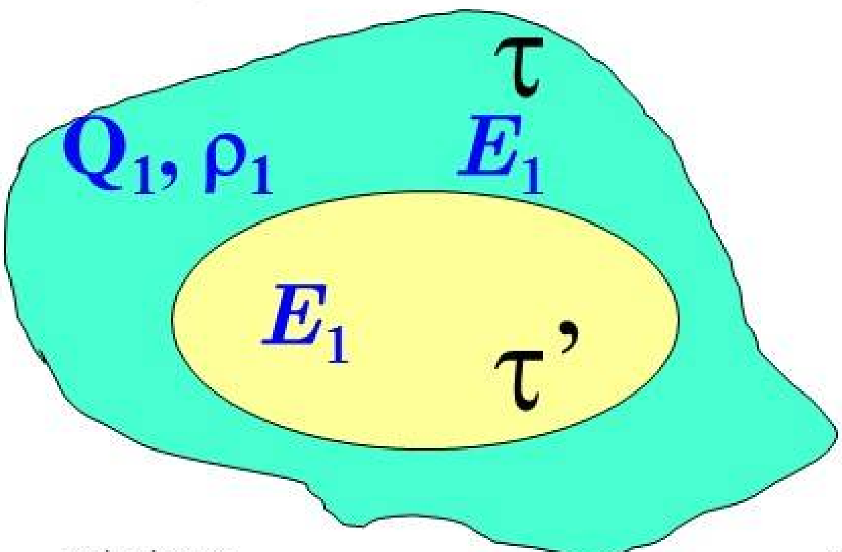
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

