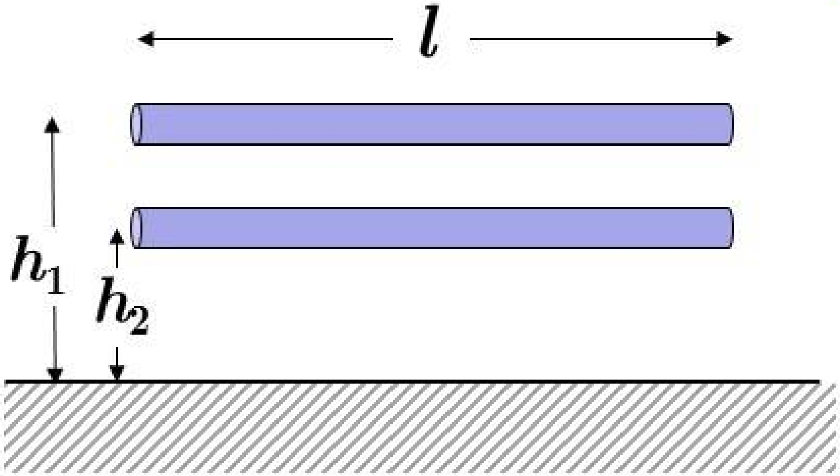
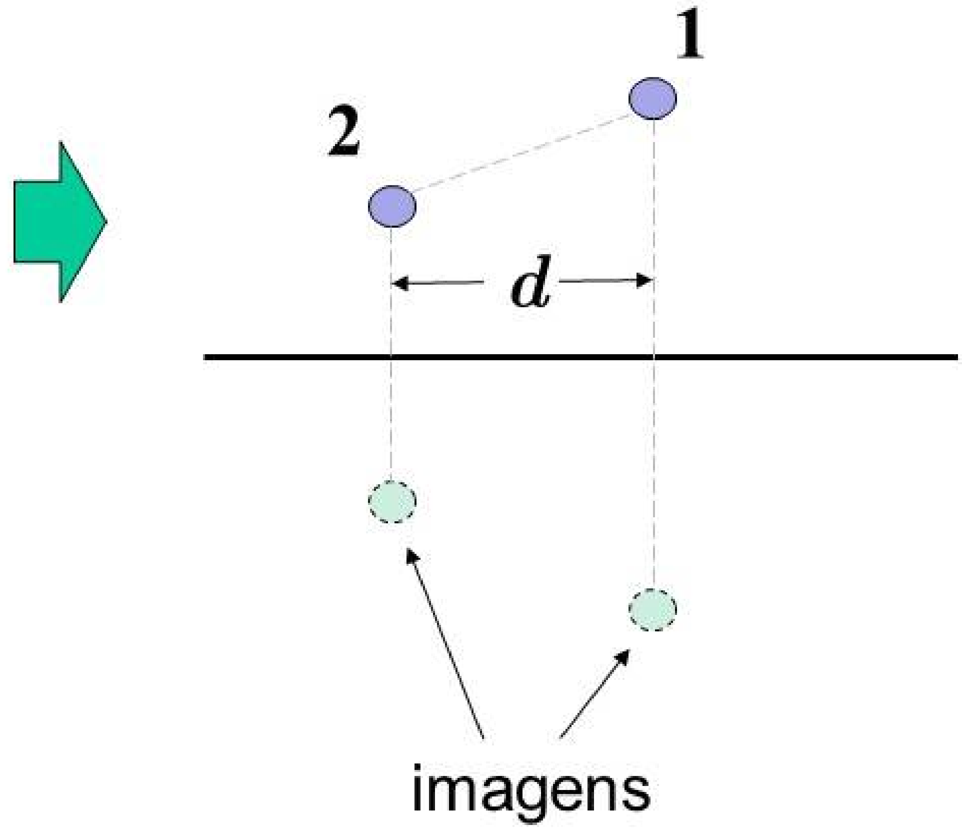
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

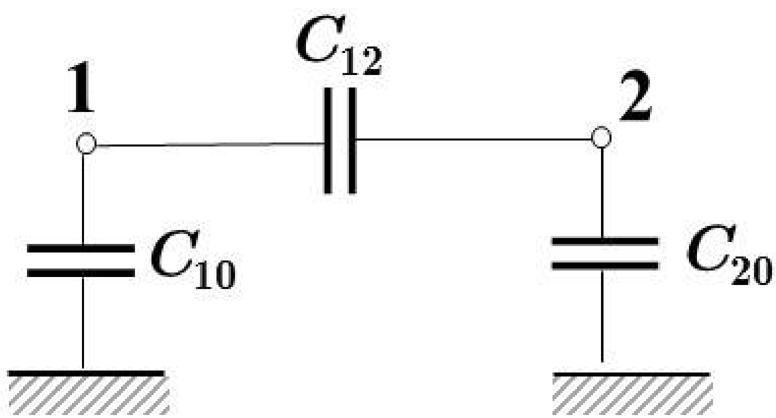
Energia e Força no Campo Eletrostático Trabalho Virtual

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Matriz de Capacitâncias - Exemplo







ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Capacitâncias Parciais de Fios Paralelos

