ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Método das Imagens

Método das Imagens

1. Método para cálculo de campos e potenciais devido à carga(s) ou distribuição(ões) de cargas na presença de superfícies condutoras.
2. As superfícies condutoras do problema original são removidas e substituídas por cargas imagem. Essa nova configuração deve fornecer a mesma solução do problema original na região de interesse (externamente à superfície condutora)
3. Carga imagem é **igual** à fonte **em modulo**, mas de **sinal oposto**.
4. A geometria é refletida numa **superfície de potencial constante** (equipotencial) como num espelho.

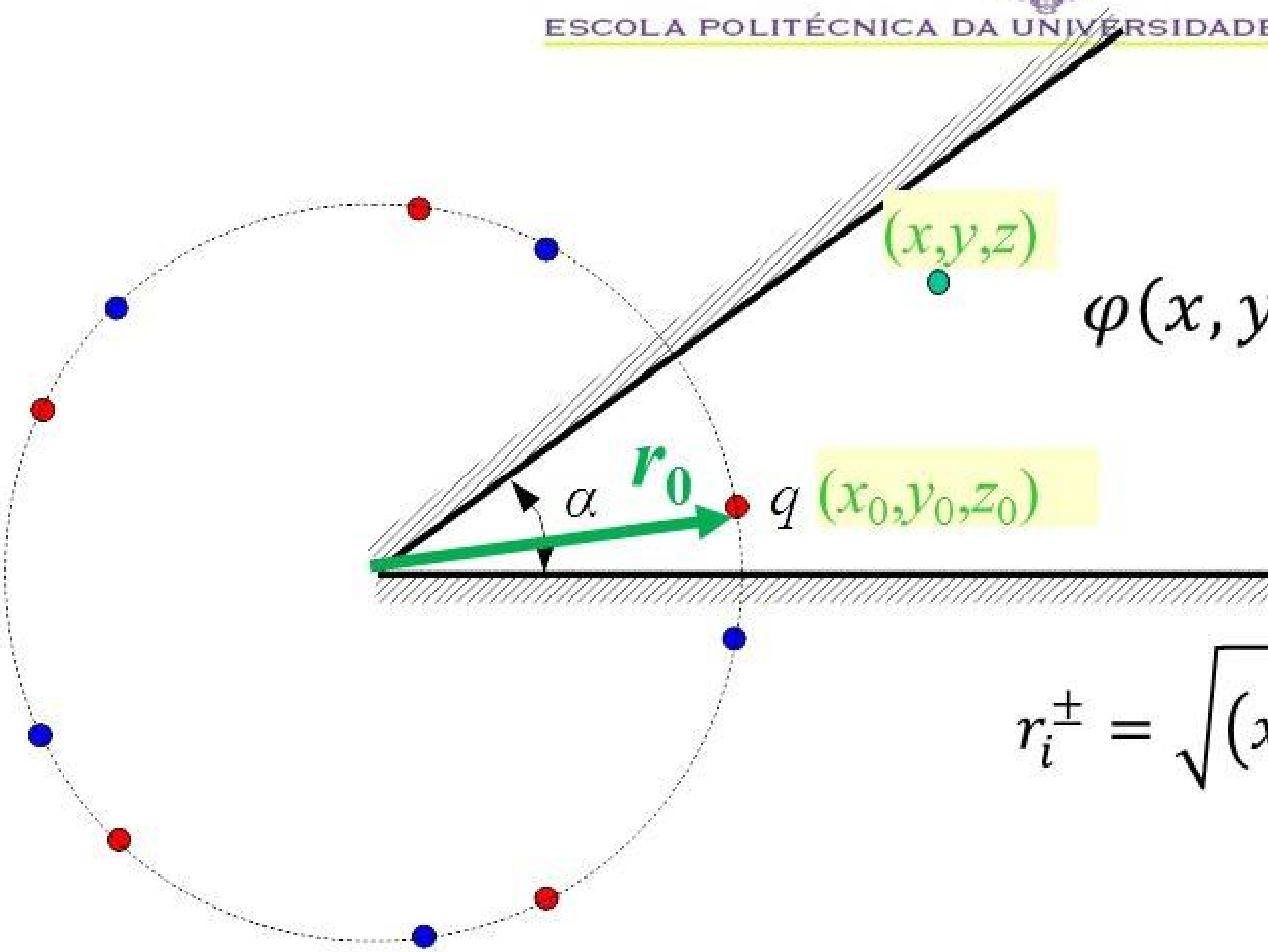
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Método das Imagens

(cont.)

5. Imagem e fonte estão à **mesma distância da superfície** "espelho", em direções opostas.
6. **Múltiplas fontes** produzem **múltiplas imagens**, segundo a(s) superfície(s) espelho.
7. Cargas ou distribuições de carga, únicas ou múltiplas, em face a **múltiplas superfícies espelho**, também produzem **múltiplas imagens**
8. Regras **(3)** e **(5)** aplicam-se **apenas a superfícies planas**. As restantes se aplicam também a superfícies curvas.
9. Fontes de carga do tipo distribuições lineares, superficiais ou volumétricas se comportam da mesma forma que cargas puntiformes, pois correspondem a uma composição de cargas pontuais. Suas imagens também serão distribuições.

Diedros



$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{r_i^+} - \frac{1}{r_i^-}\right)$$

$$r_i^{\pm} = \sqrt{\left(x - x_i^{\pm}\right)^2 + \left(y - y_i^{\pm}\right)^2 + z^2}$$

$$x_i^{\pm} = r_0 \cos\phi_i^{\pm}$$

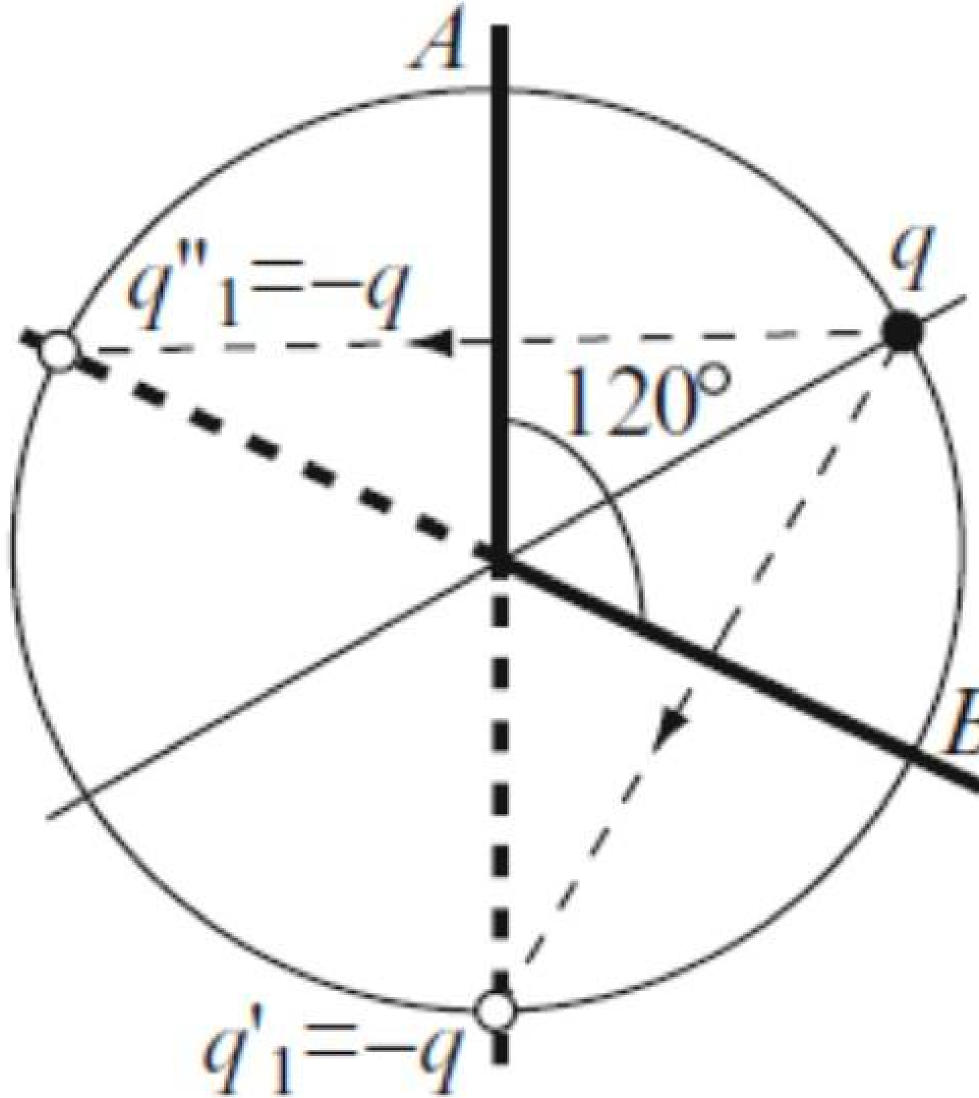
$$y_i^{\pm} = r_0 \sin\phi_i^{\pm}$$

$$\phi_i^{\pm} = 2i\alpha \pm \phi_0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \Rightarrow 2n-1 \quad \text{imagens}$$

