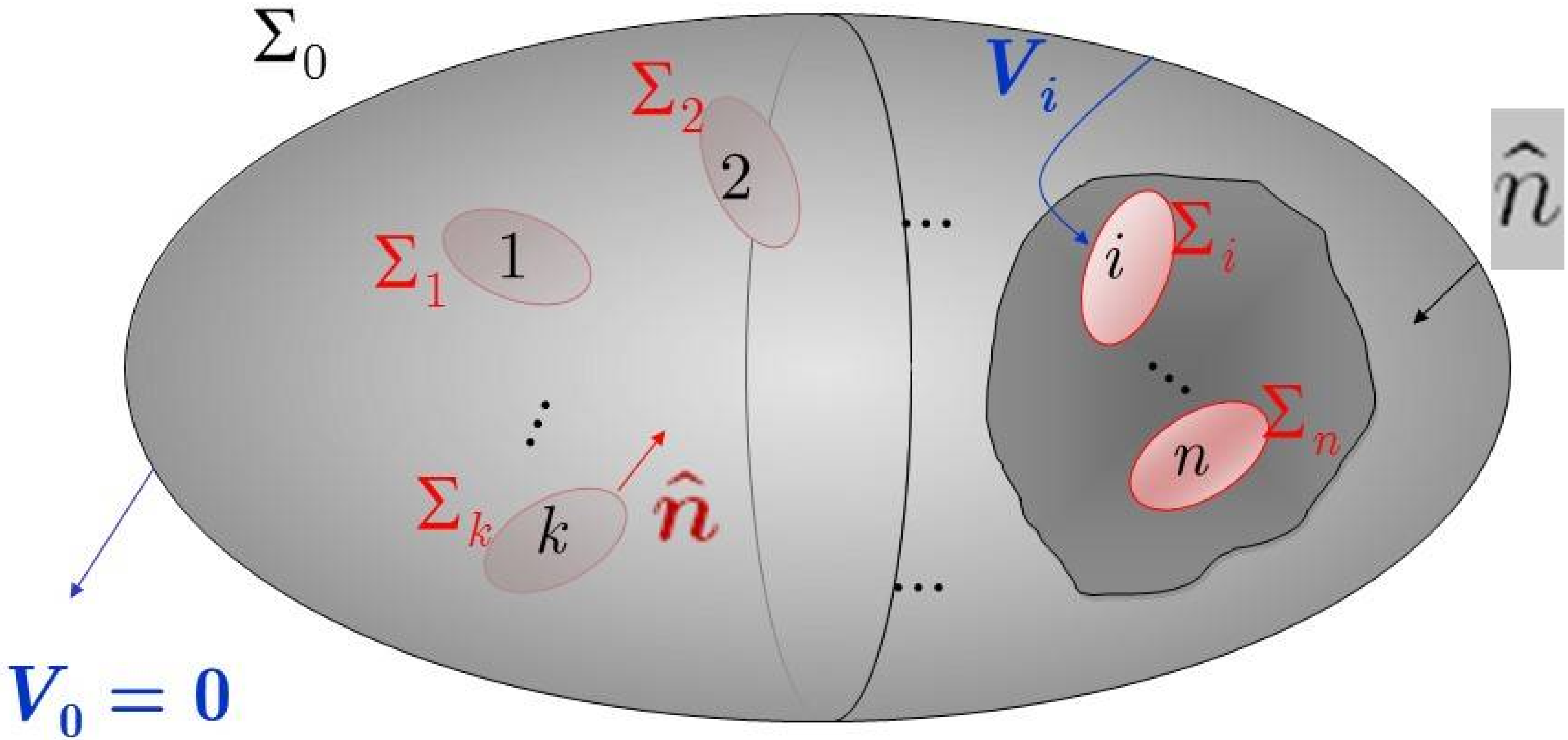
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Capacitâncias e Condutâncias Parciais