Hipótese:
Um fio descarregado não perturba o potencial produzido pelo outro

Potencial produzido por **um fio** e sua imagem $(a << h_1)$:

$$a^2 = P_1 P_2$$

$$\varphi_1 = \frac{Q_1/l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right)$$

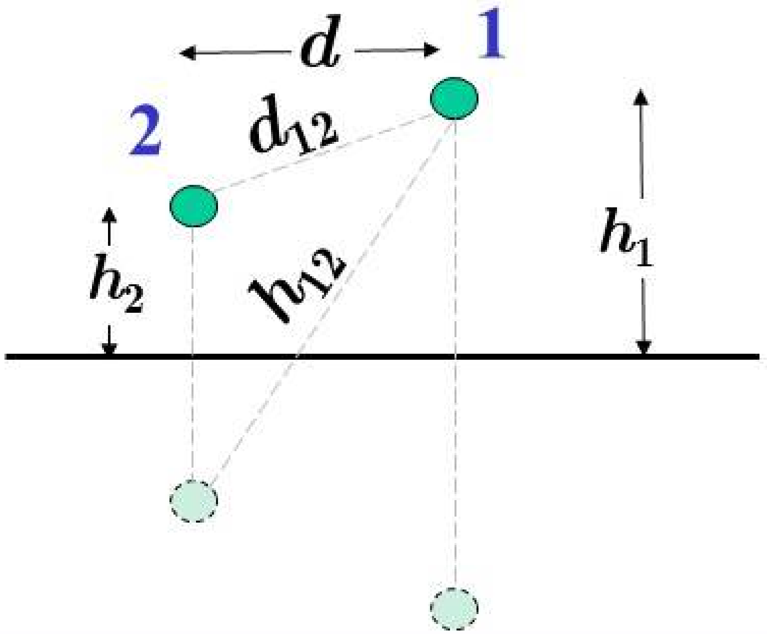
Capacitâncias Parciais de Fios Paralelos

$$\varphi_1 = \frac{Q_1/l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right)$$

$$V_{11} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right)$$

$$V_{22} = \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right)$$

$$V_{21} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{h_{21}}{d_{12}}\right)$$



$$d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2}$$

$$h_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}$$

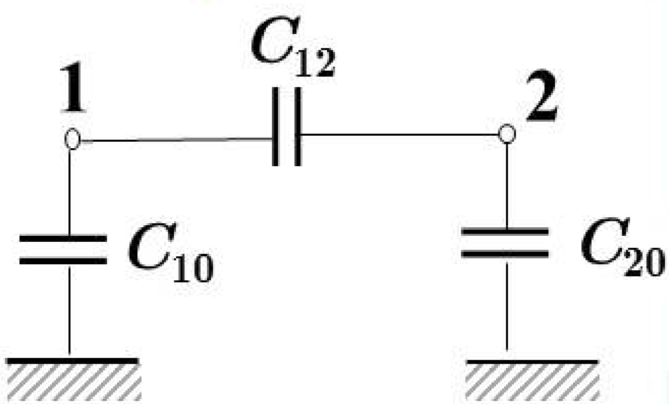
Capacitâncias Parciais de Fios Paralelos

$$S = C^{-1} = V/Q$$

$$S = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) & \ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right) \\ \ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right) & \ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right)\ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) - \left[\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right)\right]^2}\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right) & -\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right) \\ -\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right) & \ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) \end{bmatrix}$$

Capacitâncias Parciais de Fios Paralelos



$$C_{10} = \frac{2\pi\varepsilon l \; \ln\left(\frac{2h_2 d_{12}}{a_2 h_{12}}\right)}{\ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right)\ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) - \left[\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right)\right]^2}$$

$$C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon l \; \ln\left(\frac{2h_1 d_{12}}{a_1 h_{12}}\right)}{\ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right)\ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) - \left[\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right)\right]^2}$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{2\pi\varepsilon l \; \ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right)}{\ln\left(\frac{2h_2}{a_2}\right)\ln\left(\frac{2h_1}{a_1}\right) - \left[\ln\left(\frac{h_{12}}{d_{12}}\right)\right]^2}$$

Energia Eletrostática

Densidade de Energia Elétrica Armazenada num Campo Elétrico

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{D}\ (\mathrm{J/m^3})$$

Energia Elétrica armazenada num volume de um campo eletrostático

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_\tau \vec{E}\cdot\overrightarrow{D}\,d\tau = \frac{1}{2}\iiint_\tau \varepsilon E^2\,d\tau \qquad \text{(J)}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_\tau \vec{E}\cdot\overrightarrow{D}\,d\tau = -\frac{1}{2}\iiint_\tau \overrightarrow{D}\cdot\nabla\varphi\,d\tau$$

Energia Eletrostática

Energia Elétrica armazenada num volume de um campo eletrostático (cont.)

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_\tau \vec{E}\cdot\overrightarrow{D}\,d\tau = -\frac{1}{2}\iiint_\tau \overrightarrow{D}\cdot\nabla\varphi\,d\tau$$

$$\nabla\cdot(\varphi\overrightarrow{D}) = \varphi\nabla\cdot\overrightarrow{D} + \overrightarrow{D}\cdot\nabla\varphi$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_\tau \varphi\nabla\cdot\overrightarrow{D}\,d\tau - \frac{1}{2}\iiint_\tau \nabla\cdot(\varphi\overrightarrow{D})\,d\tau$$

$\rightarrow 0$ p/ $r \rightarrow \infty$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_\tau \varphi\nabla\cdot\overrightarrow{D}\,d\tau - \frac{1}{2}\oiint_\Sigma \varphi\overrightarrow{D}\cdot d\vec{S}$$

Energia Eletrostática

Energia Elétrica armazenada num volume de um campo eletrostático (cont.)