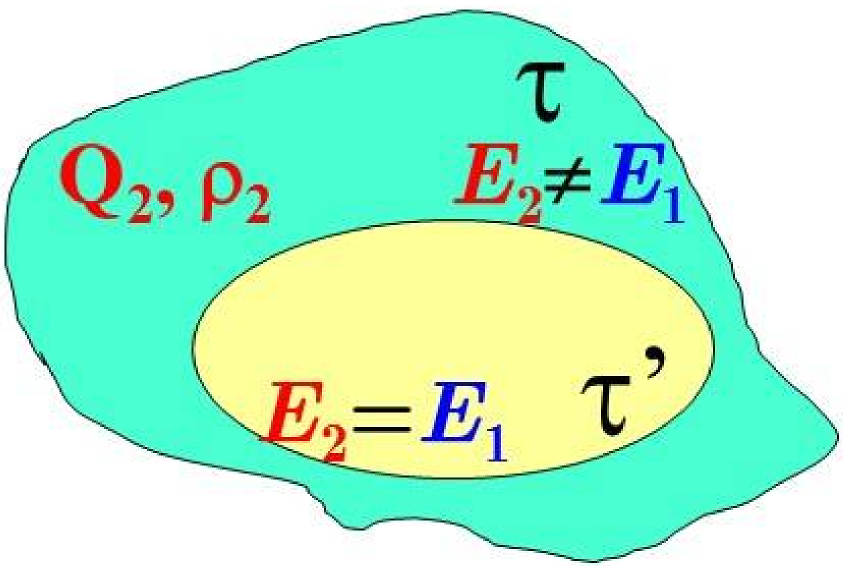
Solução da Equação de Laplace

Método das Imagens

Método das Imagens

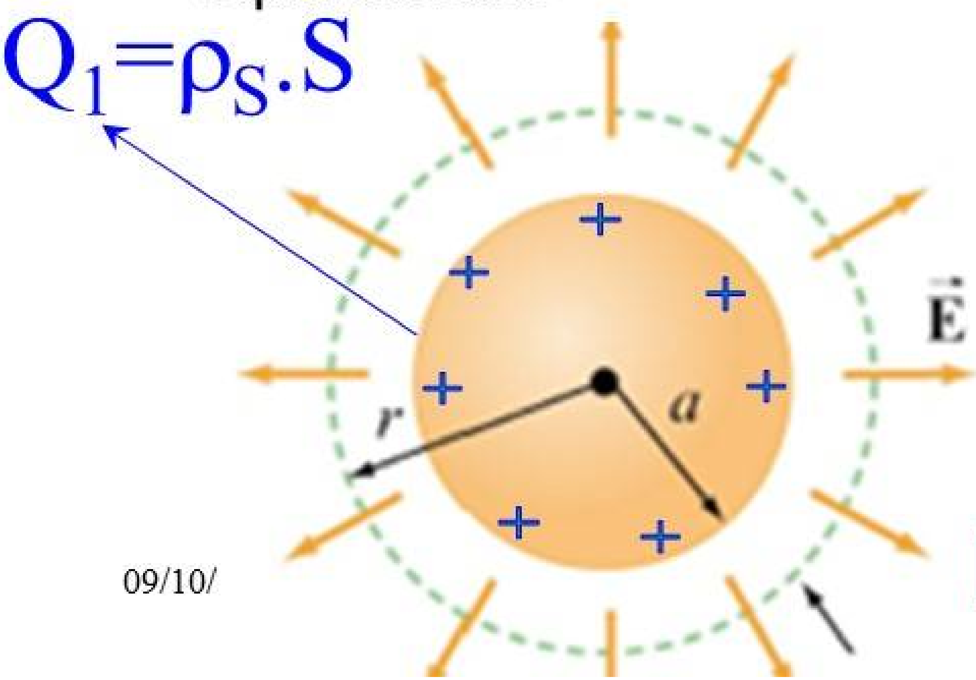
- Princípio:
  - Campo produzido por q_1 ou ρ_1 em parte do espaço pode ser igualmente produzido em todo o espaço por q_2 ou ρ_2 equivalentes

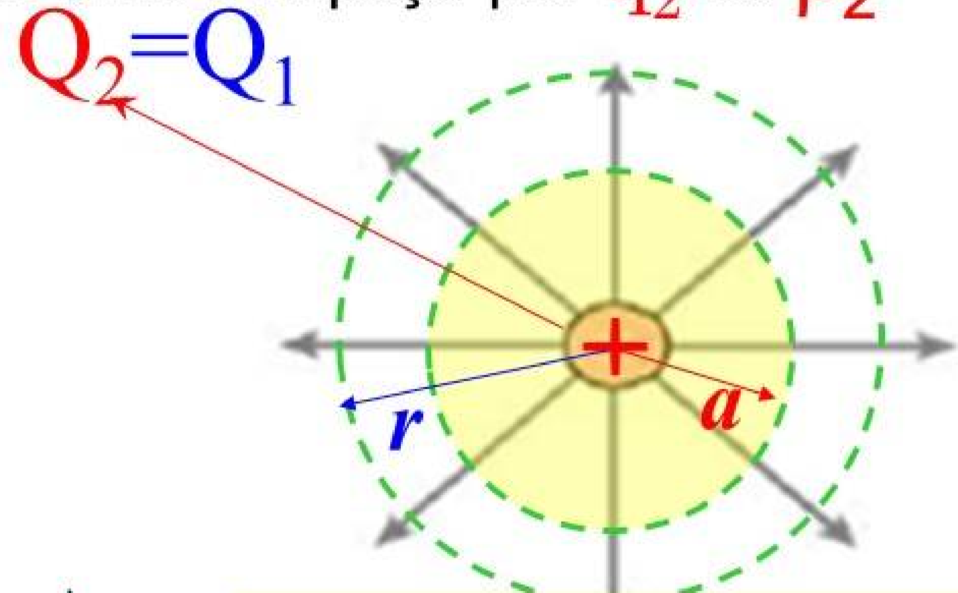




Método das Imagens

- Princípio:
  - Campo produzido por q_1 ou ρ_1 em parte do espaço pode ser igualmente produzido em todo o espaço por q_2 ou ρ_2 equivalentes



