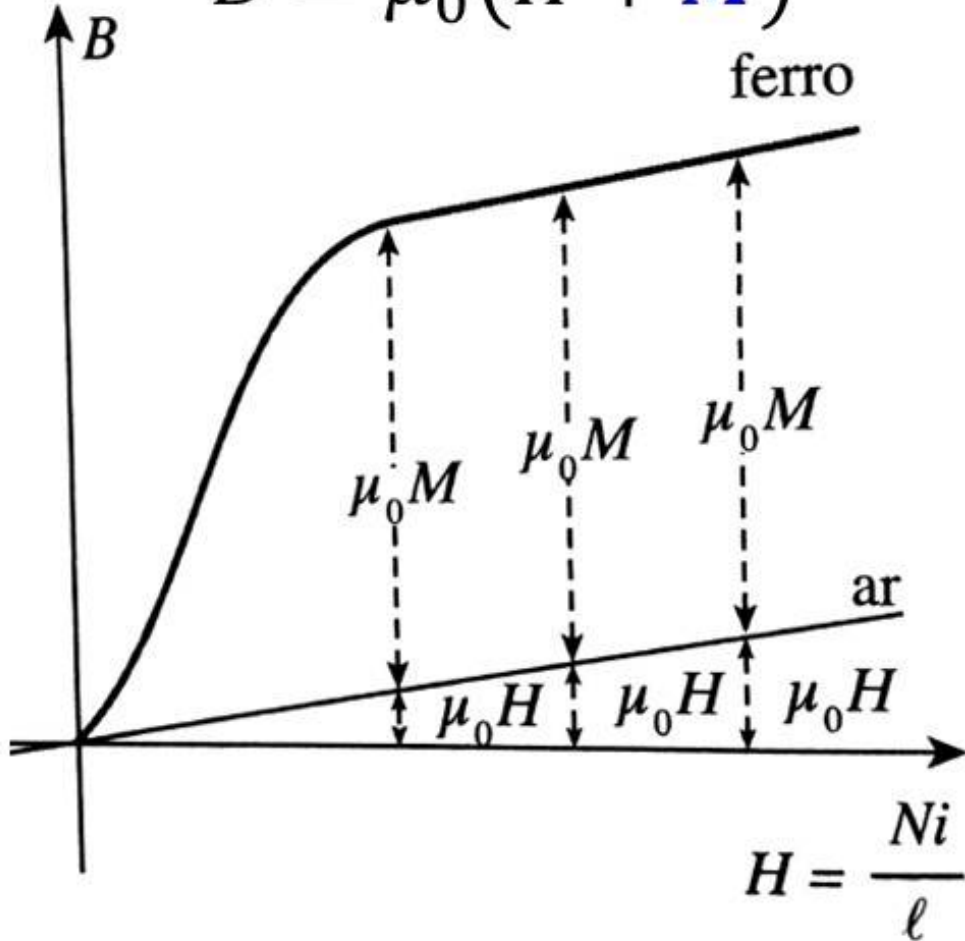


Materiais Ferromagnéticos – Curva de Magnetização

Primeira Magnetização

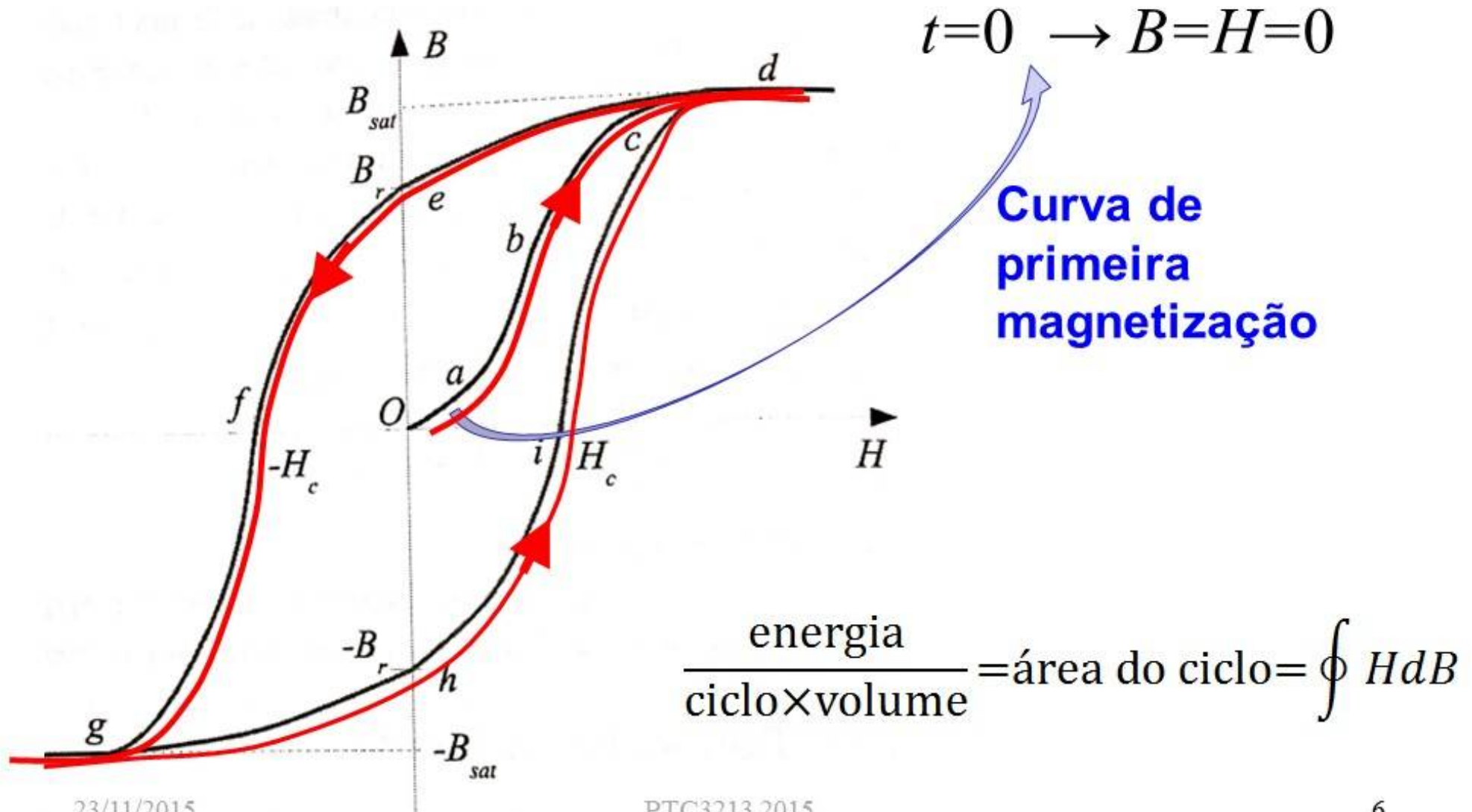
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$