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi \nabla \cdot \vec{D}\, d\tau = \frac{1}{2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi \rho_v \, d\tau$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi \rho_v \, d\tau + \frac{1}{2}\iint_{S} \varphi \rho_S \, dS$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Energia Eletrostática - Condutores

Superfícies carregadas condutoras → φ constante

$$\frac{1}{2}\varphi Q \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\iint_S \varphi \rho_S \, dS = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \iint_S \rho_S \, dS$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \quad \Rightarrow$$

Devido a n condutores

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Energia Eletrostática - Capacitor

$$V_0 = V_+ - V_-$$

$$W_e = \frac{1}{2}(V_+Q - V_-Q) \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}(V_+ - V_-)Q$$

$$W_e = \frac{1}{2}V_0Q \qquad W_e = \frac{1}{2}CV_0{}^2 \qquad W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C'_{ki} V_k V_i$$

$\Rightarrow$ Devido a n condutores

Ex. - Capacitor de Placas Planas //

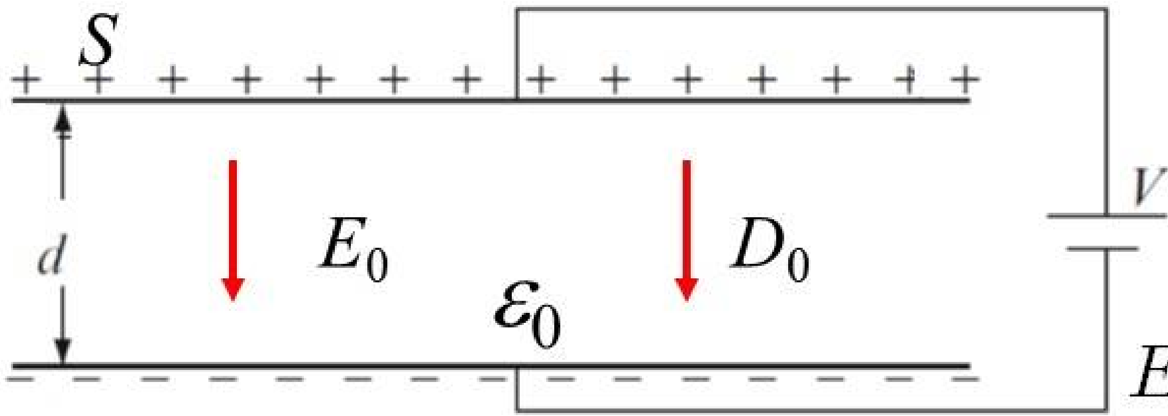
Um capacitor de **placas planas e paralelas circulares** de raio $R = 60\ \mathrm{cm}$, espaçadas de $d = 1\ \mathrm{cm}$, tem o ar como dielétrico. Uma bateria de $V_0 = 1000\ \mathrm{V}$ é ligada a seus terminais. Desprezando efeitos de borda, determinar:

(a) $\mathbf{E_0}$ e $\mathbf{D_0}$ no dielétrico; e (b) **energia armazenada**

Com a bateria ligada, o espaço entre as placas é preenchido com duas lâminas de dielétricos com $\varepsilon_{r1}=5$ e $\varepsilon_{r2}=2$. A superfície de separação dos dois é uma equipotencial e a d.d.p. do dielétrico 1, de espessura d_1, é **1/6 da tensão total**. Pede-se:

(c) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ nos dielétricos; (d) **energia armazenada**; (e) **acréscimo de energia** fornecido pela fonte.

Ex. - Capacitor de Placas Planas //



(a) E_0 e D_0

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{1000}{0{,}01} = 10^5 \quad \text{V/m}$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 = 8{,}854 \times 10^{-7} \qquad \text{C/m}^2$$