Matriz de Capacitâncias

- Conjunto de condutores mantidos a diferentes potenciais
- Imersos num meio dielétrico
- Relações entre cargas e potenciais em cada condutor e entre dois condutores: capacitâncias parciais
- Dielétrico: linear, isotrópico, sem presença de cargas

Meio condutor ou dielétrico com n eletrodos



Meio condutor ou dielétrico com n eletrodos

- Para cada condutor i submetido a V_i, existe uma única solução φ no dielétrico (Teo. Unicidade) que satisfaz às condições de contorno:

$$\varphi(\Sigma_0) = 0, \varphi(\Sigma_1) = V_1, \cdots, \varphi(\Sigma_n) = V_n$$

$(n+1)$ condutores

Matriz de Capacitâncias

Conhecido φ, determina-se $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{Q}$ nos $(n+1)$ condutores

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$Q_k = -\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla\varphi \cdot d\vec{S}_k \qquad k = 0,1,\dots n$$

φ será construída como combinação linear de n funções

Potencial no dielétrico devido a i

$$\varphi_i(P) = \begin{cases} 0, & P \in \Sigma_k, k \neq i \\ 1, & P \in \Sigma_i \end{cases}$$

$$\vec{E}_i = -\nabla \varphi_i \Rightarrow \overrightarrow{D_i} = \varepsilon \vec{E}_i = -\varepsilon \nabla \varphi_i$$

$$\nabla \varepsilon \cdot \nabla \varphi_i + \varepsilon \nabla^2 \varphi_i = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi_i = 0}$$

φ_i's : funções adimensionais

Potencial no dielétrico devido a $(n+1)$ cond.

$$\varphi = V_1\varphi_1 + V_2\varphi_2 + \cdots + V_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} V_i\varphi_i$$

$$\rho_v = \nabla\cdot\overrightarrow{D} = \nabla\cdot(-\varepsilon\nabla\varphi) = \nabla\cdot\left(-\varepsilon\nabla\sum_{i=1}^{n} V_i\varphi_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V_i\,\nabla\cdot(-\varepsilon\nabla\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times 0 = 0$$

Satisfaz às C.C. e ρ_V=0

Cargas nos condutores

$$Q_k = \oiint_{\Sigma_k} \overrightarrow{D} \cdot d\vec{S} = -\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \varphi \cdot d\vec{S} \quad k = 0{,}1, \dots n$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i$$

$$Q_k = -\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(-\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \varphi_i \cdot d\vec{S} \right)$$

$$k = 0{,}1, \dots n$$

Cargas nos n condutores

$$Q_k = -\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} V_i \left(-\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \varphi_i \cdot d\vec{S} \right)$$

$$C'_{ki} = -\oiint_{\Sigma_k} \varepsilon \nabla \varphi_i \cdot d\vec{S}$$

C'_{ik} : carga em i quando $\varphi \neq 0$ somente em k

Cargas nos n condutores

$$\begin{cases} Q_1 = C'_{11}V_1 + C'_{12}V_2 + \cdots + C'_{1n}V_n \\ Q_2 = C'_{21}V_1 + C'_{22}V_2 + \cdots + C'_{2n}V_n \\ \vdots \\ Q_n = C'_{n1}V_1 + C'_{n2}V_2 + \cdots + C'_{nn}V_n \end{cases}$$

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n)$$

Matriz de Capacitâncias

$$C'_{11} = \left.\frac{Q_1}{V_1}\right|_{V_i=0, \quad i\neq 1} \qquad C'_{21} = \left.\frac{Q_2}{V_1}\right|_{V_i=0, \quad i\neq 1} \qquad \cdots$$

$$\bar{Q} = C\bar{V} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \cdots & C'_{1n} \\ C'_{21} & C'_{22} & \cdots & C'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{n1} & C'_{n2} & \cdots & C'_{nn} \end{bmatrix}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Teorema da Reciprocidade