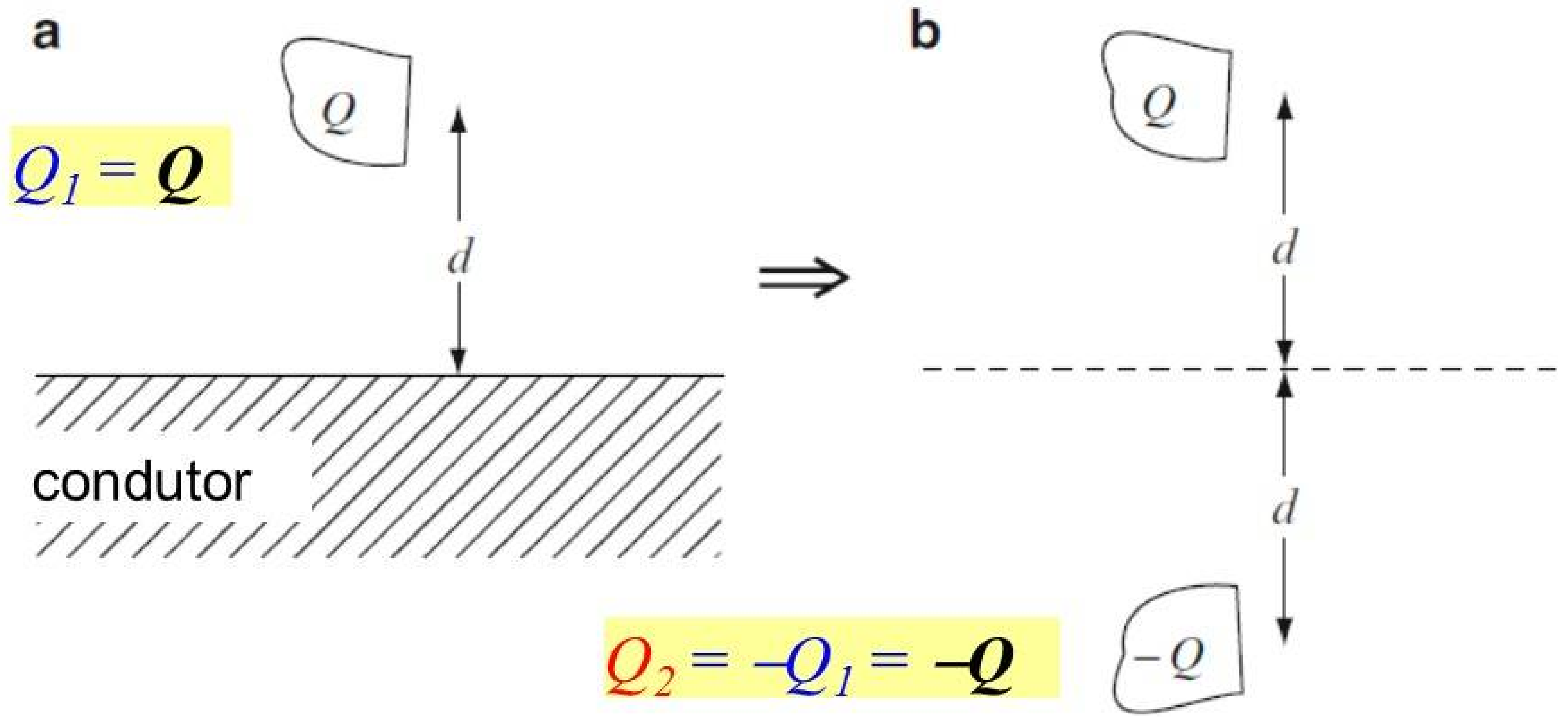


Problema equivalente: mesma solução em $r > a$

Método das Imagens

- Como achar q_2 ou ρ_2 equivalentes ??
- q_1 ou ρ_1 se refletem numa superfície condutora da mesma forma que a luz se reflete num espelho
- Superfície condutora pode ser substituída por carga imagem, q_2 ou ρ_2
- Campo devido às cargas 1 e 2 é calculado