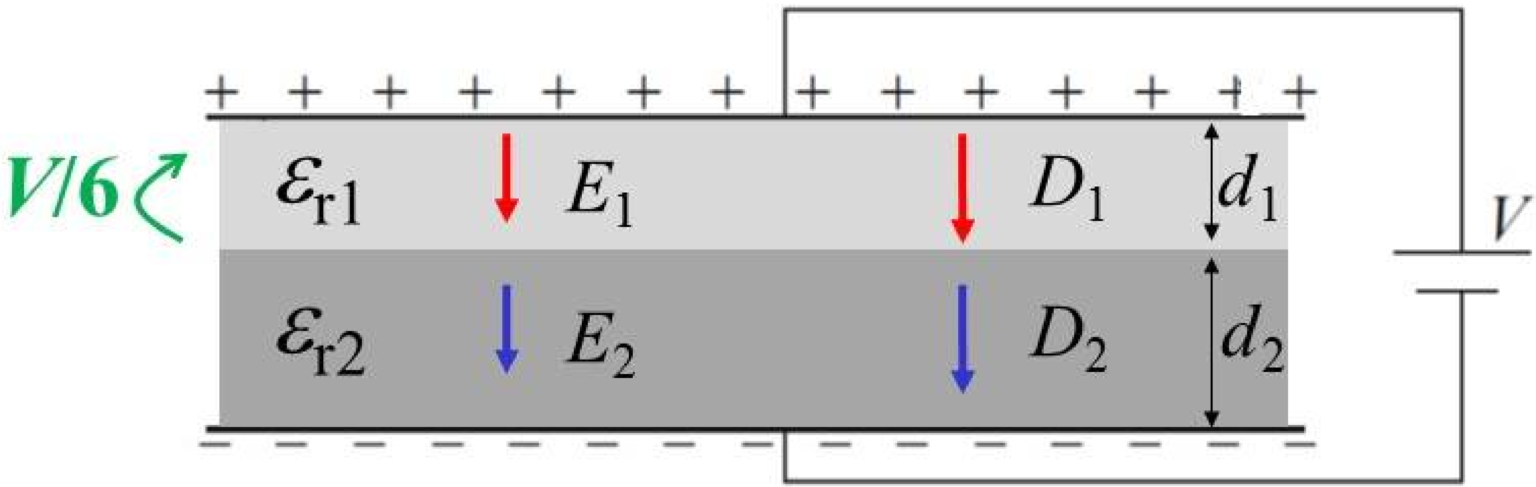
(b) $$W_0 = \frac{1}{2} D_0 E_0 \tau = \frac{1}{2} D_0 E_0 S d =$$

$$= \frac{1}{2} \times 8{,}854 \times 10^{-7} \times 10^5 \times \pi \times 0{,}6^2 \times 0{,}01$$

$$W_0 = 0{,}5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Ex. - Capacitor de Placas Planas //



(c) **E** e **D**

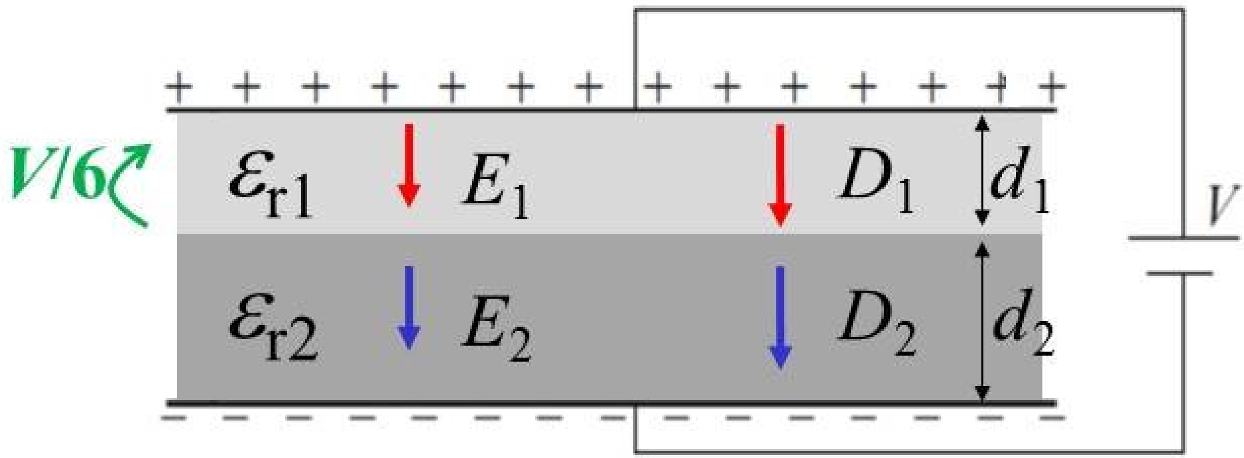
$$D_1 = D_2$$

$$\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2 \qquad E_1 d_1 + E_2 d_2 = V$$

$$E_1 = \frac{V/6}{d_1} \qquad d_1 + d_2 = d$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Ex. - Capacitor de Placas Planas //



$$E_2 = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_1 = \frac{5}{2} E_1 \Rightarrow$$

$$E_1 d_1 + 2{,}5 E_1 d_2 = V$$

$$\frac{V}{6d_1}(d_1 + 2{,}5 d_2) = V$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2{,}5}{6d_1}(d - d_1) = 1$$

$$d_1 = \frac{1}{3}\,\text{cm} \qquad d_2 = \frac{2}{3}\,\text{cm}$$

Ex. - Capacitor de Placas Planas //

$$E_1 = \frac{V/6}{d_1} = \frac{1000}{2 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^4 \ \ \mathrm{V/m}$$

$$D_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0 E_1 = 5 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^4 =$$

$$D_1 = 2{,}21 \times 10^{-6} \quad \mathrm{C/m^2}$$

$$E_2 = \frac{5V}{6d_2} = \frac{5000}{4 \times 10^{-2}} = 1{,}25 \times 10^5 \ \ \mathrm{V/m}$$

$$D_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2 = 2 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 1{,}25 \times 10^5 =$$

$$D_2 = 2{,}21 \times 10^{-6} \quad \mathrm{C/m^2} \ = D_1$$

Ex. - Capacitor de Placas Planas //

(d)