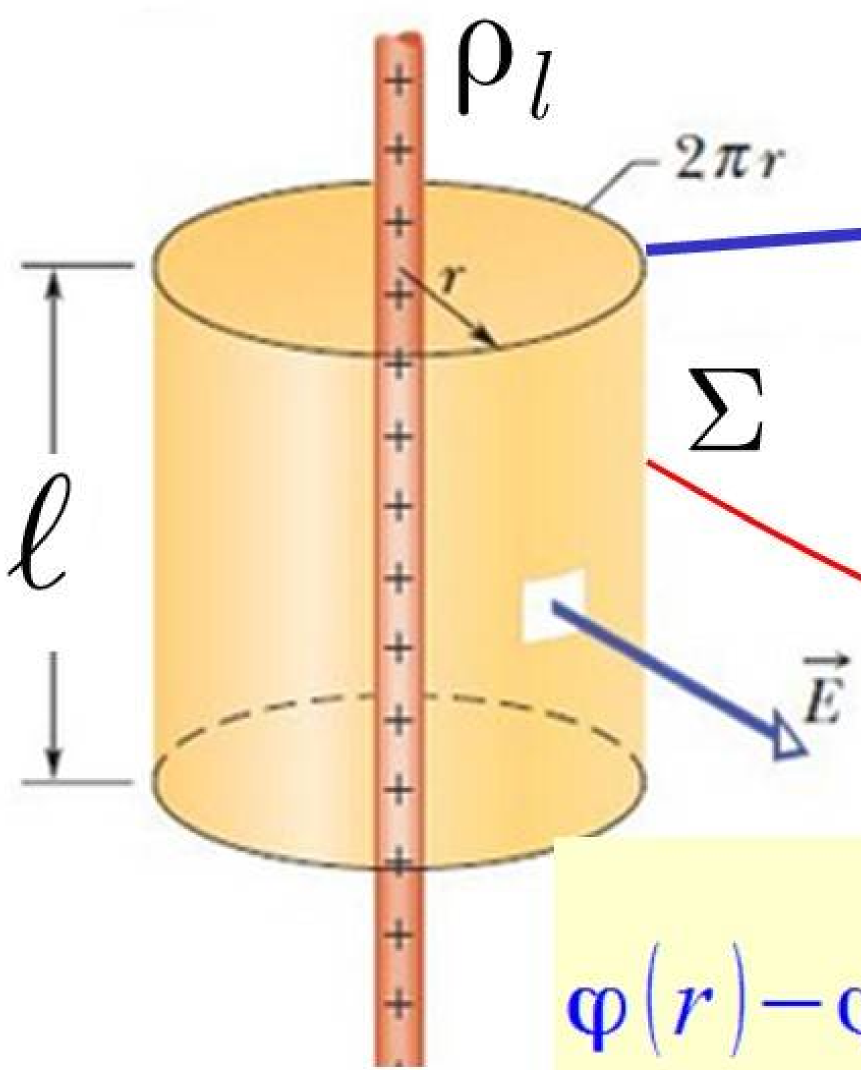
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

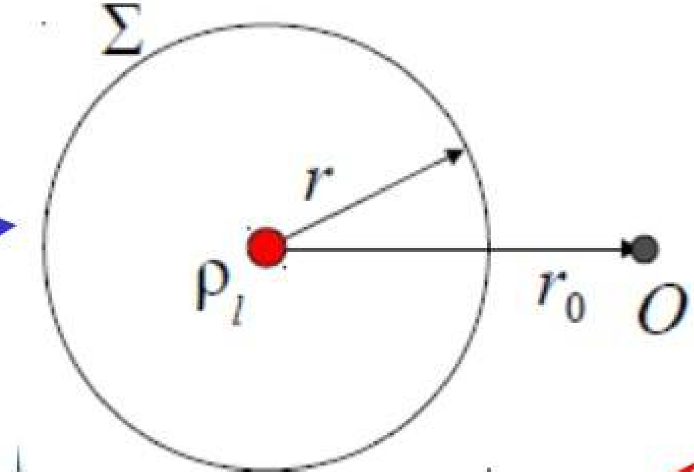
Diedros



n não inteiro: Sem solução

Potencial devido a Linha de Carga



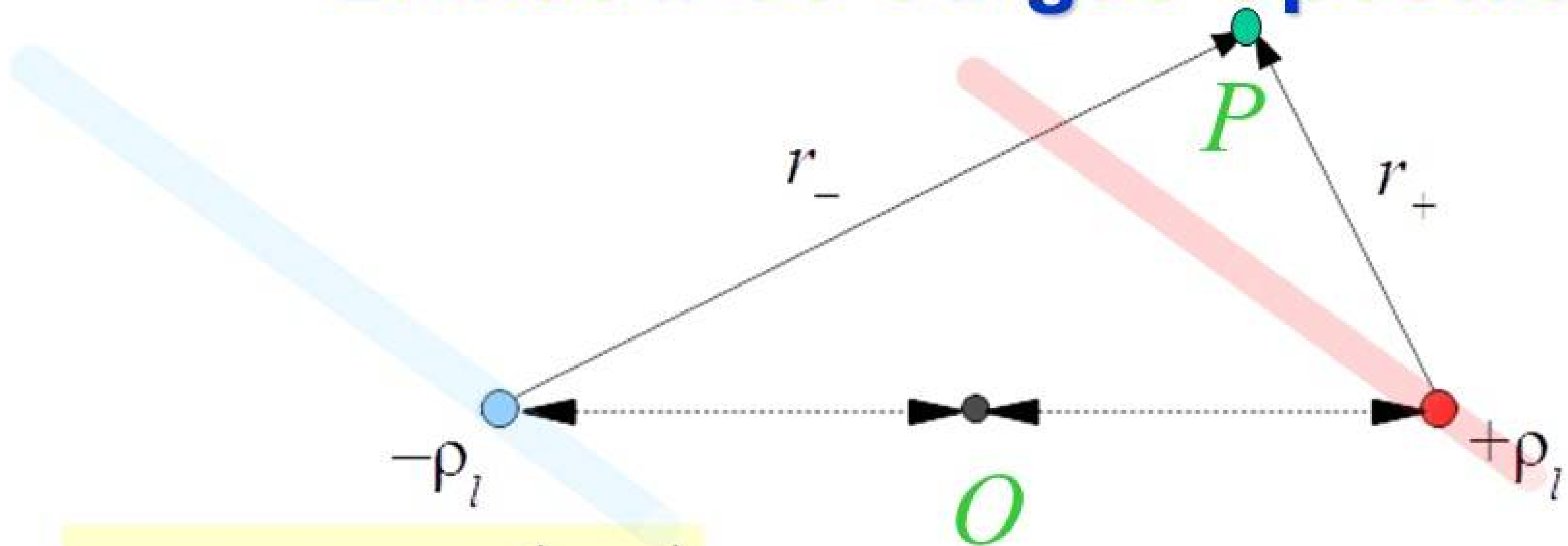


$$\rho_l\,\ell = \oiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_r\, 2\pi r\,\ell \Rightarrow$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_l}{2\pi r}\vec{u}_r \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\, r}\vec{u}_r \Rightarrow$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \int_r^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Linhas // de Cargas Opostas