Modelo “concentrado” (de circuito equivalente) do sistema contínuo

$$C = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \cdots & C'_{1n} \\ C'_{21} & C'_{22} & \cdots & C'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C'_{n1} & C'_{n2} & \cdots & C'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C'_{ii} > 0$$

$$C'_{ik} \leq 0 \quad i \neq k$$

$$C'_{ik} = C'_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C'_{ik} \geq 0$$

$$\frac{Q_{ik}}{V_k} = \frac{Q_{ki}}{V_i}$$

Teo. Reciprocidade

Matriz de Condutâncias

$$\begin{cases} I_1 = G'_{11}V_1 + G'_{12}V_2 + \cdots + G'_{1n}V_n \\ I_2 = G'_{21}V_1 + G'_{22}V_2 + \cdots + G'_{2n}V_n \\ \vdots \\ I_n = G'_{n1}V_1 + G'_{n2}V_2 + \cdots + G'_{nn}V_n \end{cases}$$

$$\bar{I} = G\bar{V}$$

$$G = \begin{bmatrix} G'_{11} & G'_{12} & \cdots & G'_{1n} \\ G'_{21} & G'_{22} & \cdots & G'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G'_{n1} & G'_{n2} & \cdots & G'_{nn} \end{bmatrix}$$

Termos da Matriz de Condutâncias

$$G = \begin{bmatrix} G'_{11} & G'_{12} & \cdots & G'_{1n} \\ G'_{21} & G'_{22} & \cdots & G'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G'_{n1} & G'_{n2} & \cdots & G'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$G'_{ki} = -\oiint_{\Sigma_k} \sigma \nabla \varphi_i \cdot d\vec{S}$$

$$G'_{ik} = G'_{ki}$$

$$G'_{ik} \leq 0 \quad i \neq k$$

$$G'_{ii} > 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} G'_{ik} \geq 0$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Modelos de C e G parciais