Histerese



Energia Em Regiões com Materiais Magnéticos

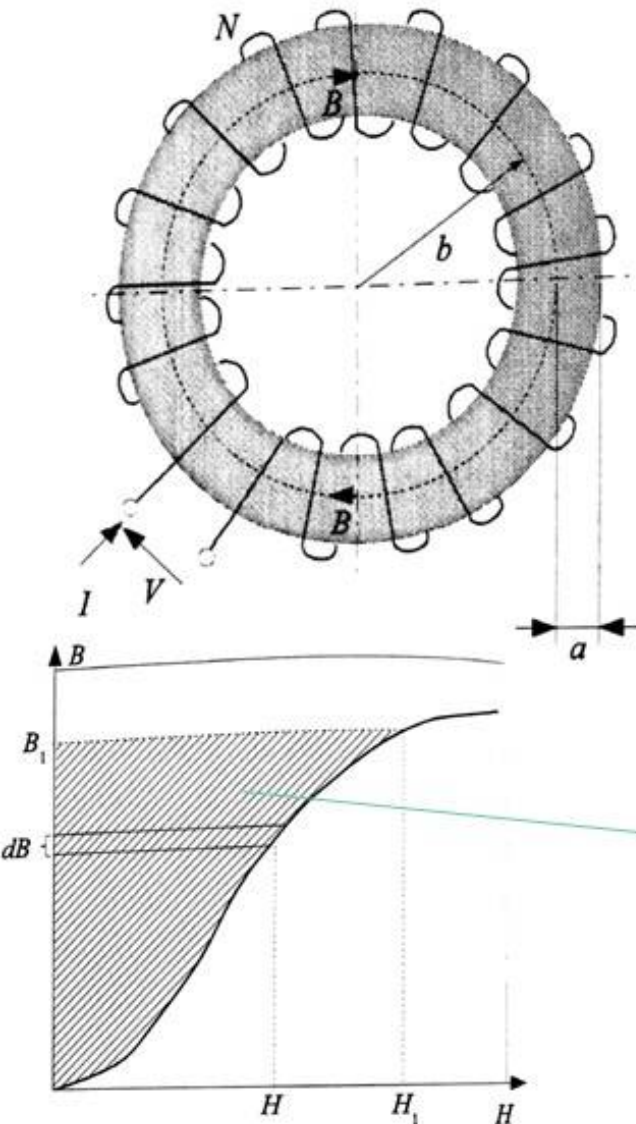
$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \bar{\Psi}_k$$

$$H = \frac{NI}{2\pi b}$$

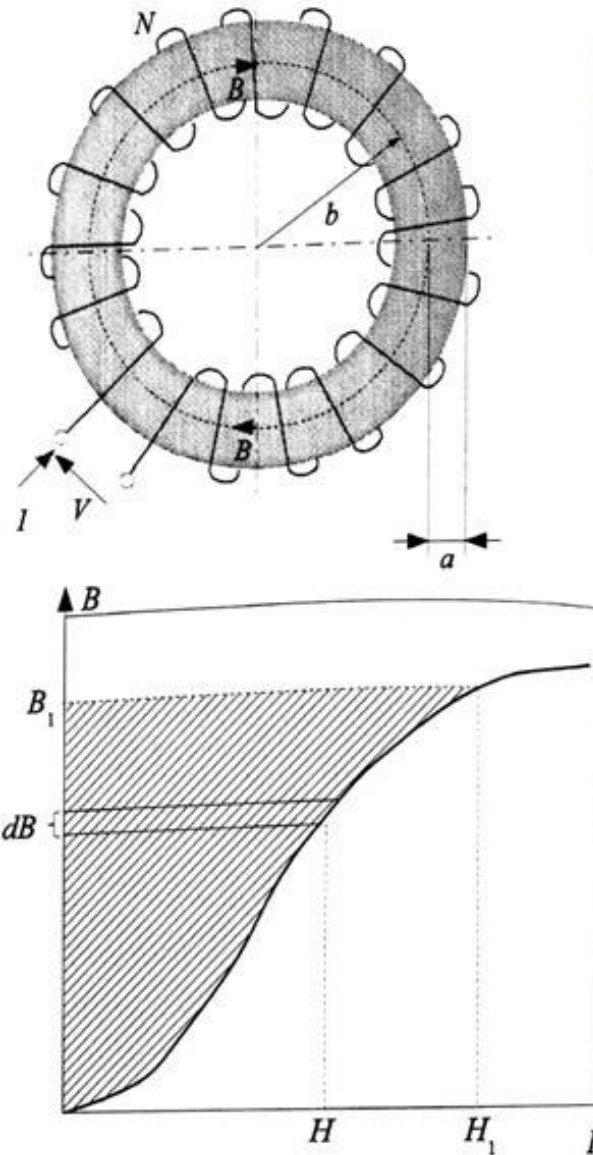
Campo no interior do toroide delgado

$$W_m = (\text{volume toroide}) \times \int_0^B H dB$$

$$w_m = \int_0^{B_1} H dB$$



Energia Em Regiões com Materiais Magnéticos



$$H = \frac{NI}{2\pi b}$$

$$V = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

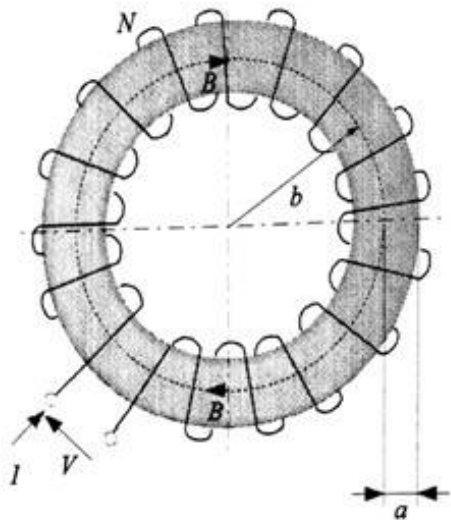
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx -\frac{d}{dt} NBS$$

$$V = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -N\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$B(t) = -\frac{1}{N\pi a^2} \int_0^t V(t') dt'$$

$$H = \frac{N}{2\pi b} I(t)$$

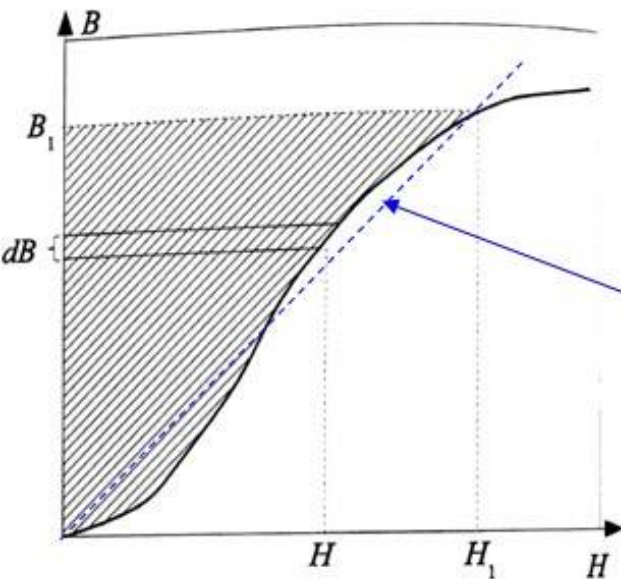
Energia Em Regiões com Materiais Magnéticos



$$H = \frac{NI}{2\pi b}$$

$$B(t) = -\frac{1}{N\pi a^2} \int_0^t V(t') dt'$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



$$W_m = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

$$= \frac{1}{2} BH$$

Material Linear!