$$W_e = \frac{1}{2}(D_1 E_1 \tau_1 + D_2 E_2 \tau_2) =$$

$$= \frac{1}{2} D_1 S(E_1 d_1 + E_2 d_2) = \frac{1}{2} D_1 S(V)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2{,}21 \times 10^{-6} \times \pi \times 0{,}6^2 \times 1000 =$$

$$W_e = 1{,}25 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

(e)

$$p(t) = Vi(t) \Rightarrow W_f = \int_{t_i}^{t_f} p(t)dt = \int_{t_i}^{t_f} V\ i(t)dt = V \int_{t_i}^{t_f} i(t)dt = V\Delta Q$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Ex. - Capacitor de Placas Planas //

$$\Delta Q = S(\rho_{sf} - \rho_{si}) = S(D_1 - D_0) =$$

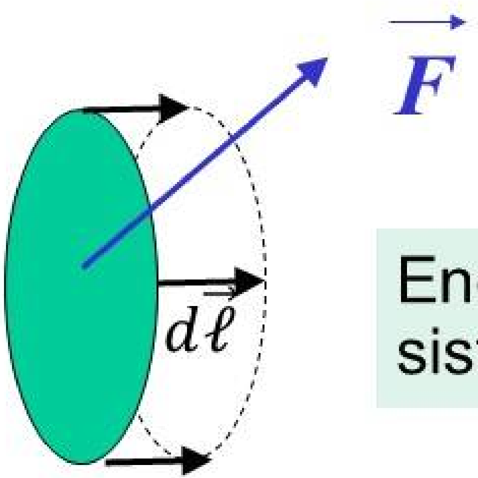
$$= \pi \times 0{,}6^2 (2{,}21 \times 10^{-6} - 8{,}854 \times 10^{-7}) =$$

$$\Delta Q = 1{,}5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$W_f = V \Delta Q = 1000 \times 1{,}5 \times 10^{-6}$$

$$W_f = 1{,}5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Forças no Campo Eletrostático
Princípio do Trabalho Virtual



Balanço da Energia durante o deslocamento virtual:

Energia fornecida pelas fontes ligadas ao sistema, dW_f

=

Trabalho Mecânico realizado pelas forças eletrostáticas, dW_{mec}

+

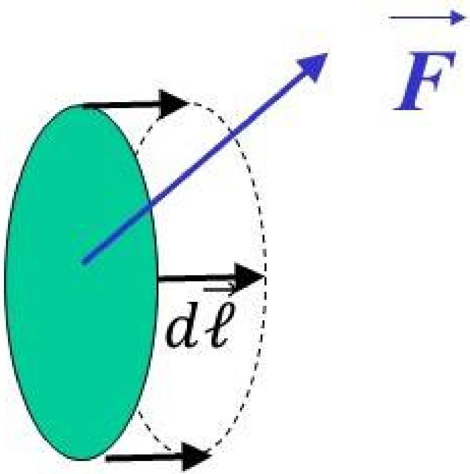
Aumento da Energia Eletrostática no sistema, dW_e

+

~~perdas~~ ~ 0

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Forças no Campo Eletrostático
Princípio do Trabalho Virtual



Balanço da Energia durante o deslocamento virtual:

$$dW_f = dW_{mec} + dW_e$$

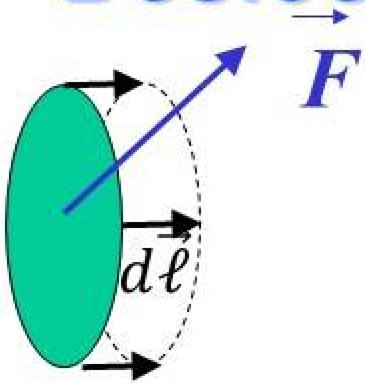
$$dW_{mec} = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_l dl$$

$$F_l dl = dW_f - dW_e$$

dl pode se dar por:

Tensão Constante ou **Carga Constante**

Deslocamento Virtual a Tensão Constante



$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i \Rightarrow dW_e\Big|_{\varphi=cte} = \frac{1}{2}\sum_i V_i\, dQ_i$$

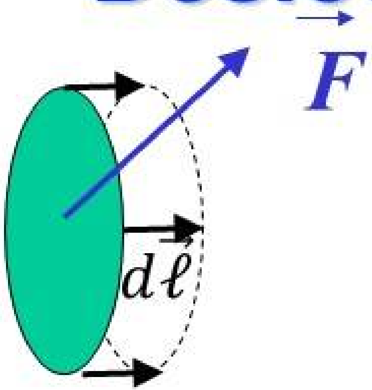
$$dW_f = \sum_i p(t)dt = \sum_i V_i\, i(t)dt = \sum_i V_i\, dQ_i$$

$$dW_f = 2\, dW_e|_{\varphi=cte} \qquad F_l dl = dW_f - dW_e$$

$$F_l dl = dW_e\Big|_{\varphi=cte} \Rightarrow \vec{F} = \nabla_k W_e\Big|_{\varphi=cte}$$