$$I_k = G'_{k1}V_1 + G'_{k2}V_2 + \cdots + G'_{kn}V_n$$

Reescrevendo linha k em termos de d.d.p. entre condutor k e demais,

$$= G'_{k1}[(V_1 - V_k) + (V_k - V_0)] +$$

$$+G'_{k2}[(V_2 - V_k) + (V_k - V_0)] + \cdots$$

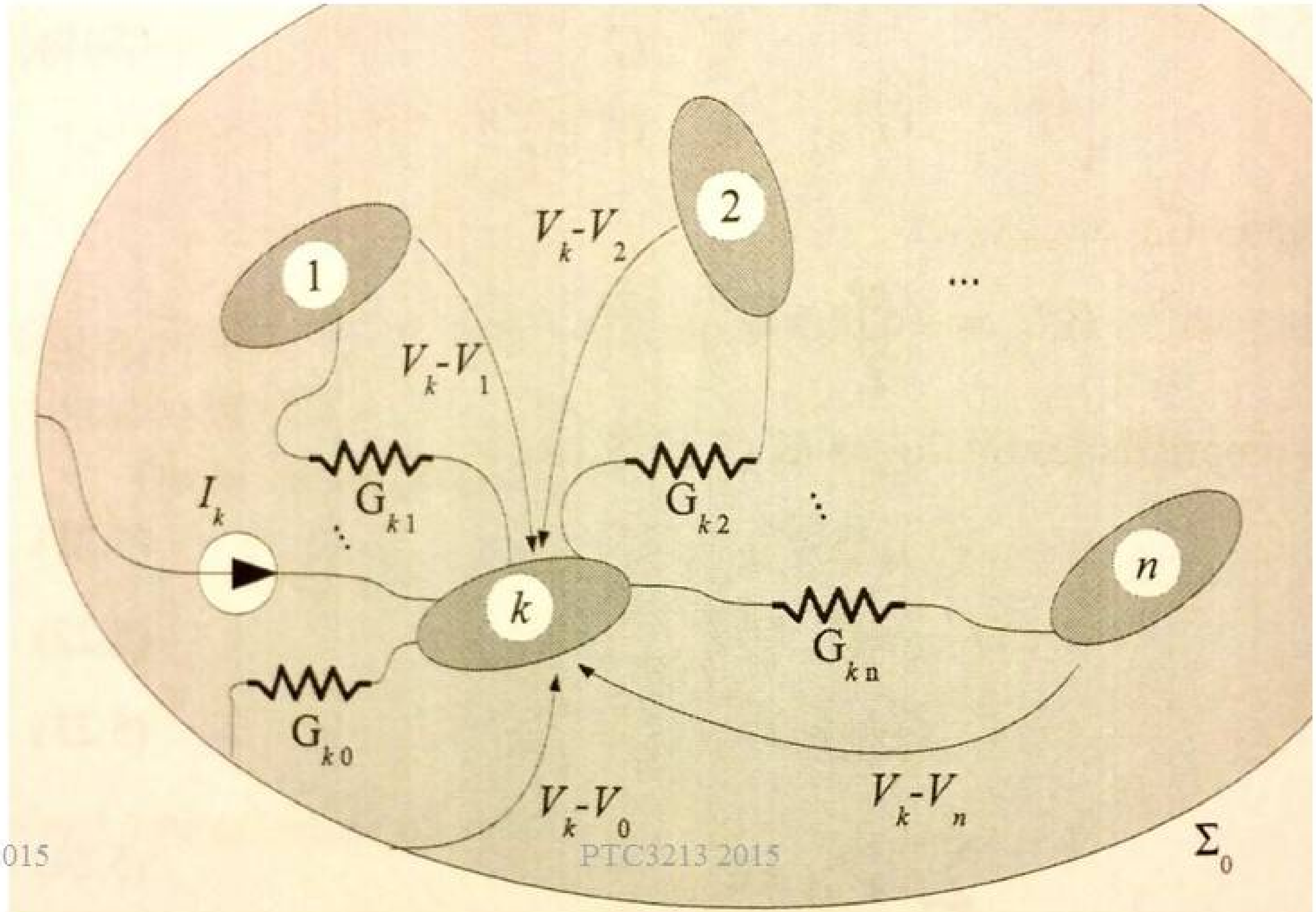
$$\ldots + G'_{kk}[(V_k - V_0)] + \cdots + G'_{kn}[(V_n - V_k) + (V_k - V_0)] =$$

$$= (G'_{k1} + G'_{k2} + \cdots + G'_{kn})(V_k - V_0) -$$

$$-G'_{k1}(V_k - V_1) - G'_{k2}(V_k - V_2) - \cdots - G'_{kn}(V_k - V_n)$$

Modelos de C e G parciais

$$I_k = G'_{k1} V_1 + G'_{k2} V_2 + \cdots + G'_{kn} V_n$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condutâncias Parciais

$$I_k = G'_{k1}V_1 + G'_{k2}V_2 + \cdots + G'_{kn}V_n$$

$$I_k = G_{k0}(V_k - V_0) + G_{k1}(V_k - V_1) + G_{k2}(V_k - V_2) + \cdots$$
$$\ldots + G_{kn}(V_k - V_n)$$