Histerese

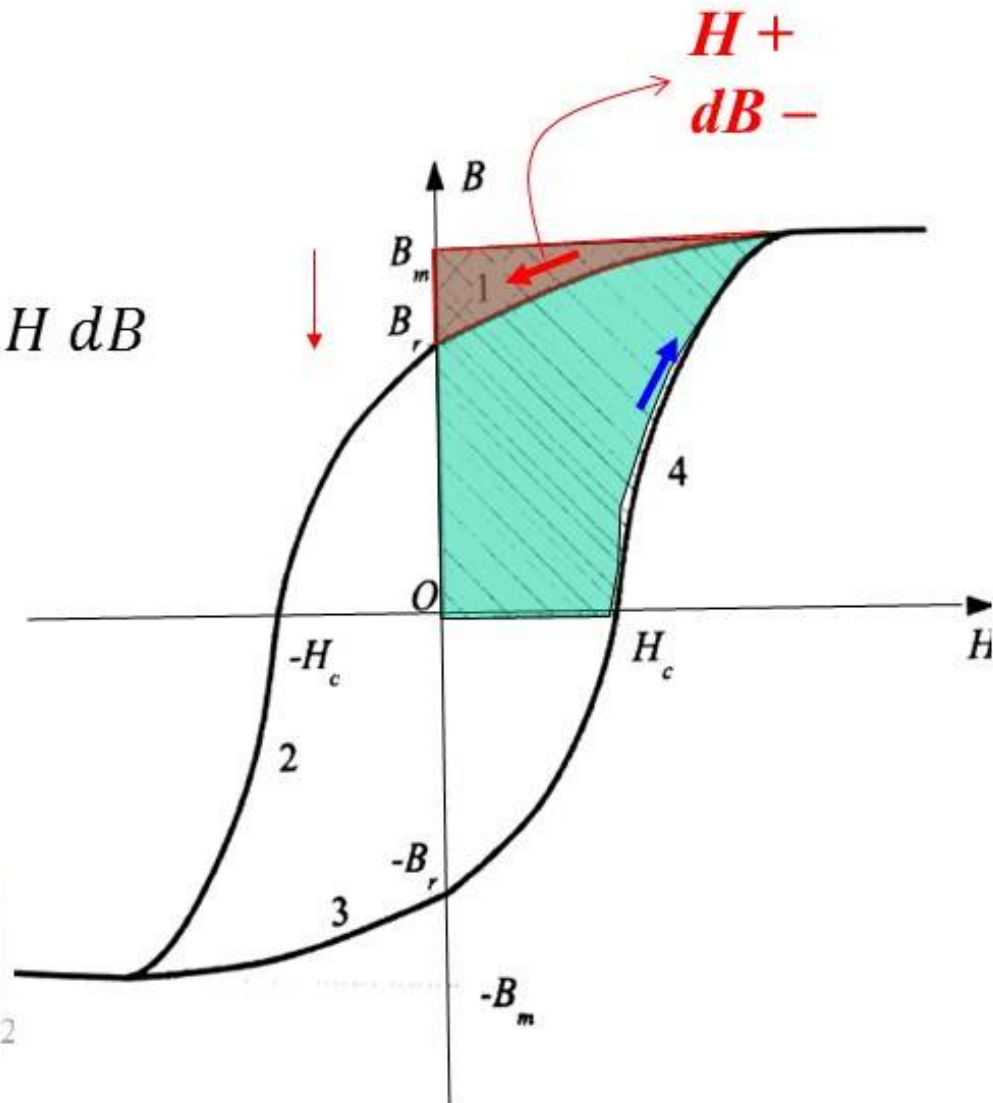
$$W_m = \oint H dB$$

$$= \int_{B_m}^{B_r} H dB + \int_{B_r}^{-B_m} H dB + \int_{-B_m}^{-B_r} H dB$$

$$+ \int_{-B_r}^{B_m} H dB =$$

$$W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4}$$

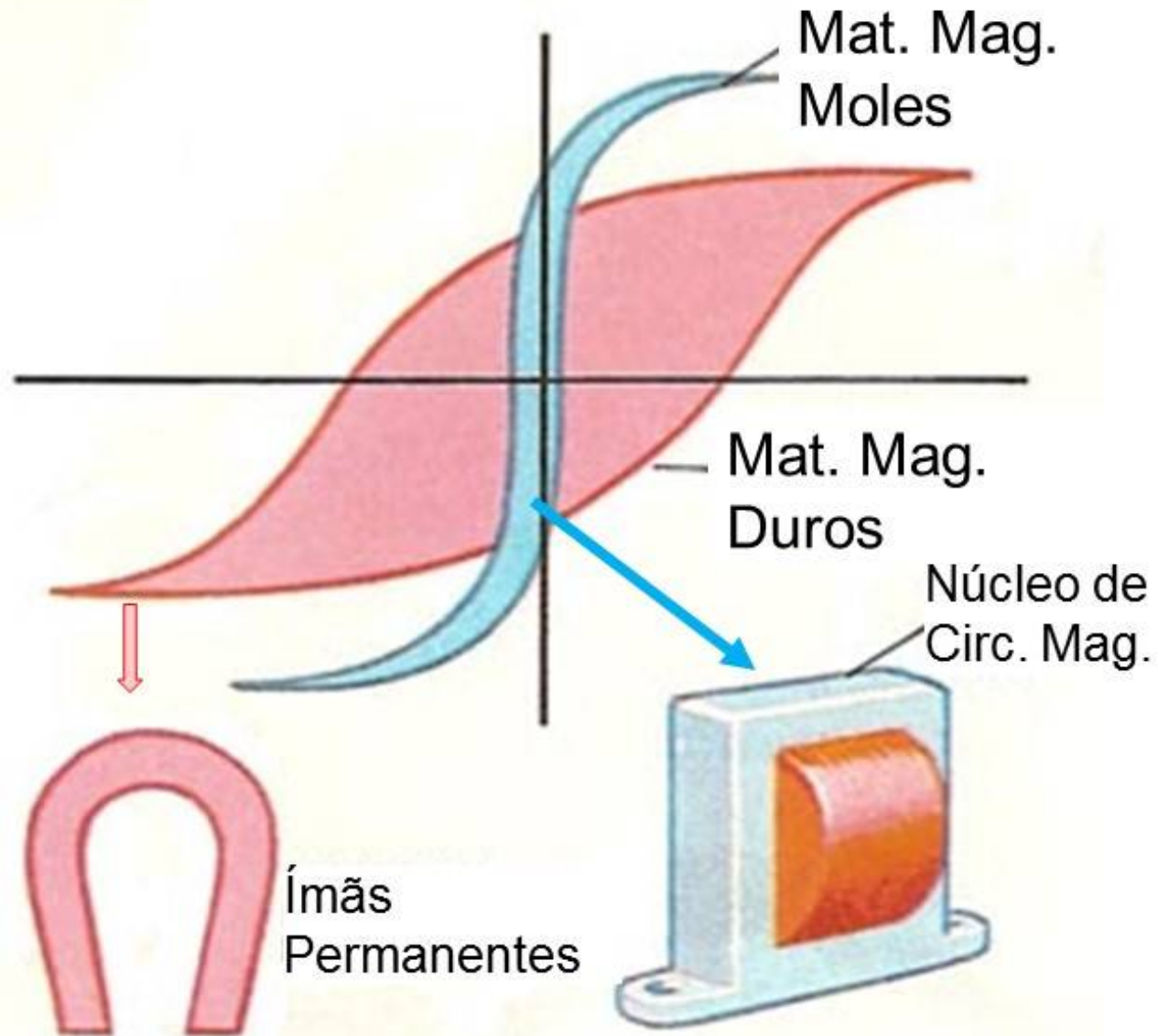
$\frac{\text{energia}}{\text{ciclo} \times \text{volume}} = \text{área do ciclo} = \oint H dB$