Método das Imagens



Método das Imagens

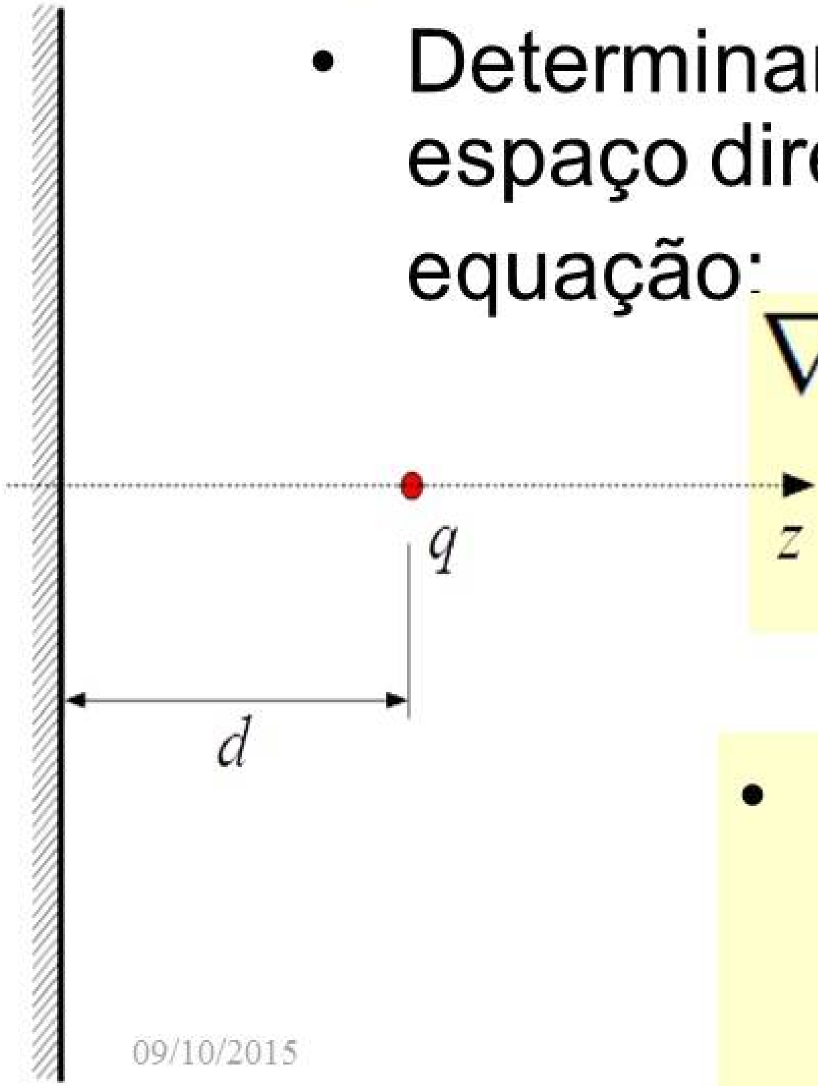
1. A imagem é **igual** à fonte **em modulo**, mas de **sinal oposto**.
2. A geometria é refletida numa **superfície de potencial constante** (equipotencial) como num espelho.
3. Imagem e fonte estão à **mesma distância da superfície** "espelho".
4. **Múltiplas fontes** produzem **múltiplas imagens**, novamente segundo uma superfície espelho.
5. Cargas ou distribuições de carga, únicas ou múltiplas, em face a **múltiplas superfícies espelho**, também produzem **múltiplas imagens**
6. Regras (1) e (3) aplicam-se apenas a superfícies planas. As restantes se aplicam também a superfícies curvas.

Carga próxima a um plano condutor

- Determinar a função potencial φ no semi-espaço direito, $z > 0$, que satisfaz à equação:

$$\nabla^2 \varphi = 0 : z > 0, (x, y, z) \neq (0,0,d)$$

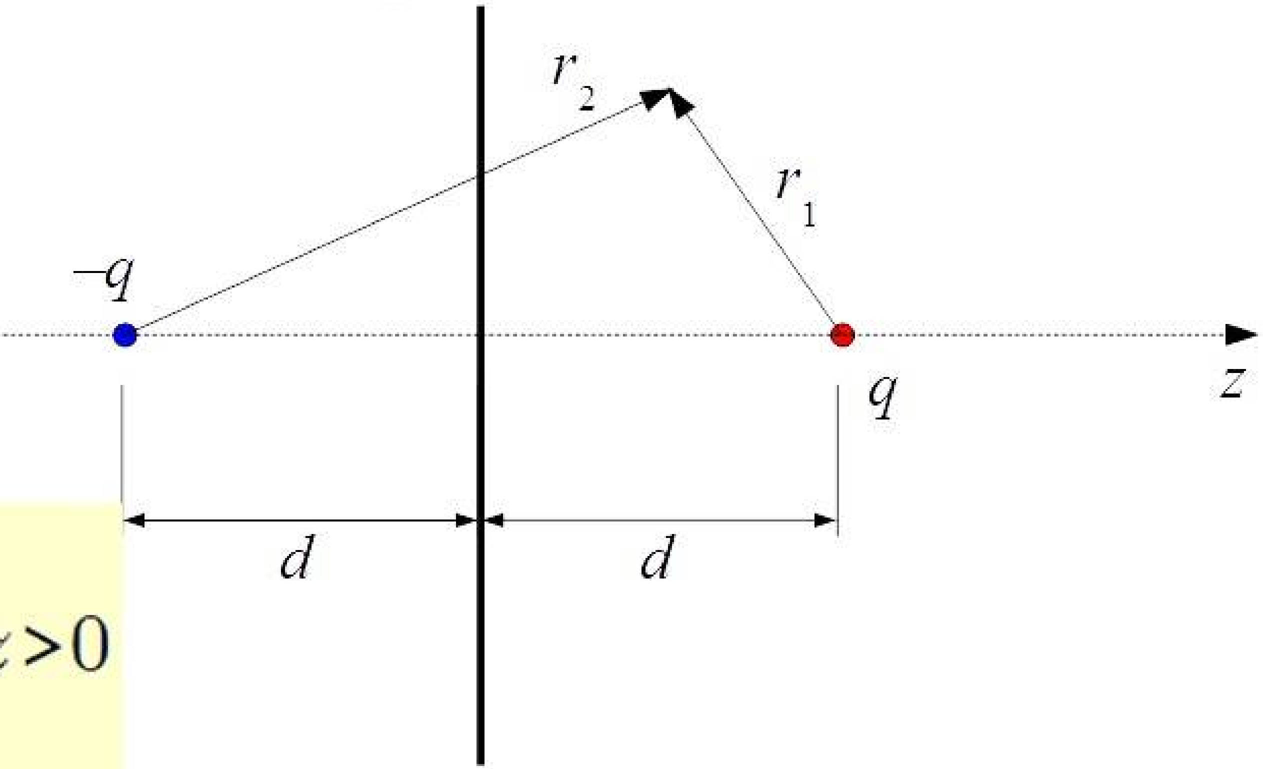
$$\oiint_{\Sigma \supset (0,0,d)} \nabla \varphi \cdot \vec{dS} = -q/\varepsilon$$