$$G_{k0} = \sum_{i=1}^{n} G'_{ki}$$

$$G_{ki} = -G'_{ki} \quad i \neq k$$

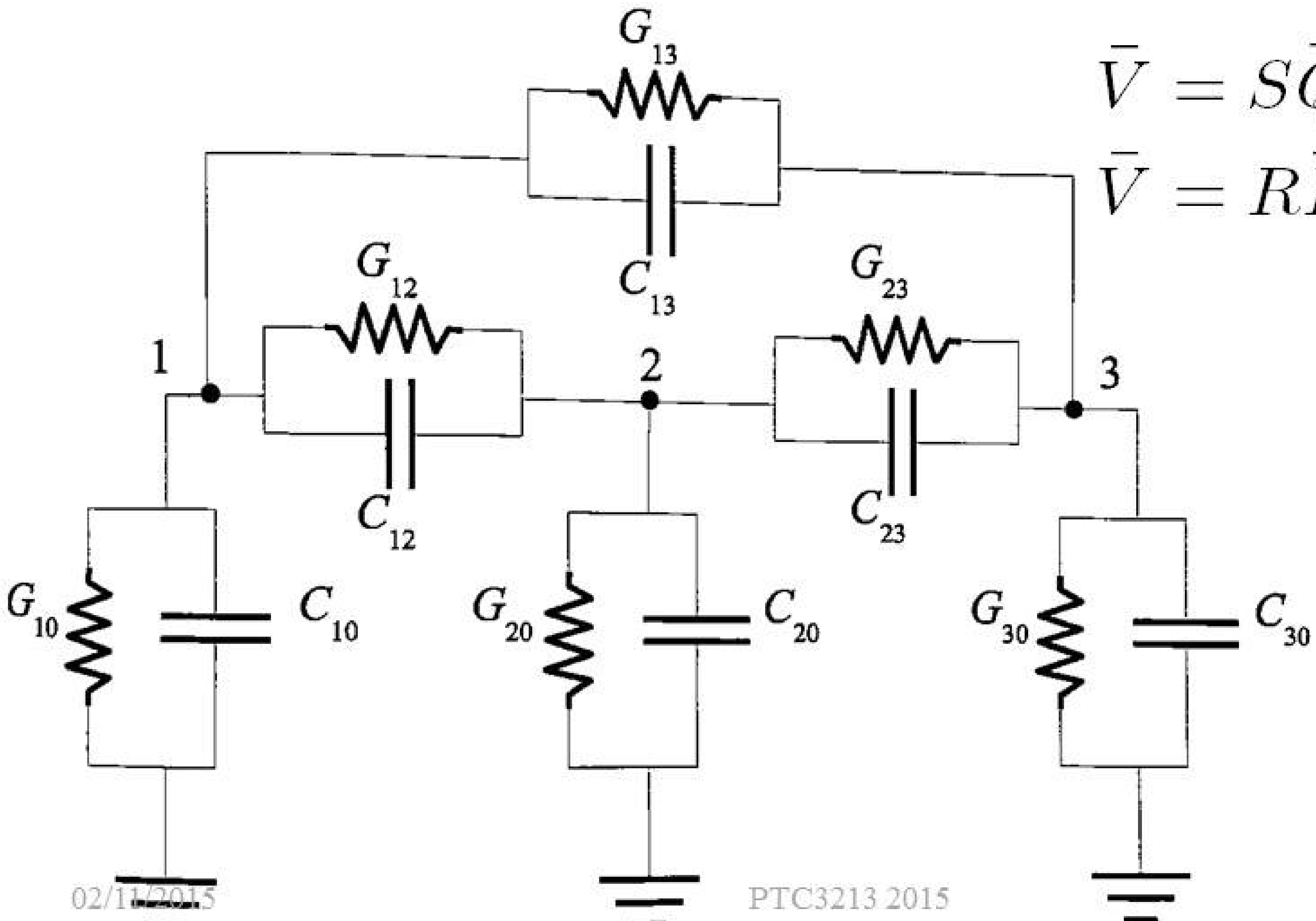
Capacitâncias Parciais

$$Q_k = C_{k0}(V_k - V_0) + C_{k1}(V_k - V_1) + C_{k2}(V_k - V_2) + \cdots$$

$$\ldots + C_{kn}(V_k - V_n)$$

$$\boxed{\begin{gathered} C_{k0} = \sum_{i=1}^{n} C'_{ki} \\ C_{ki} = -C'_{ki} \quad i \neq k \end{gathered}}$$