Histerese

Materiais magnéticos :





Polarização Magnética - Ímãs Permanentes

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} \text{ (A/m)}$$

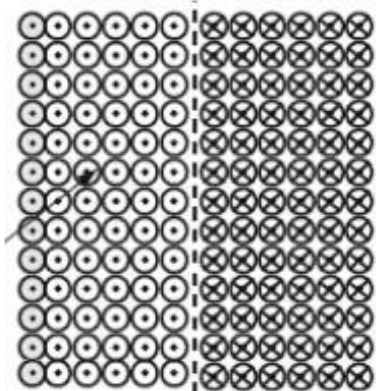
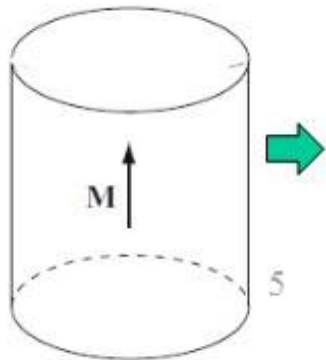


$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

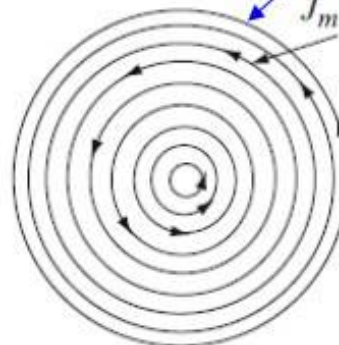
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M})$$

$$\vec{J}' = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$$



b



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \\ \mu_0 (\nabla \cdot \vec{H} + \nabla \cdot \vec{M}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}$$

Densidade de polo magnético



Polarização Magnética – Condições de Fronteira

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_1) \quad \vec{B}_2 = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2)$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 + \vec{M}_1 - \vec{M}_2) \cdot \hat{n} = 0$$

$$H_{n1} - H_{n2} = M_{n2} - \cancel{M_{n1}} \quad 0$$

$$H_{n1} - H_{n2} = M_{n2} = \mathbf{M}_n$$

$$\mathbf{M}_n = \rho_{ms}$$

Densidade superficial de polo magnético

Meio 1
(ar)

μ_1

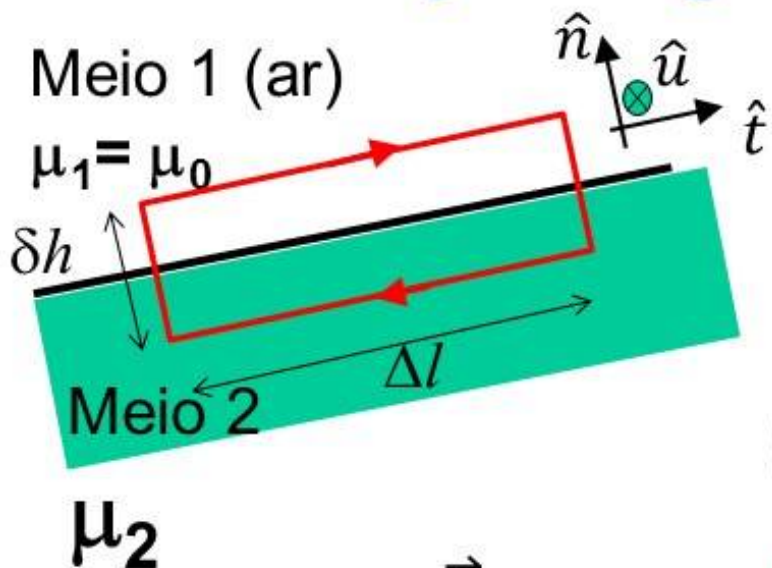
\hat{n}

Meio 2

μ_2



Polarização Magnética – Condições de Fronteira



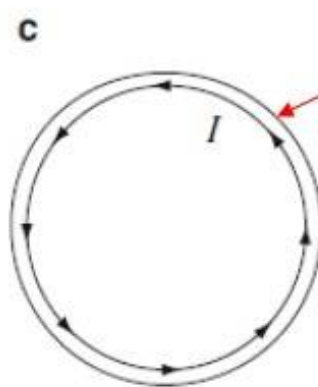
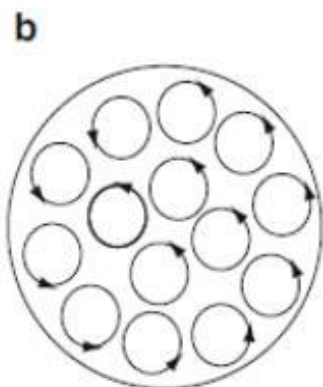
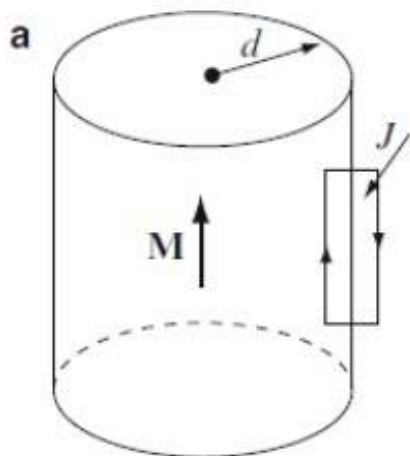
$$\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \hat{n} = \mu_0 (\vec{J}_s + \vec{M} \times \hat{n})$$