- e às condições de contorno
  - $\varphi(\infty) = 0$
  - $\varphi(z=0) = 0$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Carga próxima a um plano condutor



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_2} \qquad z>0$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

Campo Elétrico

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r_1^2}\hat{u}_{r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon r_2^2}\hat{u}_{r_2}\qquad z>0$$

ou

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{z-d}{\left[(z-d)^2+r^2\right]^{3/2}}-\frac{z+d}{\left[(z+d)^2+r^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{u}_z+$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{r}{\left[(z-d)^2+r^2\right]^{3/2}}-\frac{r}{\left[(z+d)^2+r^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{u}_r$$

Densidade de Carga no Plano

$$\vec{E}(z=0)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{-d}{\left[d^2+r^2\right]^{3/2}}-\frac{d}{\left[d^2+r^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{u}_z+$$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{r}{\left[d^2+r^2\right]^{3/2}}-\frac{r}{\left[d^2+r^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{u}_r=$$

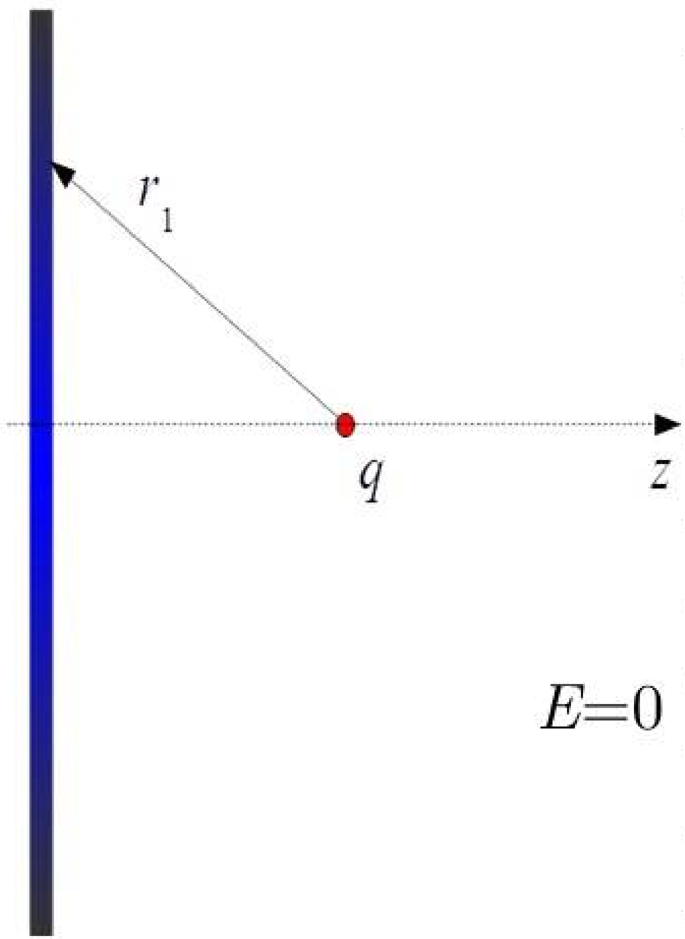
$$=\frac{-q}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{2d}{\left[d^2+r^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{u}_z=\frac{-qd}{2\pi\varepsilon r_1^3}\hat{u}_z$$