Circuito Equivalente para 3 condutores

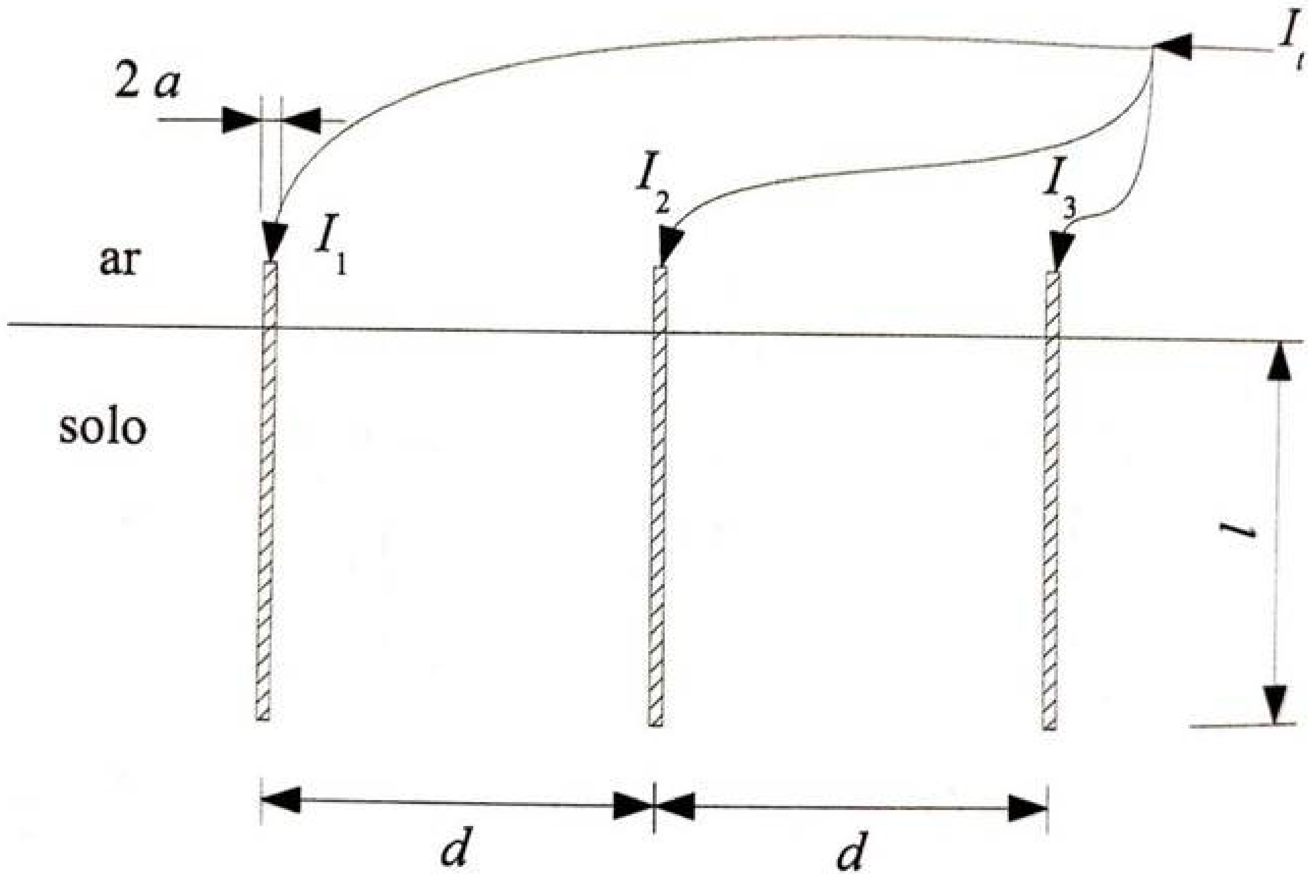


$$\bar{V} = S\overline{Q} \qquad S = C^{-1}$$

$$\bar{V} = R\bar{I} \quad R = G^{-1}$$

Aterramento com 3 estacas

$l = 1$ m
$a = 2{,}5$ cm
$d = 2$ m
$\sigma = 0{,}01$ S/m



1 estaca: $$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln\left[\frac{2l}{a}\right] = 69{,}7\ \Omega$$