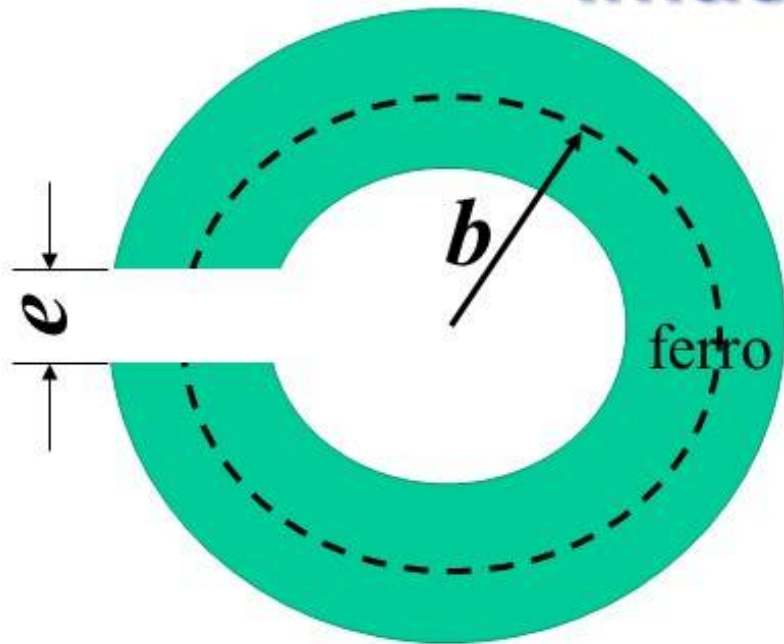
$$\vec{J}_s = 0 \Rightarrow (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \hat{n} = \mu_0 \vec{M} \times \hat{n}$$



Equivalente a uma densidade superficial de corrente J_s



Ímãs Permanentes



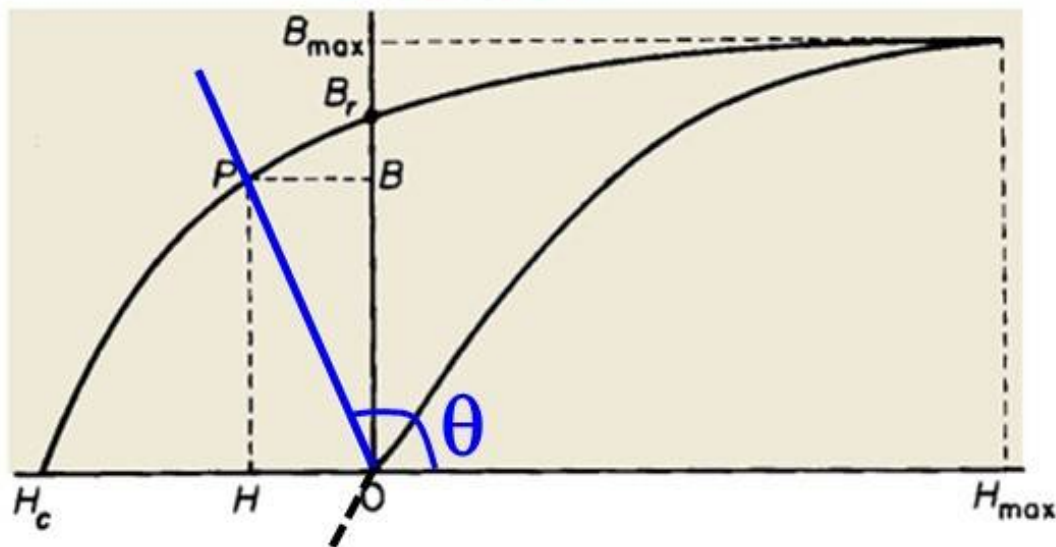
Desprezando dispersão: $H_e = \frac{B}{\mu_0}$

$$H_f(2\pi b - e) + H_e e = 0$$

$$H_f = -H_e \frac{e}{(2\pi b - e)}$$

$$\frac{B}{H_f} = -\mu_0 \frac{(2\pi b - e)}{e}$$

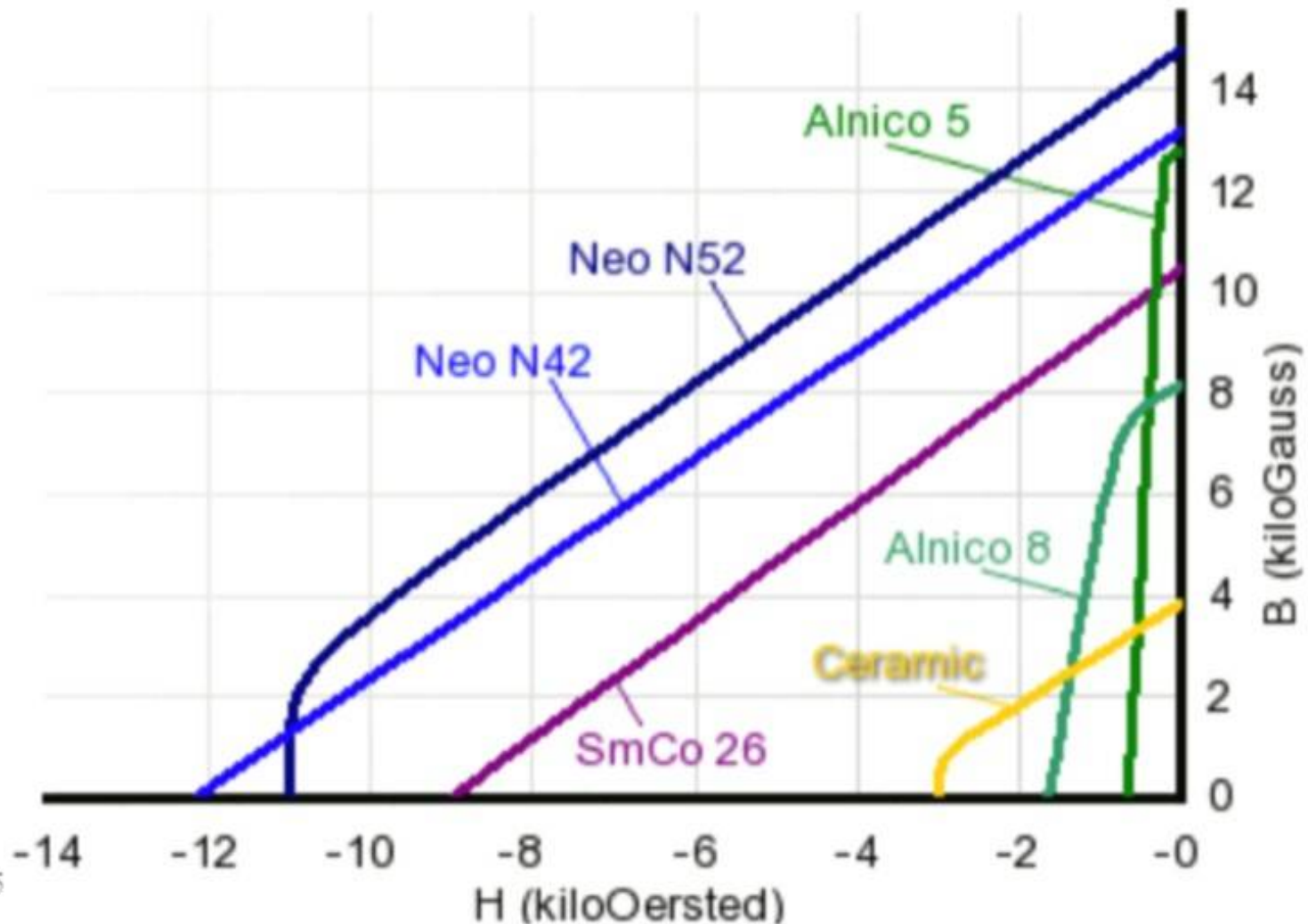
$$\tan \theta = -\mu_0 \frac{(2\pi b - e)}{e}$$