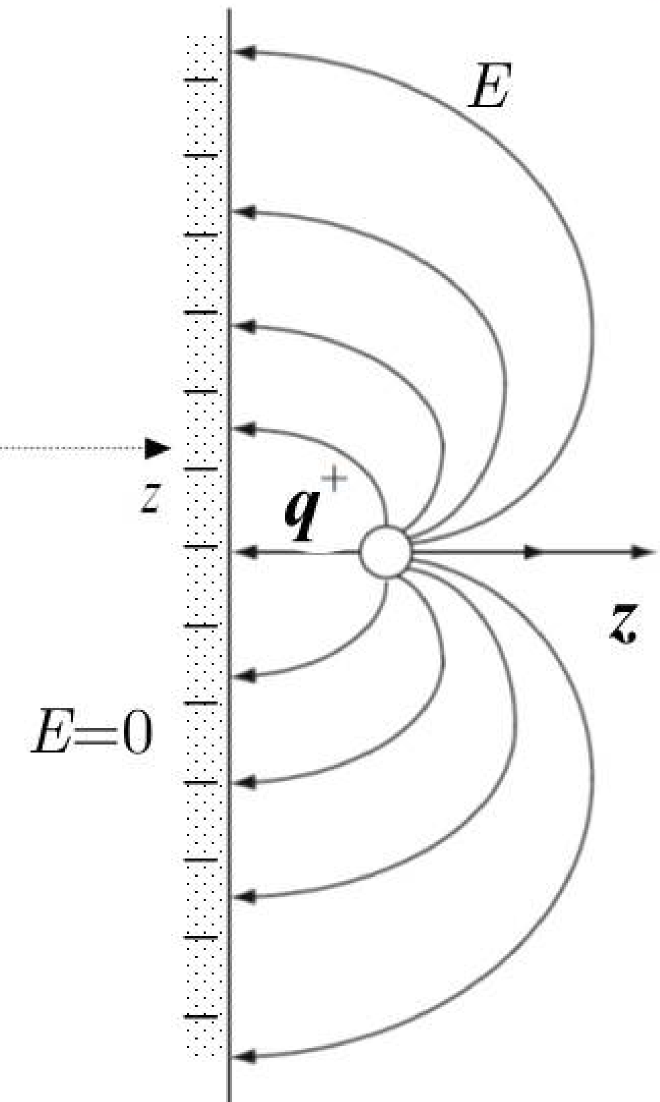
$$\rho_s=D_z(z=0^+)=\frac{-qd}{2\pi r_1^3}$$