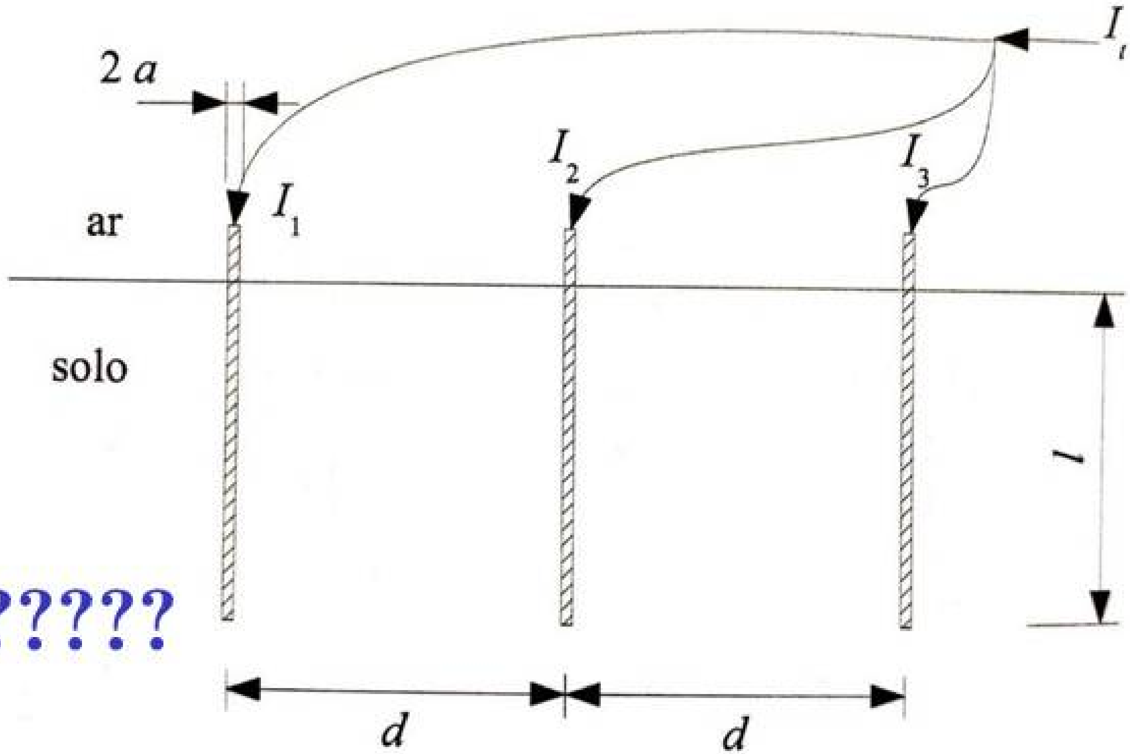
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Aterramento com 3 estacas

$R = 69{,}7\ \Omega$

3 estacas curto-circuitadas:

$$\boldsymbol{R_{//} = R/3 = 23{,}2\ \Omega\ ?????}$$



Apenas se d for suficientemente grande!

Caso contrário, é necessário considerar acoplamento

Obtenção da Matriz G

$$G'_{1i} = \left.\frac{I_i}{V_1}\right|_{V_i=0, \quad i\neq 1}$$

Construção da matriz de condutâncias: não é o mais prático

Experimental

Analiticamente

Encontrar funções para cada condutor k valendo 1 em k e 0 nos demais

Potencial aproximado devido a 1 estaca

Cálculo analítico supondo $I_1 \neq 0$ e I_2=I_3 =0
Estacas 2 e 3 não afetam o potencial total

$$\varphi(\rho, z) = \frac{I_1}{4\pi\sigma l}\ln\left[\frac{(z+l)+\sqrt{(z+l)^2+\rho^2}}{(z-l)+\sqrt{(z-l)^2+\rho^2}}\right]$$

$$V_{11} = \varphi(a,0) = \frac{I_1}{4\pi\sigma l}\ln\left[\frac{(l)+\sqrt{(l)^2+a^2}}{(-l)+\sqrt{(-l)^2+a^2}}\right] = 69{,}7 I_1$$

$$R_{11} = 69{,}7\ \Omega$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Potencial no condutor 2 devido a 1