$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$

Equipotenciais: $$\frac{r_-}{r_+} = cte$$

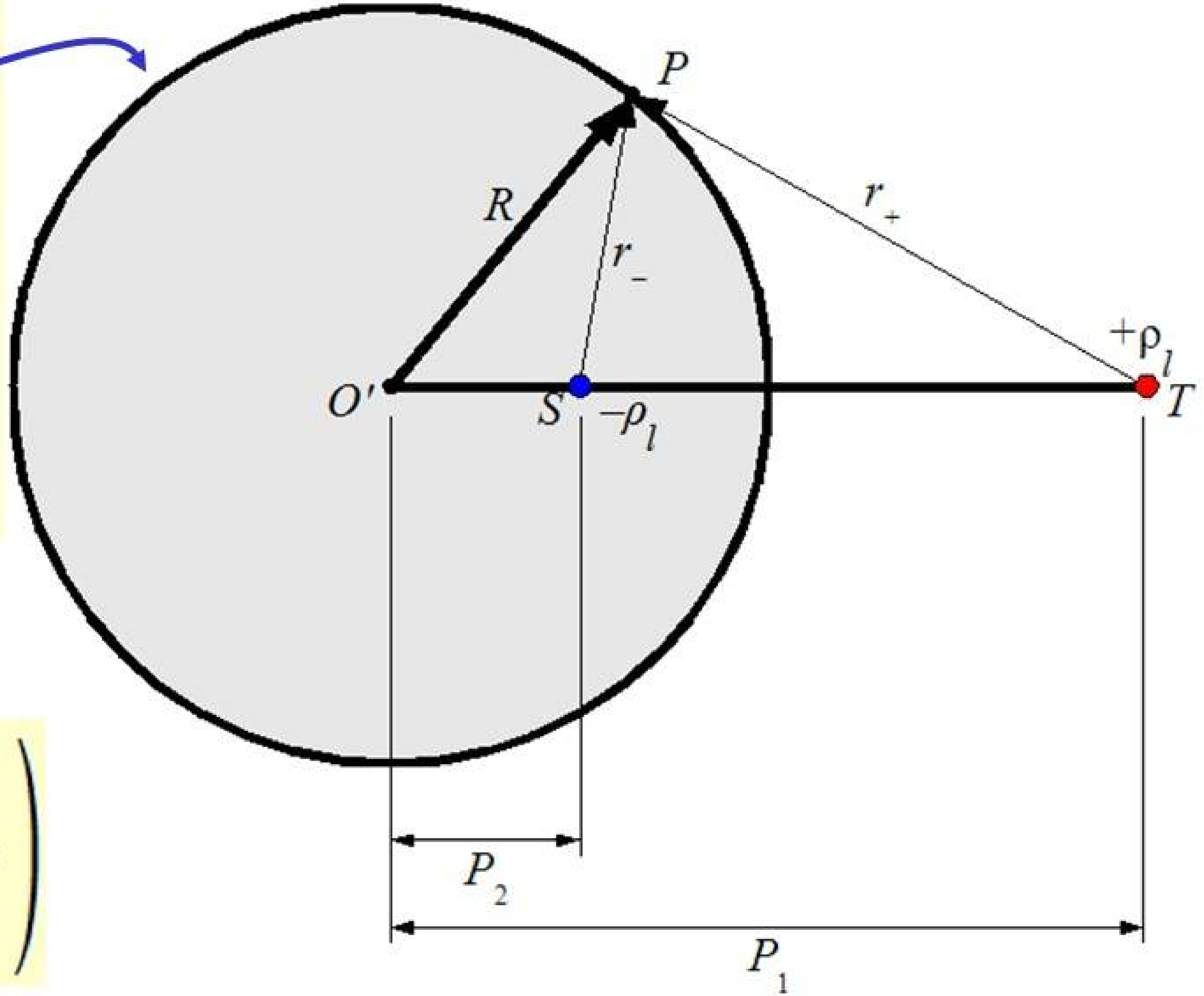
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Linhas de Cargas Opostas

Equipotenciais: superfícies cilíndricas de raio ***R*** centradas em pontos ***O'*** tais que:

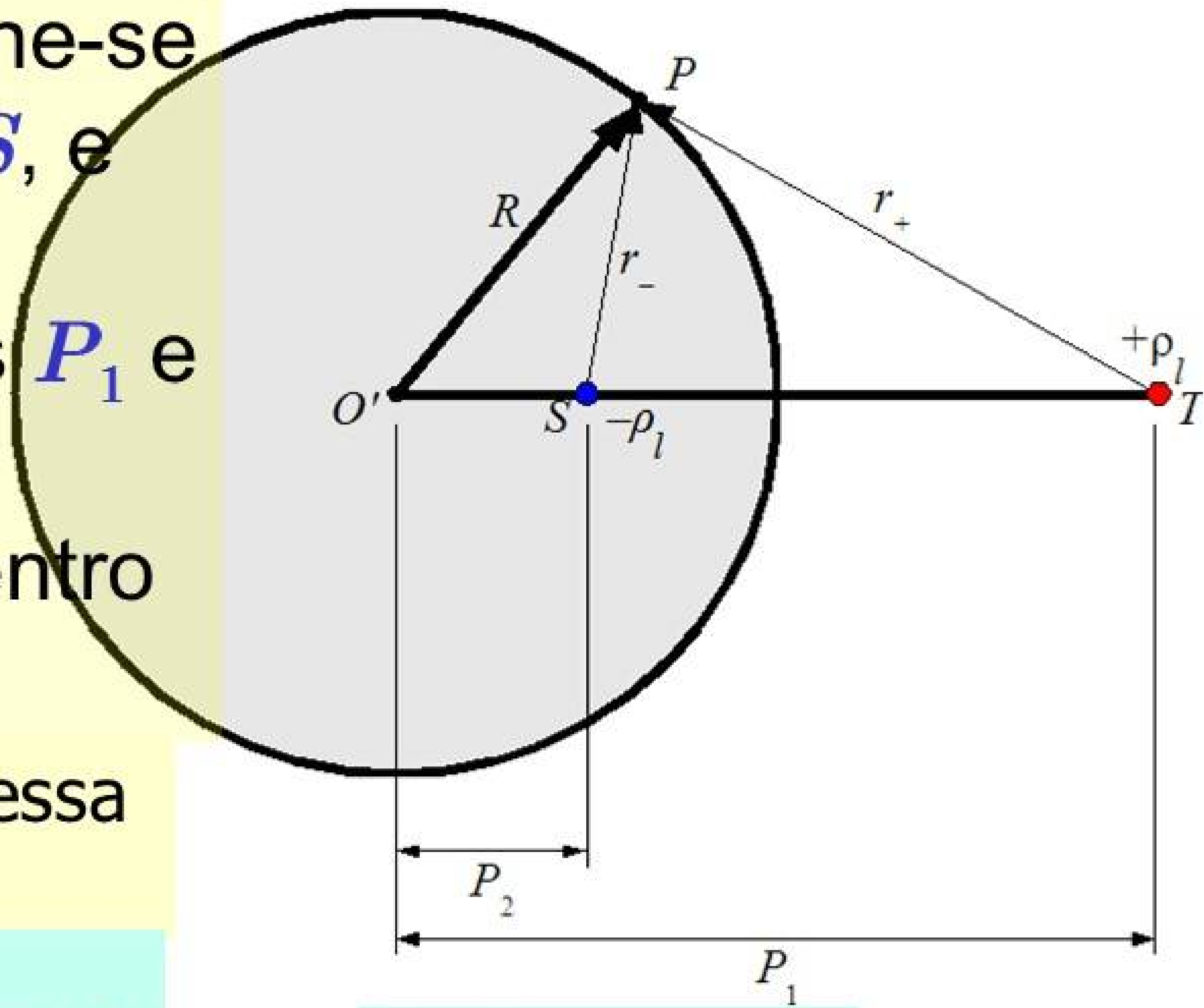
$$R^2 = P_1 \, P_2$$

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$



Linhas de Cargas Opostas

- Dados S e T, escolhe-se O' (à esquerda de S, e alinhado com ST),
- Para esse O' temos P_1 e P_2 e traçamos a circunferência de centro em O' com raio R:



- Para qualquer ponto nessa circunferência, temos:

$$R^2 = P_1 P_2 \Rightarrow \frac{r_-}{r_+} = cte \Rightarrow$$ Equipotencial

Linhas de Cargas Opostas

Se $P_1 P_2 = R^2$

então, para $\forall P$

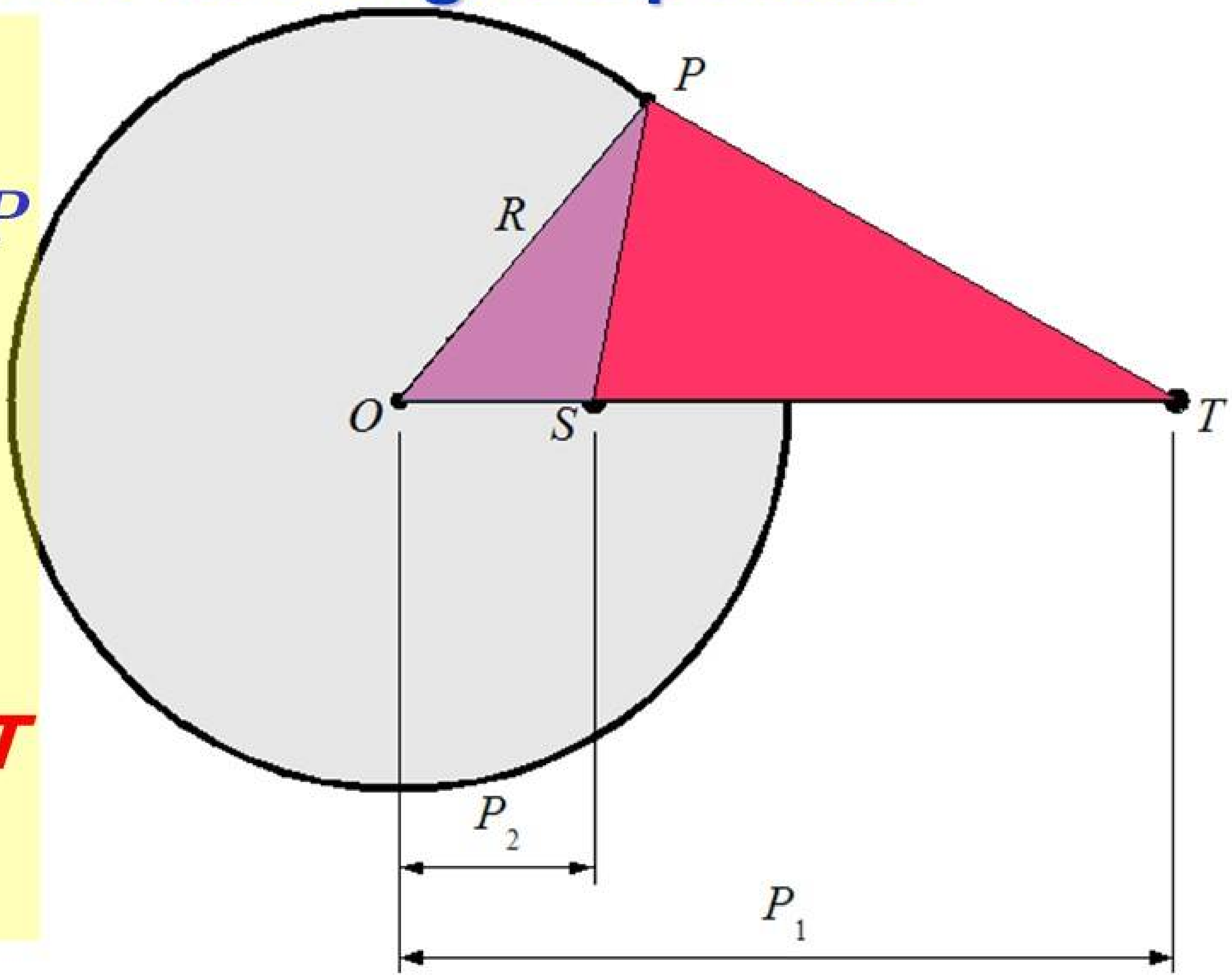
sobre a

circunferência

de raio R,

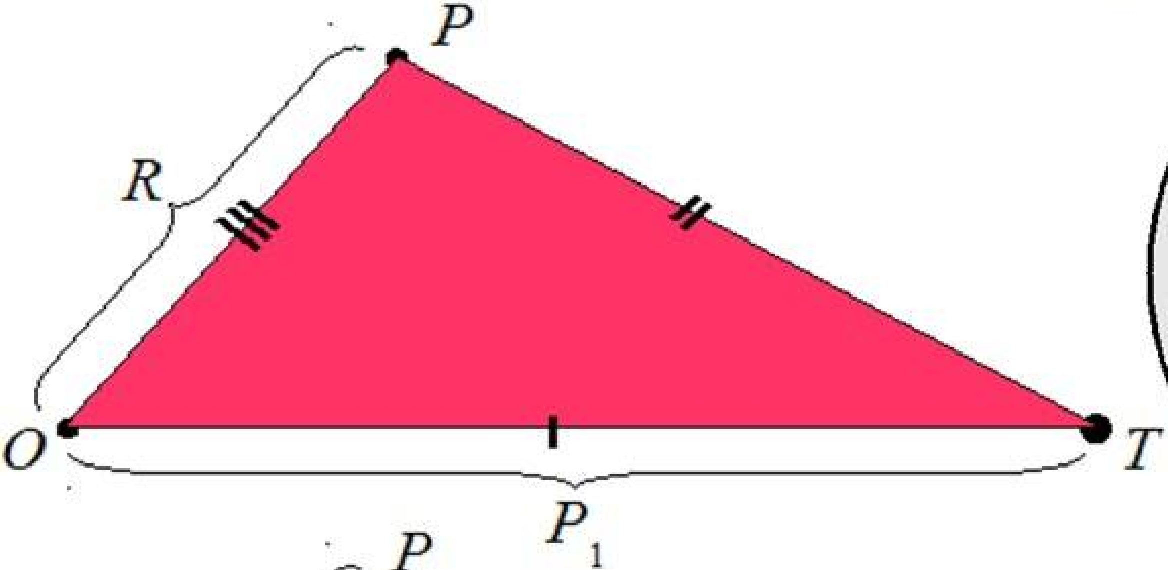
Δ ***OSP*** **~** Δ ***OPT***

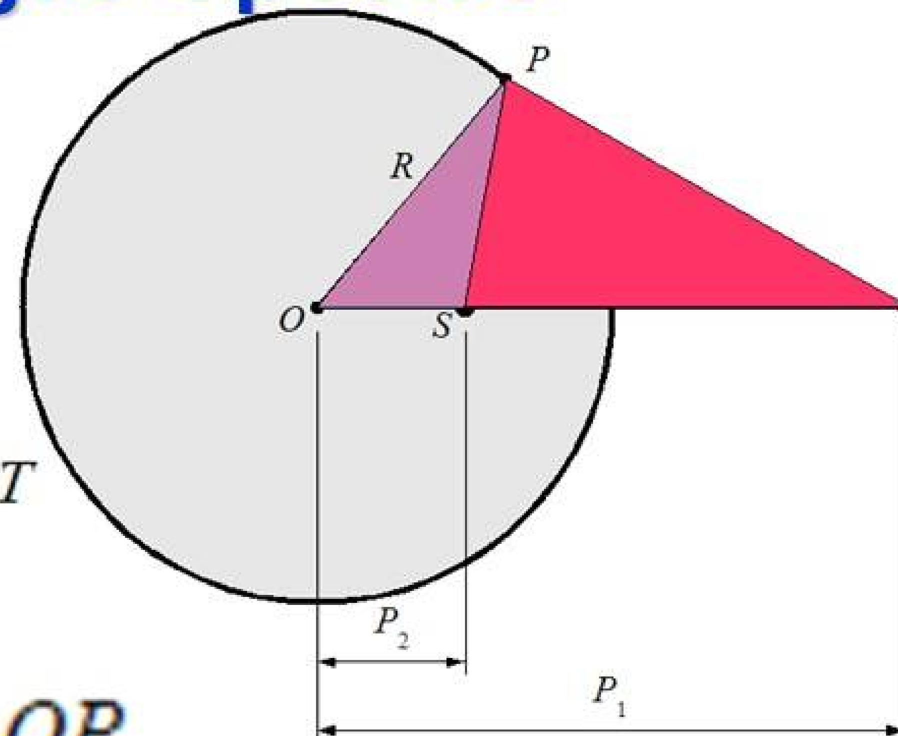
:(*LAL*)