Ímãs Permanentes

Curvas de desmagnetização de ímãs permanentes

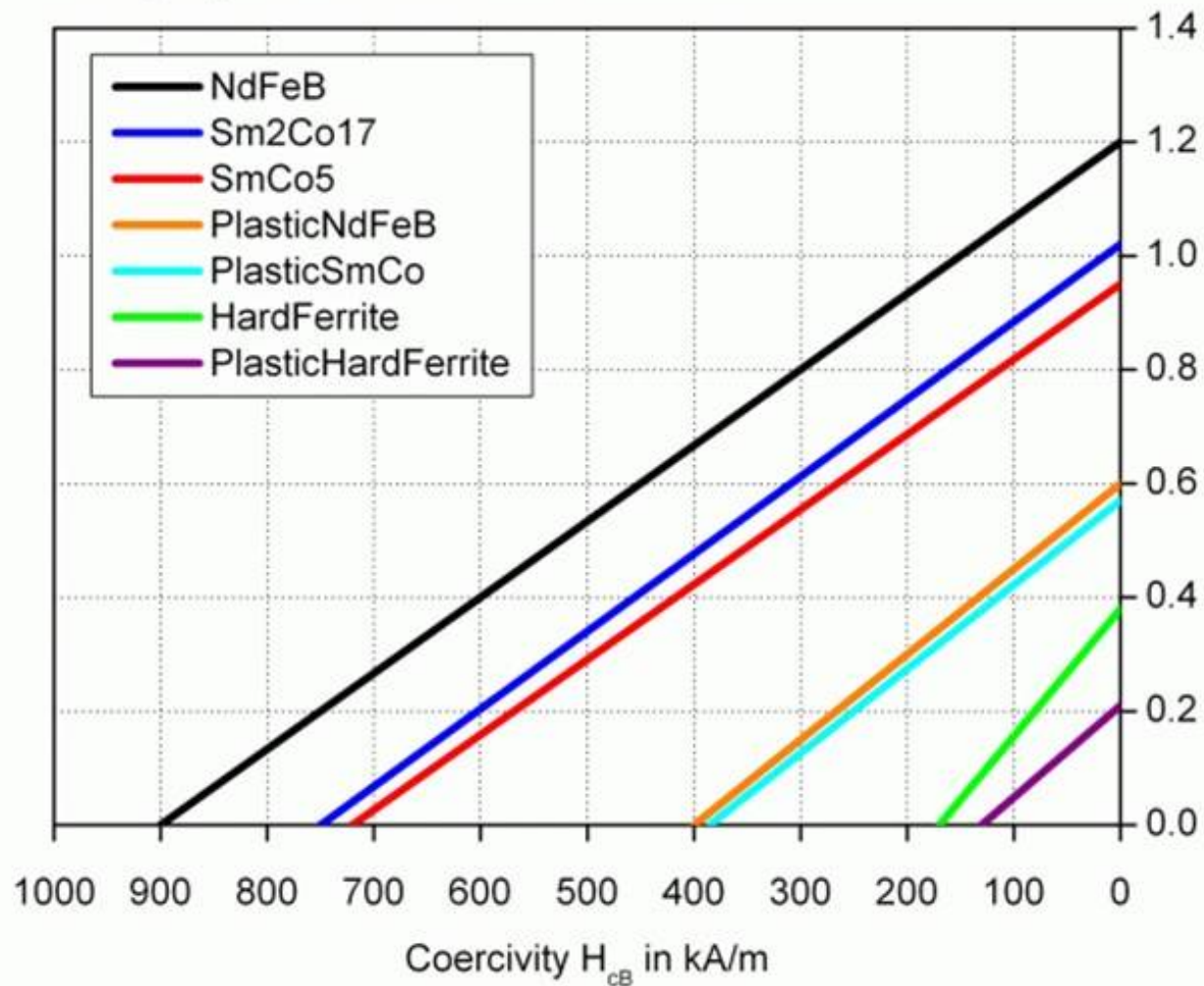




Ímãs Permanentes

Exemplary characteristics for 20°C

Remanence B_r in T





ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Materiais Ferromagnéticos “Moles”

Material	Composição %	Máximo μ_r	B_{sat} (T)	H_c (A/m)
Ferro	99,91 Fe	5.000	2,15	80
Ferro purificado	99,95 Fe	180.000	2,15	4
Aço laminado a frio	98,5 Fe	2.000	2,10	145
Permalloy 78	21,2 Fe; 78,5 Ni; 0,3 Mn	100.000	1,07	4
Mu metal	18 Fe; 75 Ni; 2 Cr; 5 Cu	100.000	0,65	4
Supermalloy	15,7 Fe; 79 Ni; 5 Mo; 0,3 Mn	800.000	0,80	0,16



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Materiais Ferromagnéticos “Duros”

Material	Composição %	B_r (T)	H_c (A/m)
Aço-carbono	98,1 Fe; 1 Mn; 0,9 C	1,0	4.000
Aço-tungstênio	94 Fe; 5 W; 0,3 Mn; 0,7 C	1,03	5.600
Remalloy	71 Fe; 17 Mo; 12 Co	1,05	20.000
Alnico II (sinterizado)	64,5 Fe; 10 Al; 17 Ni; 2,5 Co; 6 Cu	0,69	41.600
Alnico V	53 Fe; 8 Al; 14 Ni; 24 Co; 3 Cu	1,25	44.000
Platina-Cobalto	77 Pt; 23 Co	0,45	208.000



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Materiais Ferromagnéticos “Duros”