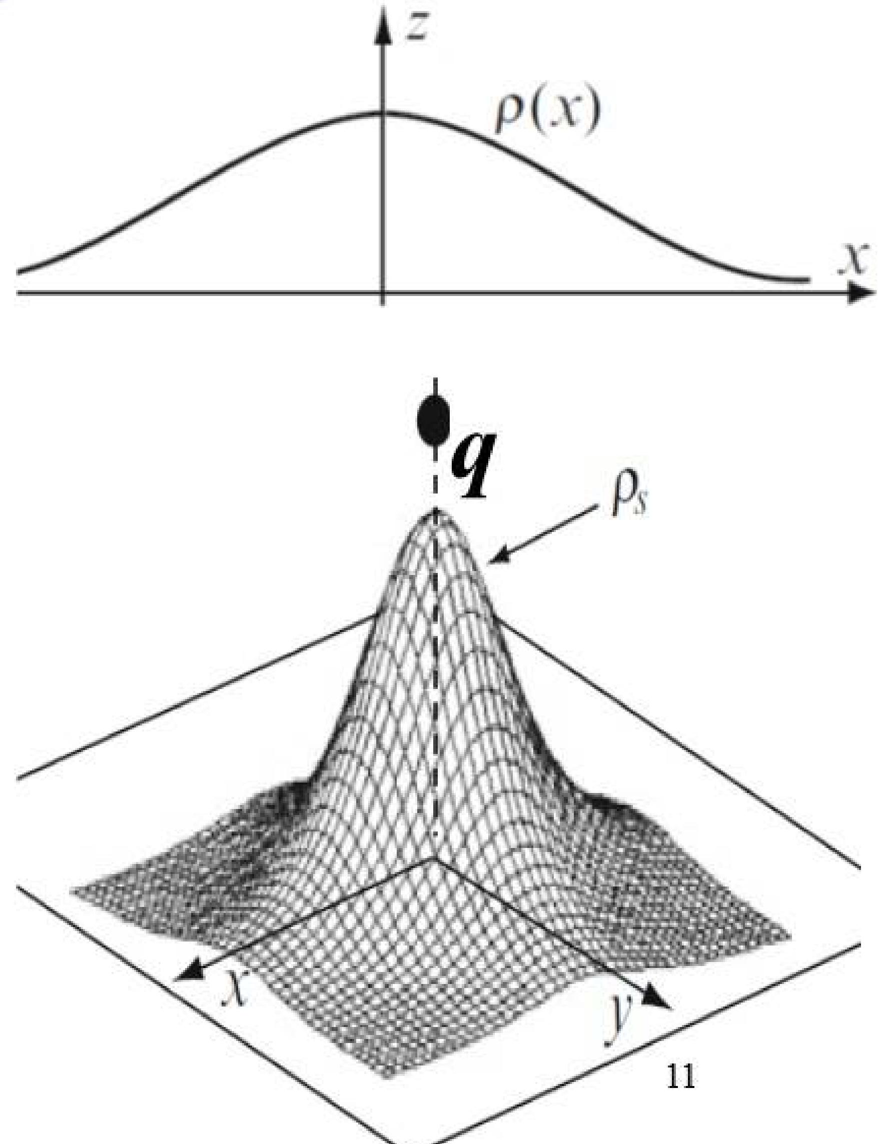
$$Q_{plano}=\iint\rho_s\,dS=-q$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Densidade de Carga no Plano