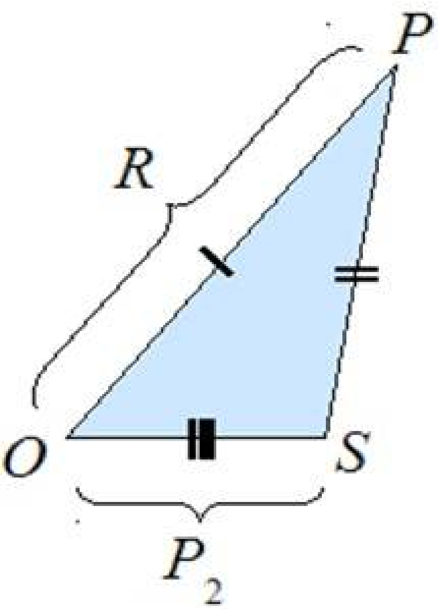


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Linhas de Cargas Opostas



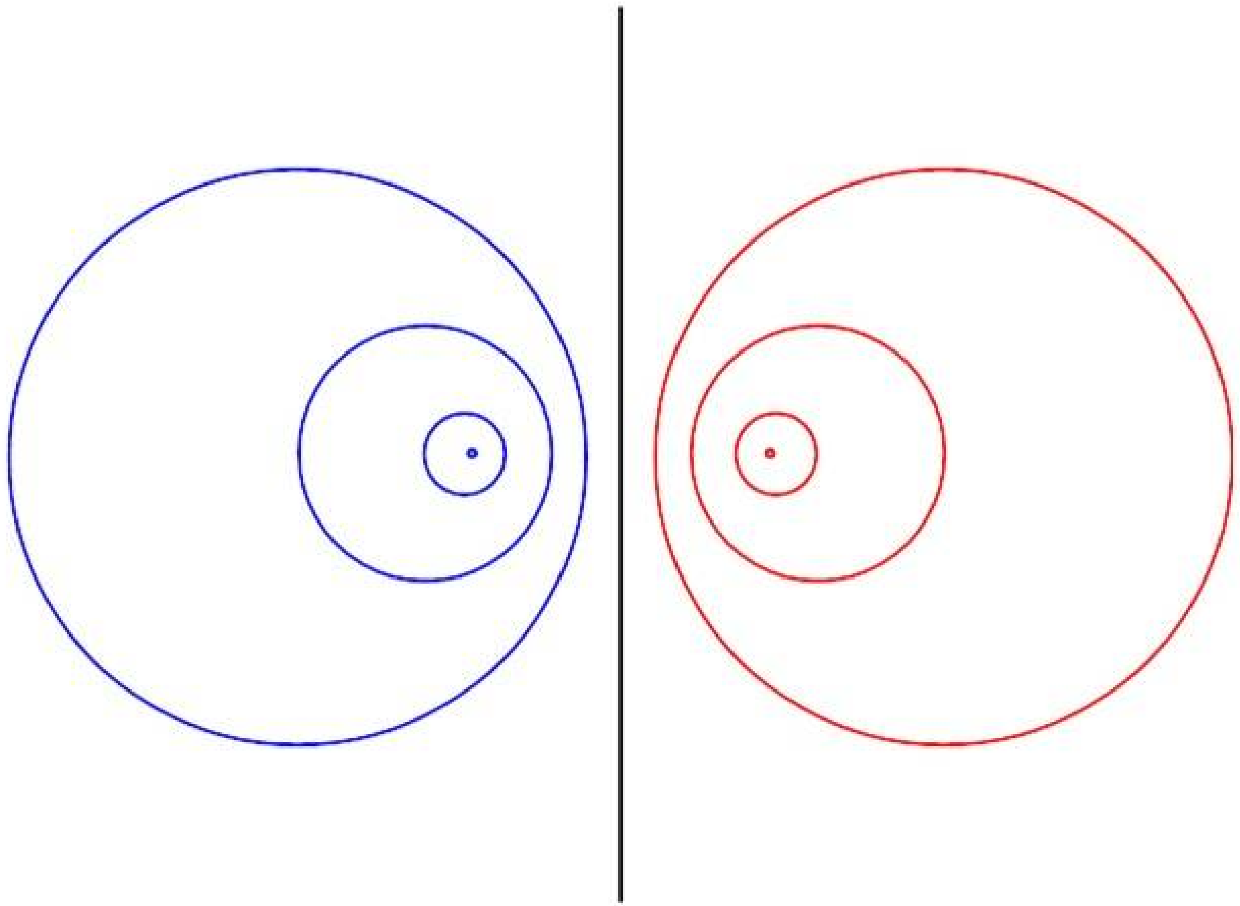




$$\frac{P_2}{R}=\frac{R}{P_1}\Rightarrow\frac{OS}{OP}=\frac{OP}{OT}$$

$$\frac{SP}{PT}=\frac{OP}{OT}\Rightarrow\frac{r_-}{r_+}=\frac{R}{P_1}=\text{cte}$$