∇ em relação às coordenadas do corpo k

Deslocamento Virtual a Carga Constante



$$dW_f = 0$$

$$F_l dl = dW_f - dW_e \quad \Rightarrow \quad F_l dl = -dW_e\Big|_{Q=cte}$$

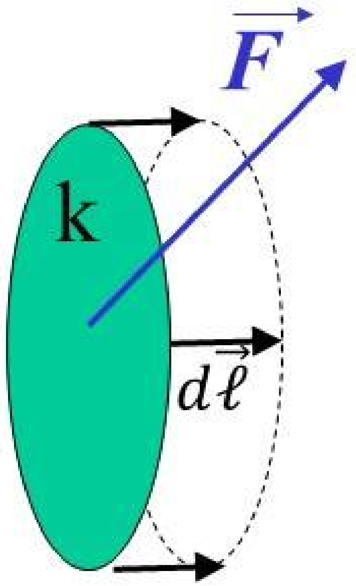
$$\vec{F} = -\nabla_k W_e\Big|_{Q=cte}$$

Trabalho realizado às custas da diminuição da W_e

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Princípio do Trabalho Virtual

Deslocamento Virtual dl a:



V constante

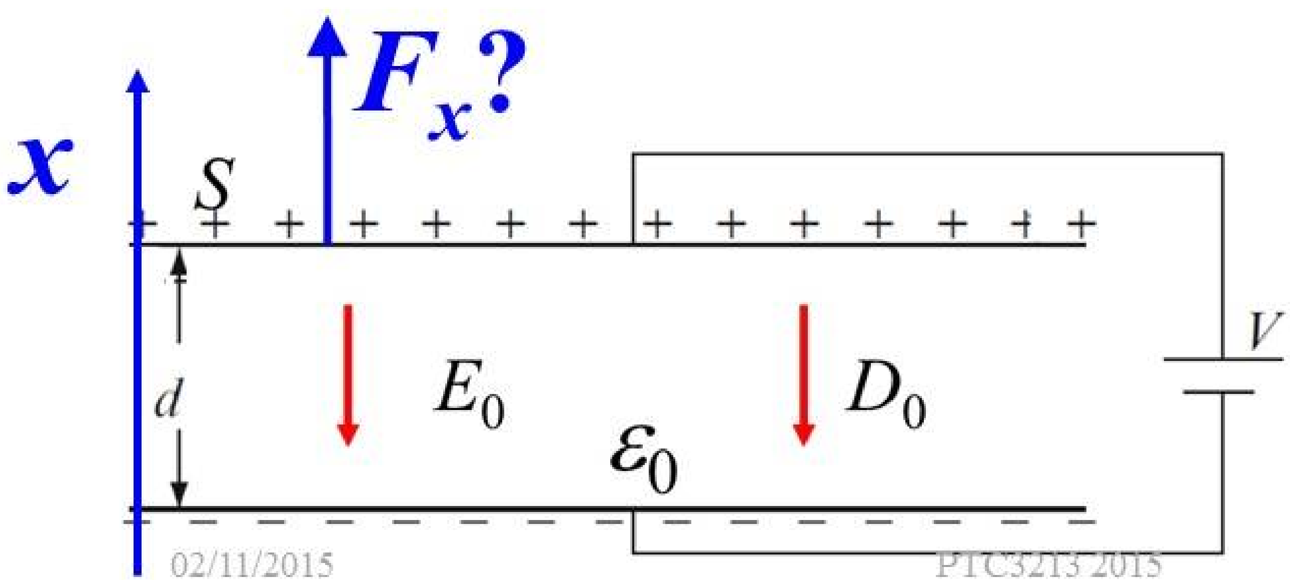
- $F = \nabla_{\mathrm{k}} W_e$
- $W_e = CV^2/2$

Q constante

- $F = -\nabla_{\mathrm{k}} W_e$
- $W_e = Q^2/2C$

Exemplo: Capacitor

Qual a força por unidade de área agindo sobre as placas de um capacitor de placas paralelas submetida a V_0?



V constante:

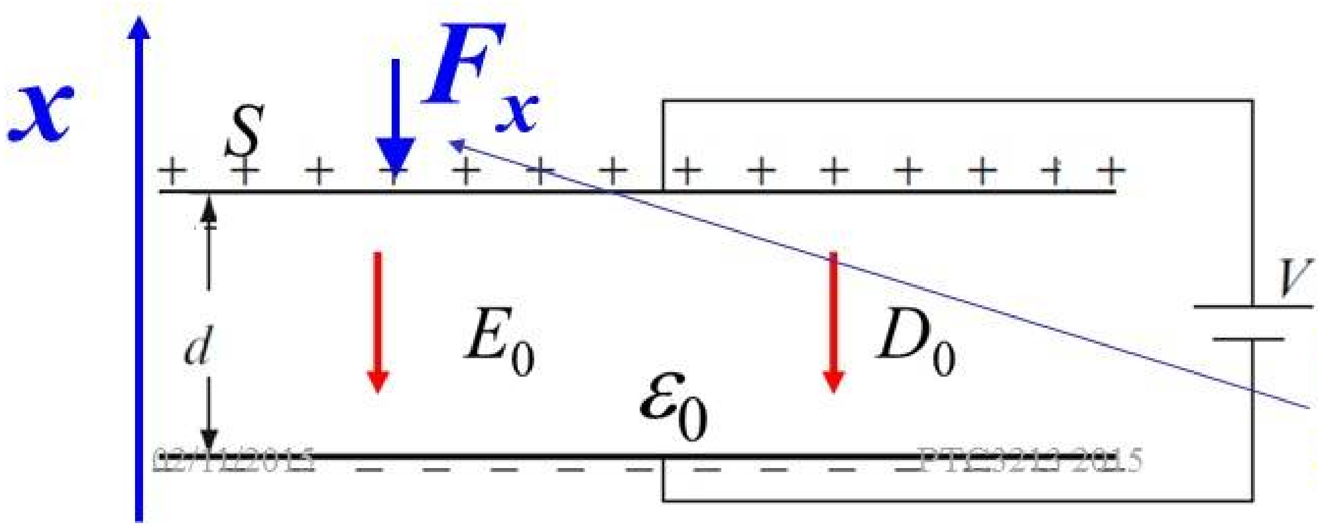
$$W_e = \frac{1}{2} C {V_0}^2$$

$$F_x = + \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{V=cte}$$

Exemplo: Capacitor – *dl* a V constante

$$W_e = \frac{1}{2} C {V_0}^2 \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{x} V^2$$

$$F_x = \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{V=cte} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 S E_0^2$$



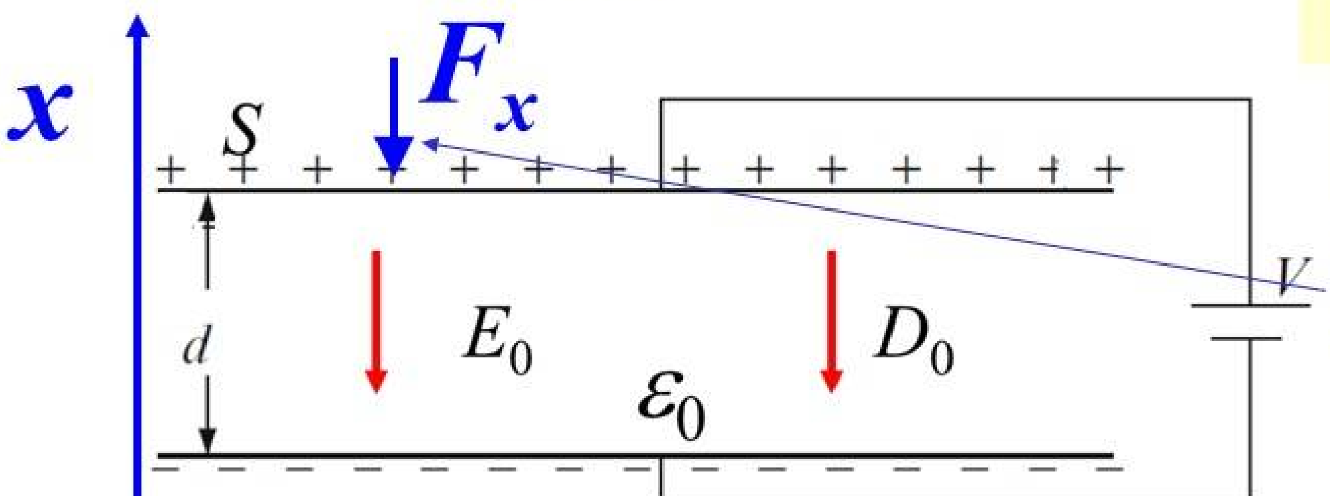
$$F_x = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 S E_0^2$$

Placa superior é atraída pela inferior

Exemplo: Capacitor – *dl* a Q constante

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\frac{x}{\varepsilon_0 S}Q^2$$

$$F_x = -\left.\frac{dW_e}{dx}\right|_{Q=cte} = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\frac{1}{\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}V^2$$