Material	μ_r	H_c [kA/m]	B_r [T]
Alnico (Aluminum–Nickel–Cobalt)	3–5	60	1.25
Ferrite (Barium–Iron)	1.1	240	0.38
Sm–Co (Samarium–Cobalt)	1.05	700	0.9
Ne–Fe–B (Neodymium–Iron–Boron)	1.05	800	1.15



Campos Lentamente Variáveis (Quase-estáticos)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\zeta} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho_v d\tau$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^i)$$



Indução de Correntes em Meios Condutores Contínuos

Efeito Pelicular

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E} \quad \nabla^2 \vec{H} = \gamma^2 \vec{H}$$

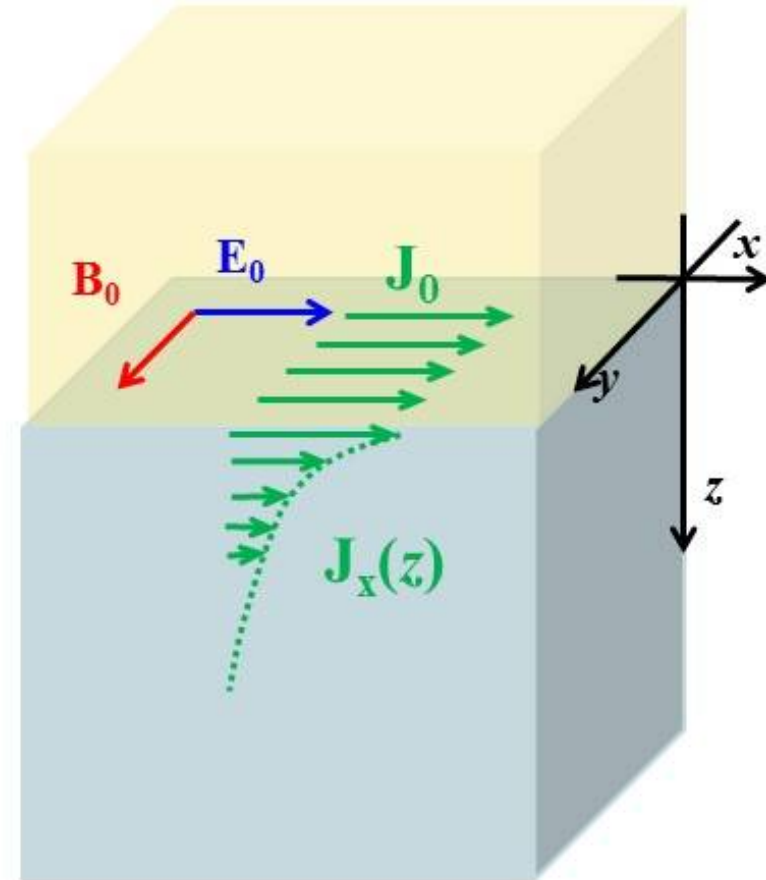
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma (1 + j)}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Profundidade pelicular

$$J_x(z, t) = J_0 e^{-z/\delta} \cos(2\pi f t - z/\delta)$$

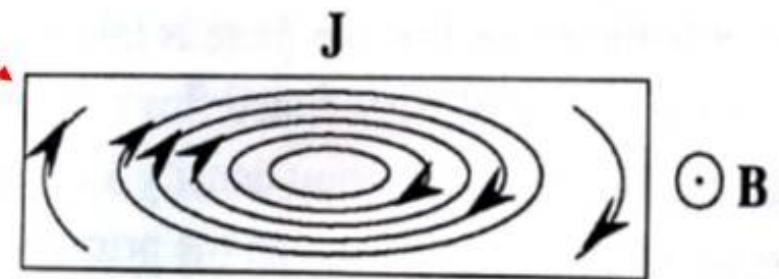
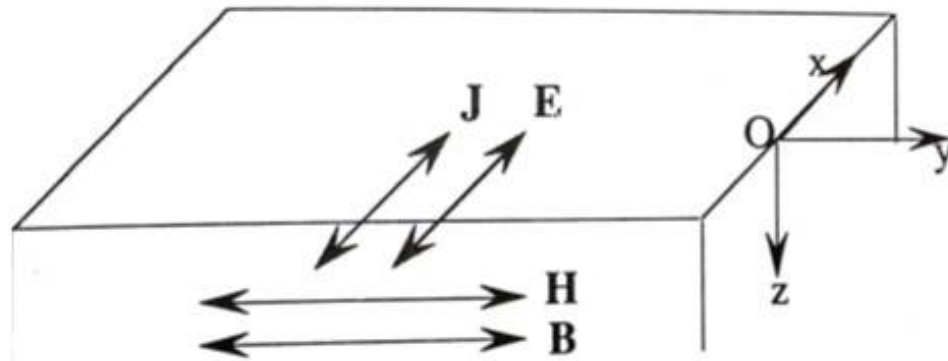
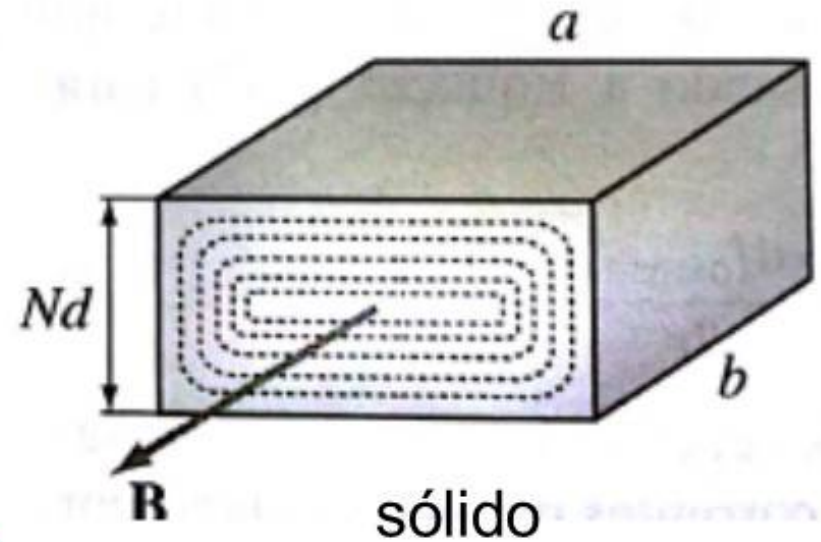
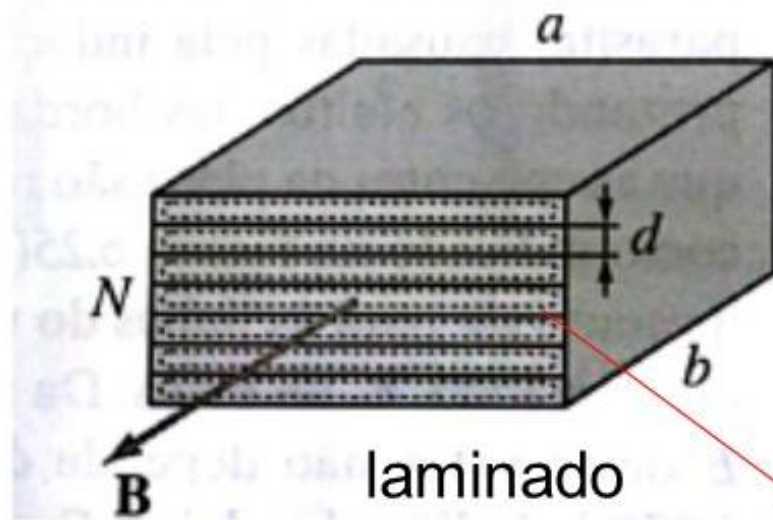
$$\delta = \frac{6,61}{\sqrt{f}} \xrightarrow{\text{cobre}} \begin{matrix} f=60 \text{ Hz:} \\ \delta=8,5 \text{ mm} \end{matrix}$$