Linhas Equipotenciais



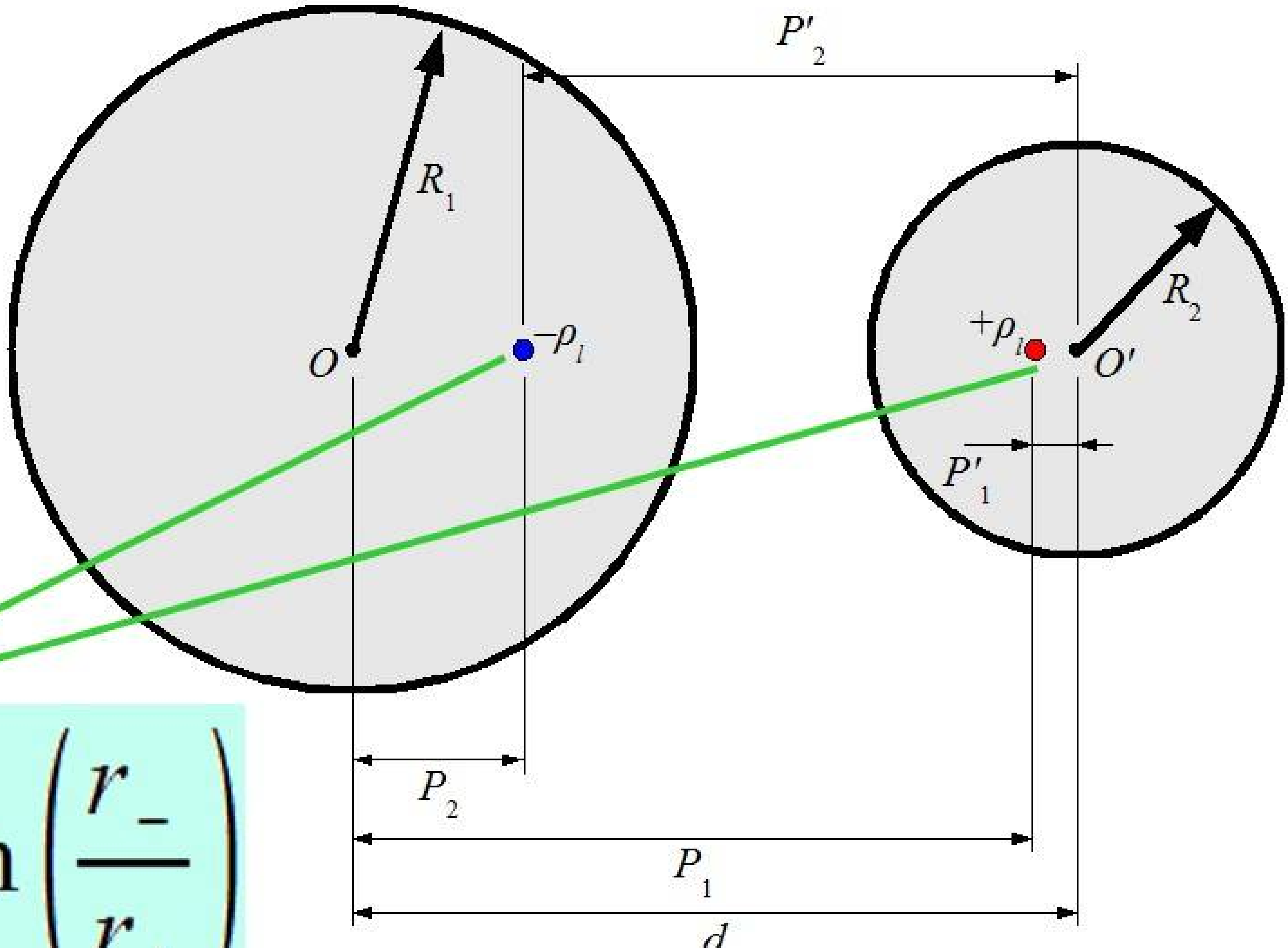
Cilindros Condutores Paralelos

$$R_1^2 = P_1 P_2,$$

$$R_2^2 = P'_1 P'_2.$$

$$P'_1 = d - P_1$$

$$P'_2 = d - P_2.$$

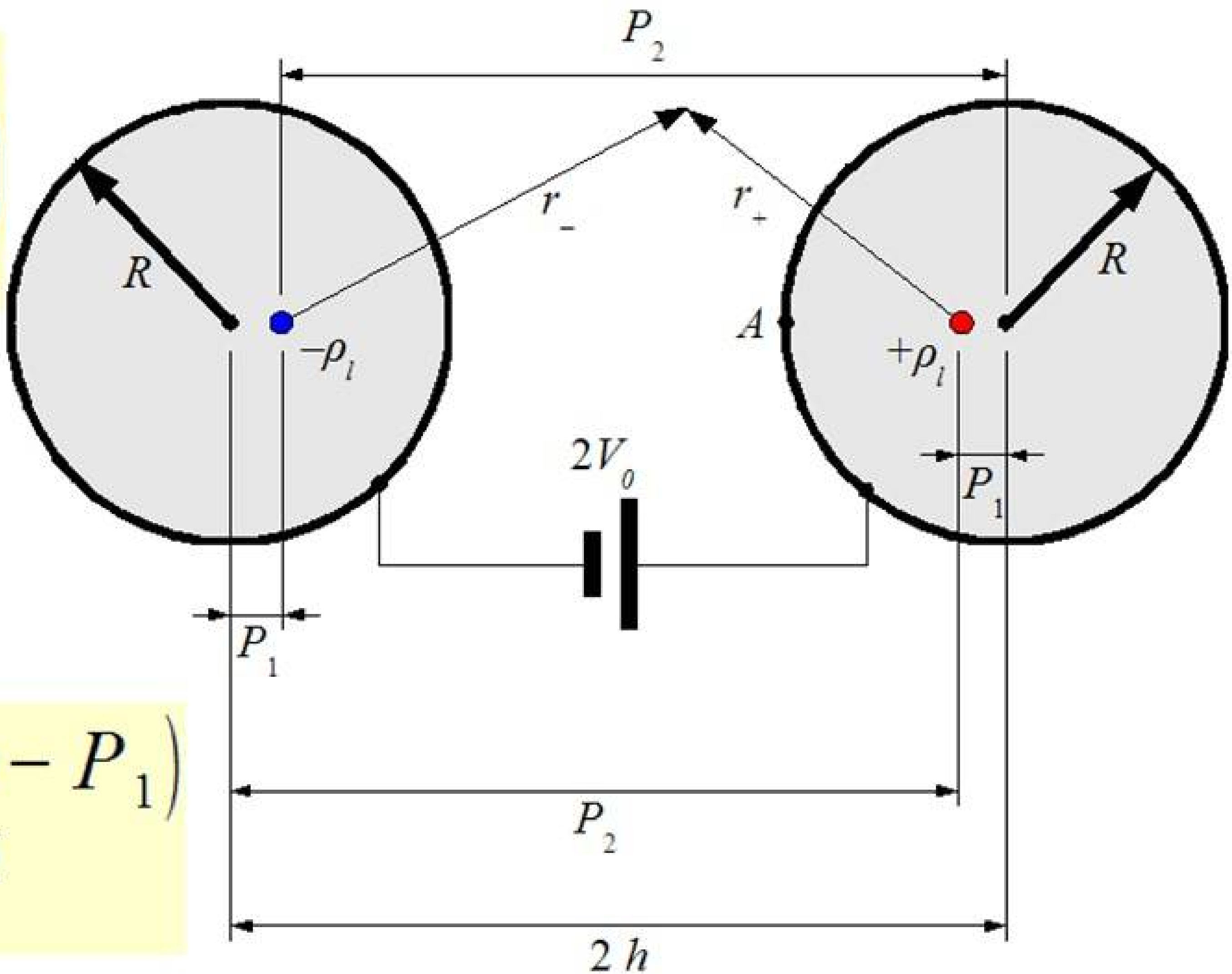


$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cilindros Condutores Paralelos

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$



$$R^2 = P_1 P_2 = P_1\left(2h - P_1\right)$$
$$\Rightarrow P_1 = h - \sqrt{h^2 - R^2}$$

Cálculo da Densidade de Carga

$$P_1 = h - \sqrt{h^2 - R^2}$$

$$\varphi(A) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{2h - R - P_1}{R - P_1}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{2h - R - h + \sqrt{h^2 - R^2}}{R - h + \sqrt{h^2 - R^2}}\right) =$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{h - R + \sqrt{h^2 - R^2}}{R - h + \sqrt{h^2 - R^2}}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{h}{R} + \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}\right) = \mathbf{V_0} \Rightarrow$$

$$\rho_l = \frac{2\pi\varepsilon V_0}{\ln\left(\frac{h}{R} + \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon V_0}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{R}\right)}$$

Resistência e Capacitância

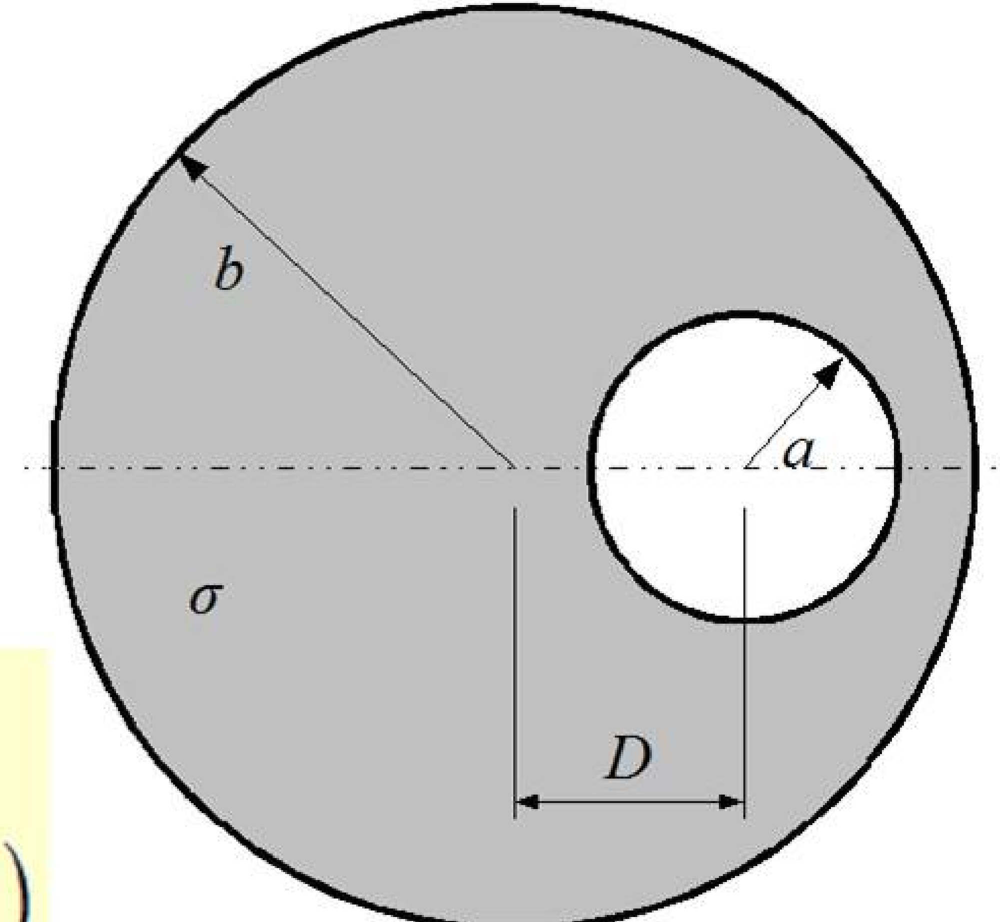
$$C=\frac{\rho_l \ell}{2V_0}=\frac{\pi\varepsilon\ell}{\ln\left(\frac{h}{R}+\sqrt{\frac{h^2}{R^2}-1}\right)}=\frac{\pi\varepsilon\ell}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{R}\right)}$$

$$R=\frac{\ln\left(\frac{h}{R}+\sqrt{\frac{h^2}{R^2}-1}\right)}{\pi\sigma\ell}=\frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{R}\right)}{\pi\sigma\ell}$$