$$F_x = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S E_0^2$$

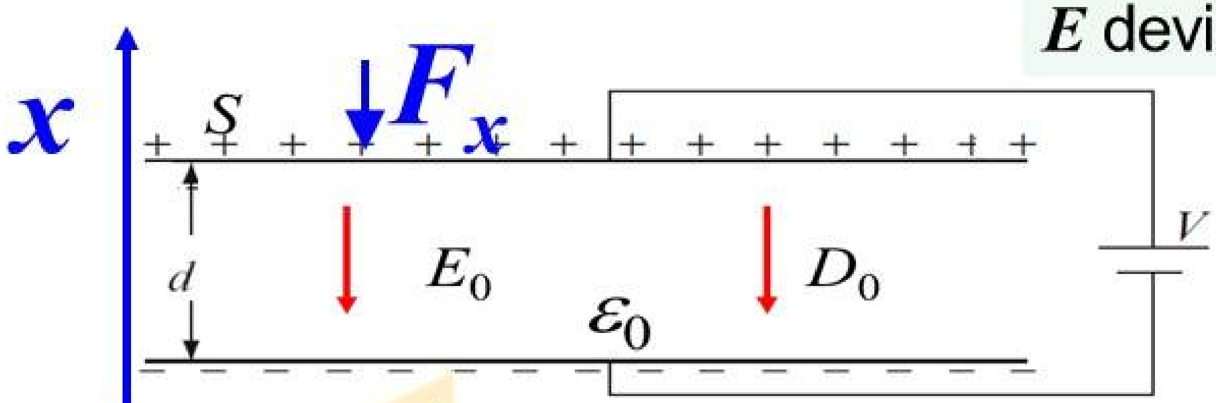
Placa superior é atraída pela inferior

$$\frac{|F_x|}{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

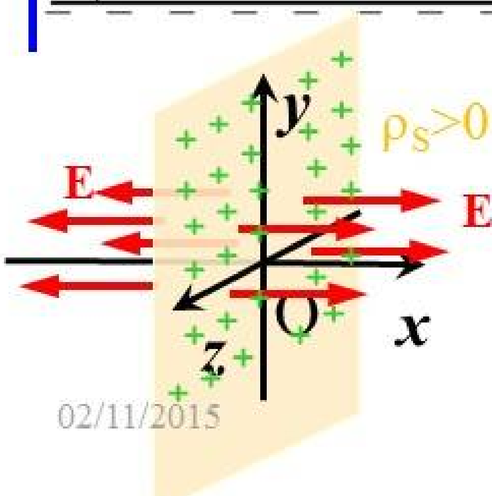
Exemplo: Capacitor – Pressão Eletrostática

$$\frac{|F_x|}{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E_0)E_0 = \frac{1}{2}D_0 E_0 = \boxed{\frac{1}{2}} E_0 \rho_{S0}$$

E devido a <u>uma</u> placa



Placa superior é atraída pela inferior



E devido a <u>uma</u> placa

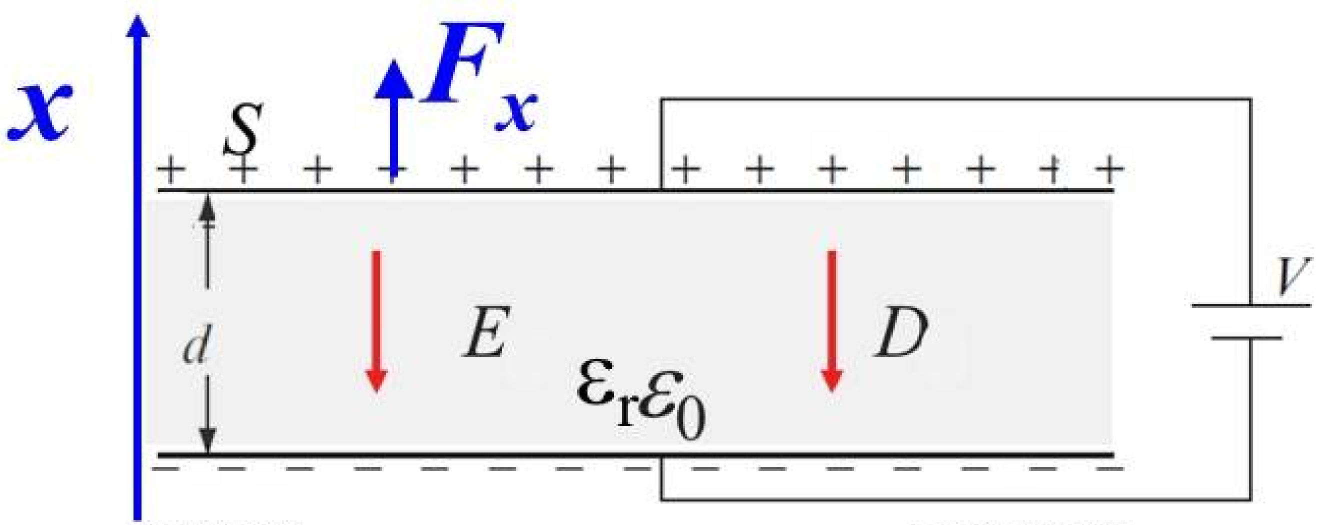
$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\boldsymbol{\varphi} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\rho_S}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}\hat{u}_x\,,\ x > 0 \\[2ex] \dfrac{-\boldsymbol{\rho_S}}{\boldsymbol{2\varepsilon}}\hat{u}_x\,,\ x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 2: Capacitor com ε_r – V cte

$$E_0 = V_0/d$$

$$\rho_S = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_r \rho_{S0}$$

$$Q = S\rho_S = S\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0$$



Exemplo 2: Capacitor com ε_r – Q cte

$$F_x = -\left.\frac{dW_e}{dx}\right|_{Q=cte} = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{ar}} = \qquad \frac{d}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S} + \frac{x-d}{\varepsilon_0 S}$$

$$F_x = -\frac{1}{2}Q^2\frac{1}{S\varepsilon_0} = -\frac{1}{2}(S\varepsilon_r\varepsilon_0 E_0)^2\frac{1}{S\varepsilon_0} = -\frac{1}{2}\varepsilon_r^2\varepsilon_0 E_0^2 S$$

$$\frac{|F_x|}{S} = \frac{1}{2}\rho_S E = \frac{1}{2}\varepsilon_r\rho_S\varepsilon_r E$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Exemplo 2: Capacitor com ε_r

$$\frac{|F_x|}{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_r^2 \rho_{S0} E_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|F_x|}{S} = \varepsilon_r^2 \frac{|F_{x0}|}{S}$$