Correntes Parasitas em Lâmina de Ferro

$$\vec{B}(t) = B(t)\hat{u}_y$$





Correntes Parasitas em Lâmina de Ferro

$$\vec{B}(t) = B(t)\hat{u}_y$$

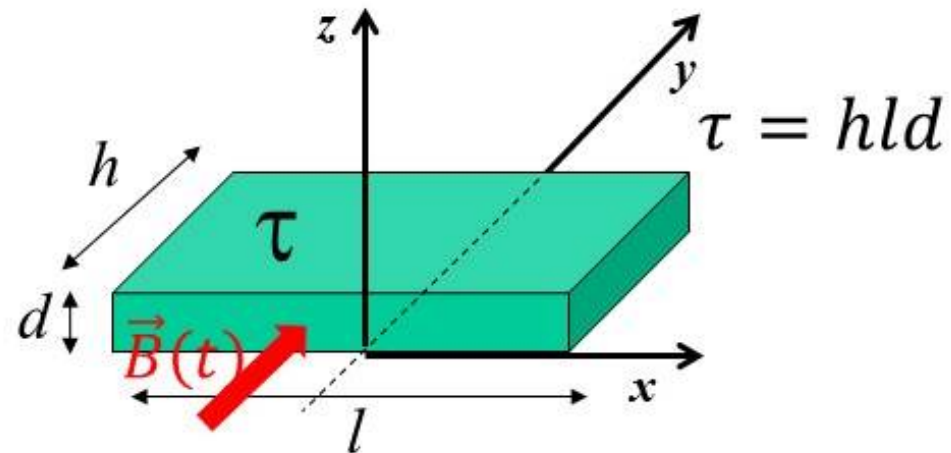
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{dB}{dt}\hat{u}_y \rightarrow \nabla \times \vec{J} = -\sigma \frac{dB}{dt}\hat{u}_y$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial z} = -\sigma \frac{dB}{dt}\hat{u}_y$$

$$J_x = \sigma \frac{dB_y}{dt} z + \text{cte.}$$

Potência dissipada:

$$P = v(t) \cdot i(t) = \iiint_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau = \frac{\sigma\tau}{12} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 d^2 \quad (\text{W})$$





Correntes Parasitas – Perda Foucault

$$P = \frac{\sigma \tau}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 d^2 \quad (\text{W})$$

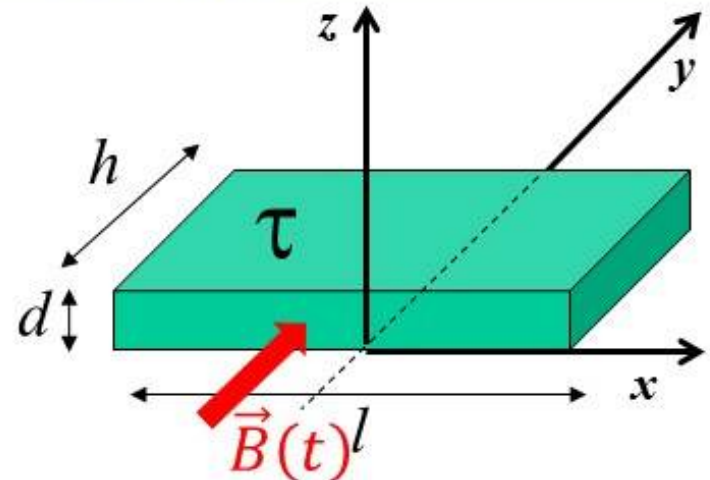
$$p = \frac{P}{\tau} = \frac{\sigma}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 d^2 \quad (\text{W/m}^3)$$

$$B(t) = B_m \sin \omega t$$

$$p = \frac{d^2 \sigma}{12} \omega^2 B_m^2 \cos^2 \omega t \quad (\text{W/m}^3)$$

$$p_F = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^2 \sigma}{12} \omega^2 B_m^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

$$p_F = \frac{d^2 \sigma}{24} \omega^2 B_m^2 \Rightarrow p_F = \frac{\pi^2 \sigma d^2 B_m^2 f^2}{6}$$



Por unidade de volume:

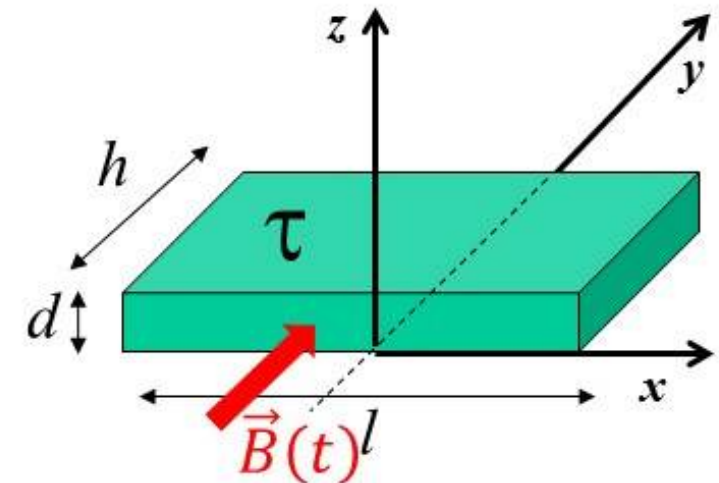
$$p_F = K \sigma d^2 B_m^2 f^2$$



Correntes Parasitas – Perda Foucault

$$p_F = K \sigma d^2 B_m^2 f^2 \quad (\text{W/m}^3)$$

Diminuindo-se a condutividade e a espessura das lâminas de aço, reduz-se as perdas Foucault no núcleo



Densidade de fluxo e frequência: impostos pelas condições de operação



Perdas Histeréticas

$$\frac{\text{energia}}{\text{ciclo} \times \text{volume}} = \text{área do ciclo} = \oint H dB$$

$$P_h = A_h f \tau \quad (\text{W})$$

$$A_h = \eta B_m^n$$

$$B \text{ elevado} \\ 1,5 \leq n \leq 2$$

$$A_h = \nu H_m^3$$

$$B \text{ baixo}$$