Exemplo: Resistência entre Tubos

Calcular a resistência entre os tubos metálicos a e b.

$$R^2 = P_1 P_2$$



$$a^2 = x\,y$$
$$b^2 = (x+D)(y+D)$$

$a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $D = 3$ cm, $L = 100$ m

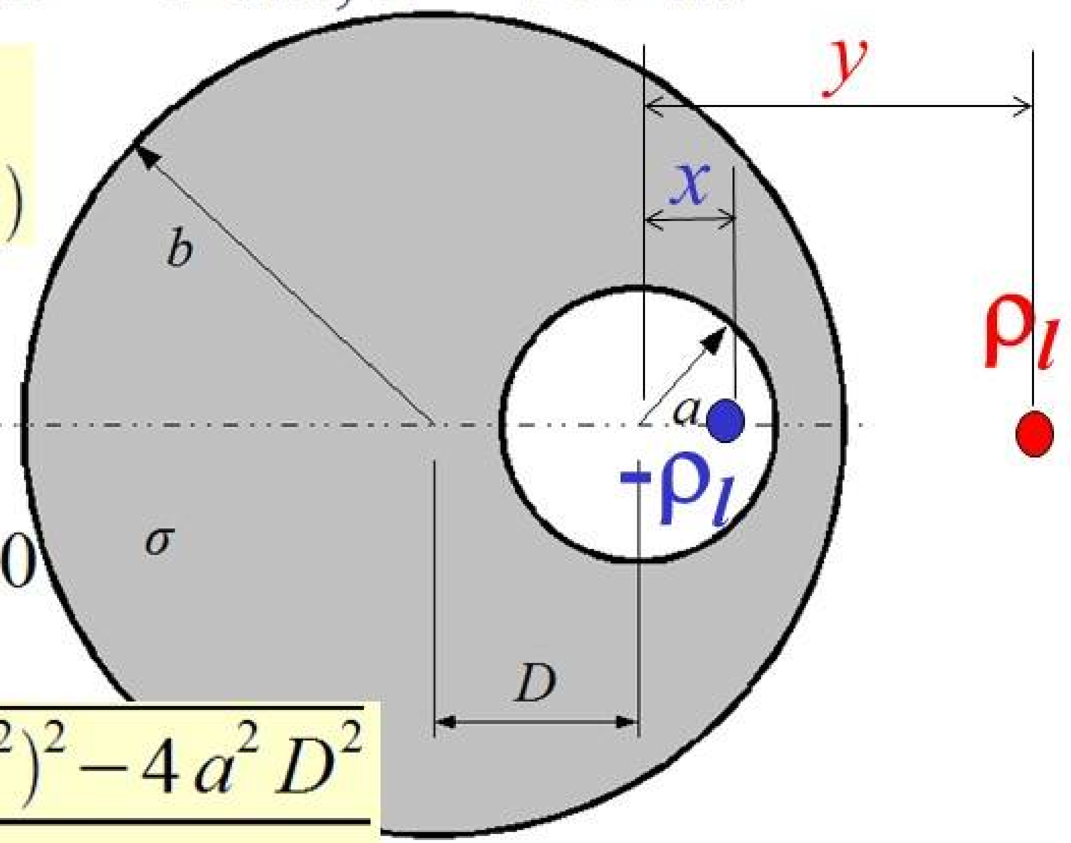
Resistência entre Tubos

$a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $D = 3$ cm, $L = 100$ m

$$a^2 = x\,y$$
$$b^2 = (x + D)(y + D)$$

$$b^2 = (x + D)\left(\frac{a^2}{x} + D\right) \Rightarrow$$

$$D\,x^2 + (a^2 + D^2 - b^2)\,x + D\,a^2 = 0$$



$$x = \frac{b^2 - a^2 - D^2 \pm \sqrt{(b^2 - a^2 - D^2)^2 - 4\,a^2\,D^2}}{2\,D}$$

$$x = 0{,}563\,cm\,;\; y = 7{,}10\,cm$$

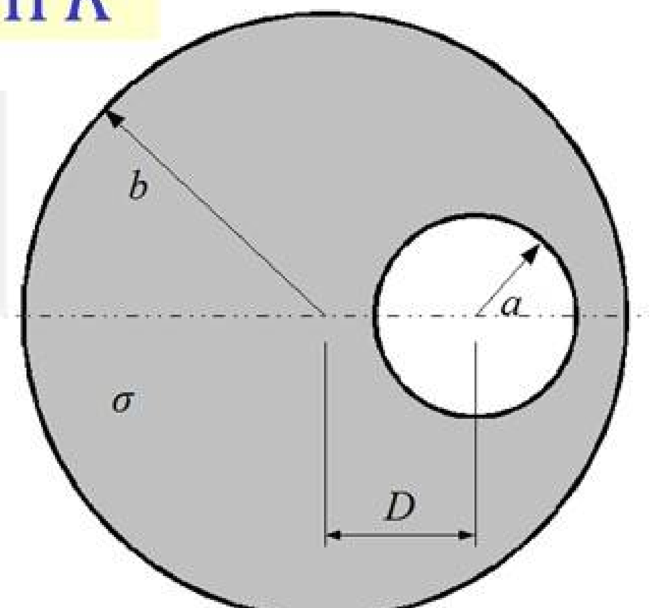
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Resistência entre Tubos

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln K$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_l L}{V_0} \Rightarrow C = \frac{\rho_l L}{\rho_l \ln K}2\pi\varepsilon = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln K}$$

$$RC = \varepsilon/\sigma \Rightarrow R = V_0/I = \frac{\ln K}{2\pi\sigma L}$$



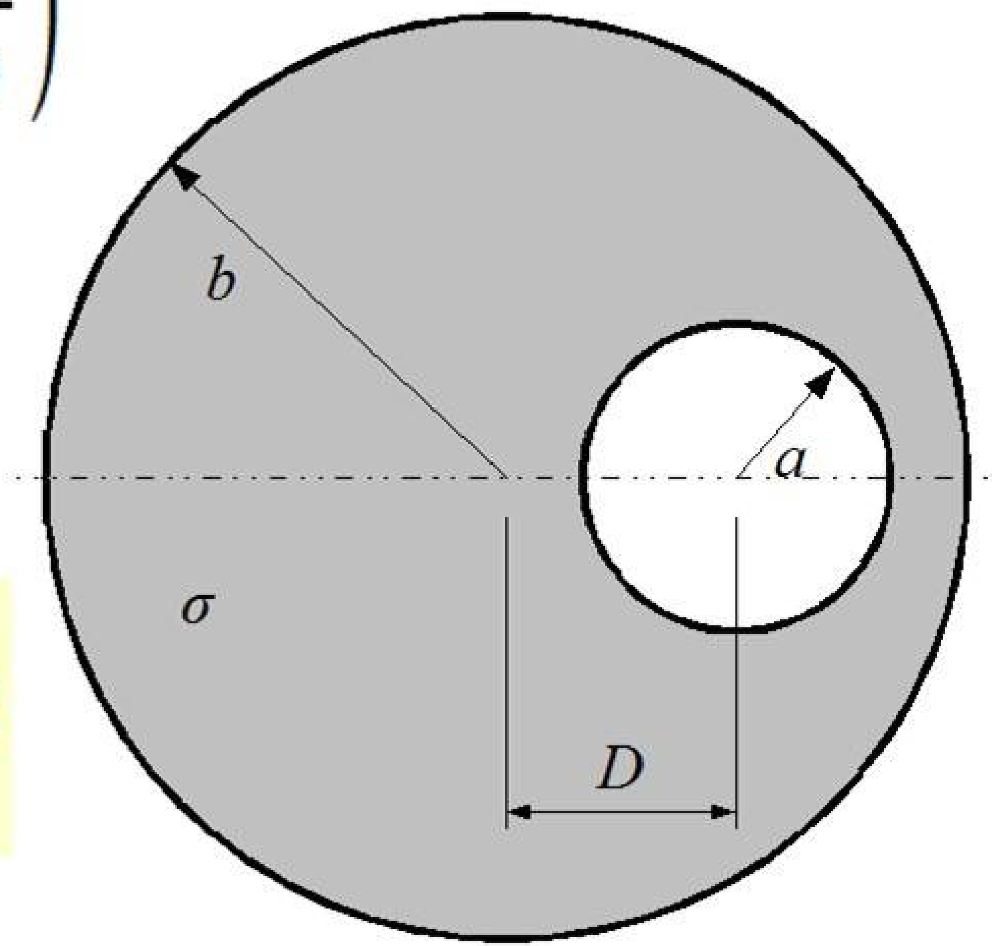
$$\varphi_1 - \varphi_2 = V_0 = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln K$$