$$V_{21} = \varphi(d,0) = \frac{I_1}{4\pi\sigma l}\ln\left[\frac{(l)+\sqrt{(l)^2+d^2}}{(-l)+\sqrt{(-l)^2+d^2}}\right] = 7{,}66 I_1$$

$$R_{21} = 7{,}66\ \Omega$$

$$\varphi(d,l) = \frac{I_1}{4\pi\sigma l}\ln\left[\frac{2l+\sqrt{(4l)^2+d^2}}{0+\sqrt{0+d^2}}\right] = 7{,}01 I_1$$

d.d.p. entre as duas extremidades de 2: **8,5%**

$$R = \begin{bmatrix} 69{,}7 & 7{,}66 & 3{,}94 \\ 7{,}66 & 69{,}7 & 7{,}66 \\ 3{,}94 & 7{,}66 & 69{,}7 \end{bmatrix} \Omega$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Matriz de Condutâncias

$$G = R^{-1} = \begin{bmatrix} 14{,}55 & -1{,}53 & -0{,}65 \\ -1{,}53 & 14{,}68 & -1{,}53 \\ -0{,}65 & -1{,}53 & 14{,}55 \end{bmatrix} \text{mS}$$

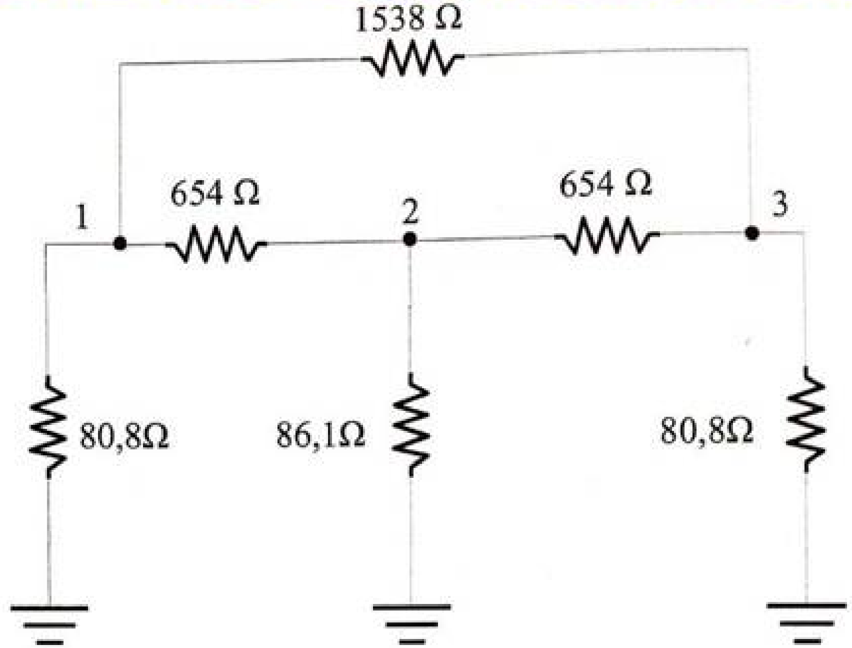
$$G_{10} = 14{,}55 - 1{,}53 - 0{,}65 = 12{,}37 \text{ mS} = 1/(80{,}8)$$

$$G_{20} = 14{,}68 - 1{,}53 - 1{,}53 = 11{,}62 \text{ mS} = 1/(86{,}1)$$

$$G_{12} = 1{,}53 \text{ mS} = \frac{1}{(654)} = G_{23}$$

$$G_{13} = 0{,}65 \text{ mS} = \frac{1}{(1538)}$$

Matriz de Condutâncias



$$I = GV = \begin{bmatrix} 14{,}55 & -1{,}53 & -0{,}65 \\ -1{,}53 & 14{,}68 & -1{,}53 \\ -0{,}65 & -1{,}53 & 14{,}55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}4 \\ 11{,}6 \\ 12{,}4 \end{bmatrix} \text{mA}$$

$$R = \frac{1V}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{1}{36{,}4} = 27{,}5\ \Omega$$

$$\boldsymbol{R_{//} = 23{,}2\ \Omega}$$