Resistência entre Tubos

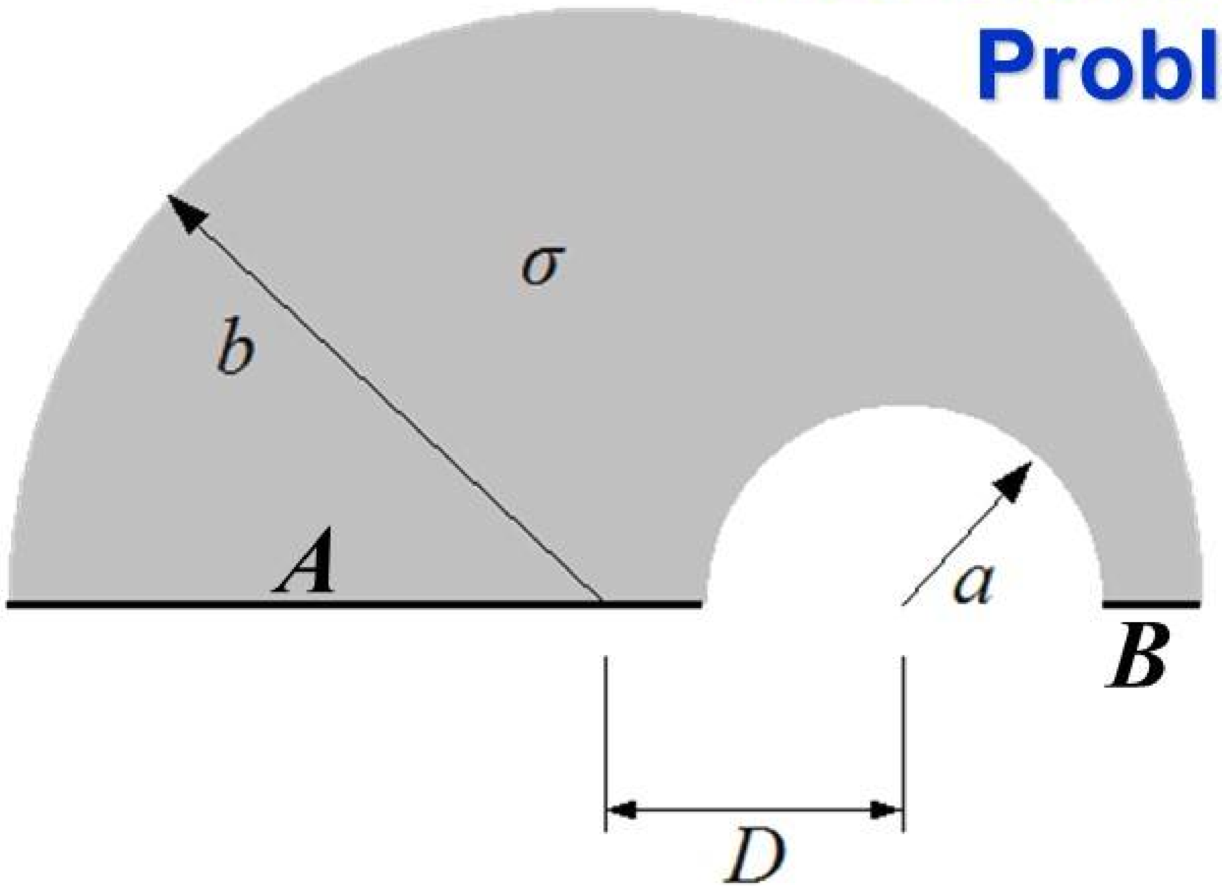
$$\varphi_2 = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{y+D+b}{x+D+b}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{I/L}{2\pi\sigma}\ln\left(\frac{y+a}{x+a}\right)$$

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = 0{,}12\,\Omega$$



Resistência entre Tubos
Problema Dual



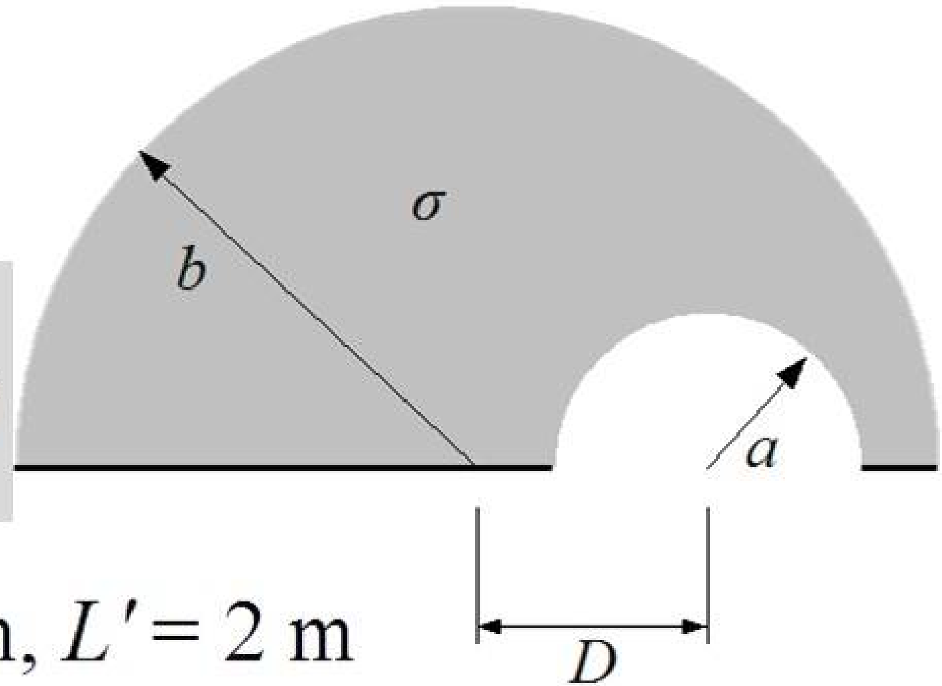
$a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $D = 3$ cm, $L' = 2$ m

Resistência entre Tubos
Problema Dual - *R'*

$$R = \frac{n_s}{n_p}\frac{1}{\sigma L}$$

$$R' = \frac{n'_s}{n'_p}\frac{1}{\sigma L'}$$

$$\left.\begin{aligned} n'_s &= n_p/2 \\ n'_p &= n_s \end{aligned}\right\} R' = \frac{n_p/2}{n_s}\frac{1}{\sigma L'}$$



$$a = 2\text{ cm},\ b = 6\text{ cm},\ D = 3\text{ cm},\ L' = 2\text{ m}$$

$$\frac{n_s}{n_p} = R\sigma L \Rightarrow R' = \frac{1}{R\sigma L}\frac{1}{2\sigma L'} = 210\,\Omega$$