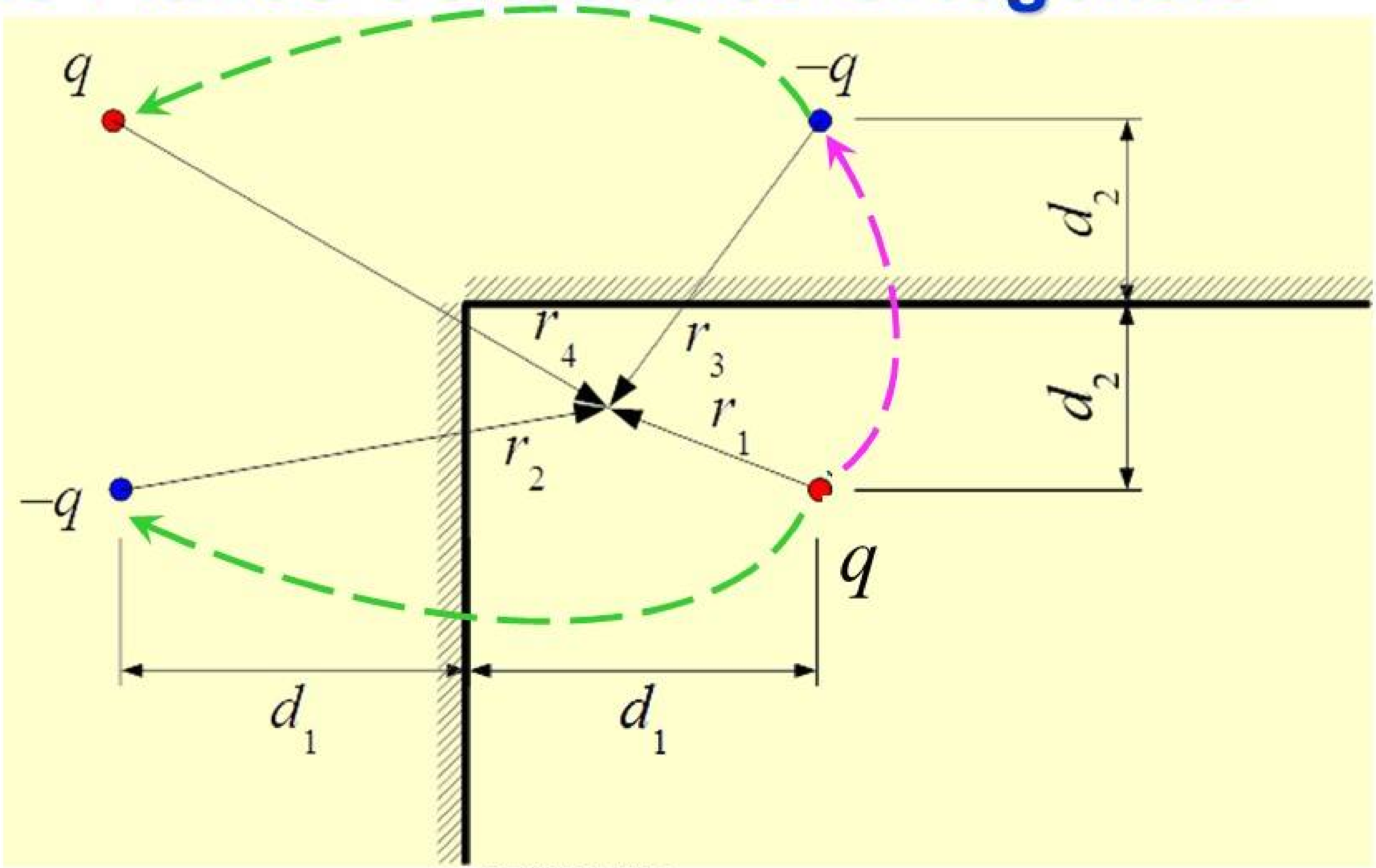






ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

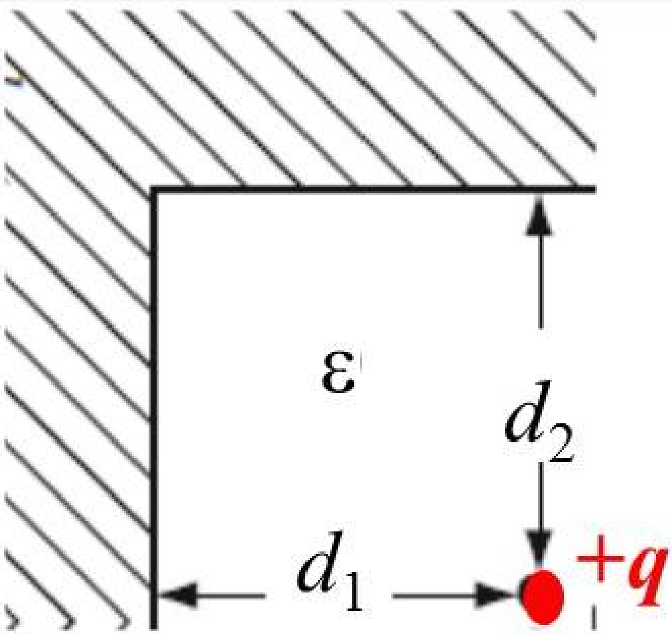
Dois Planos Condutores Ortogonais

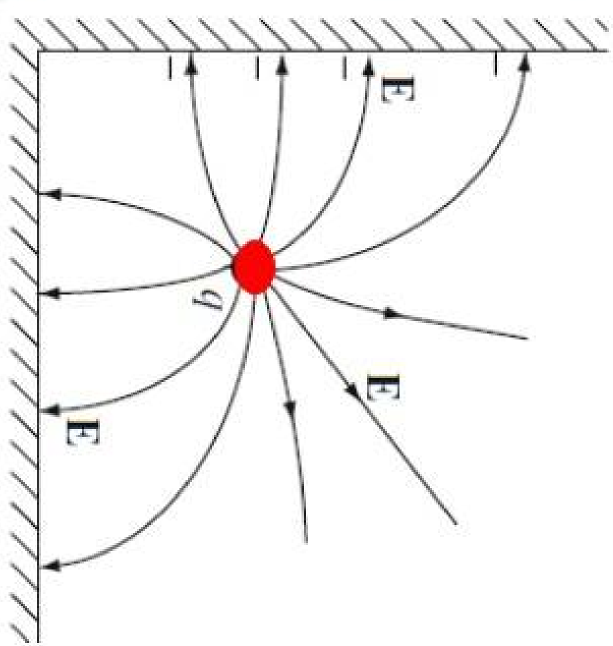


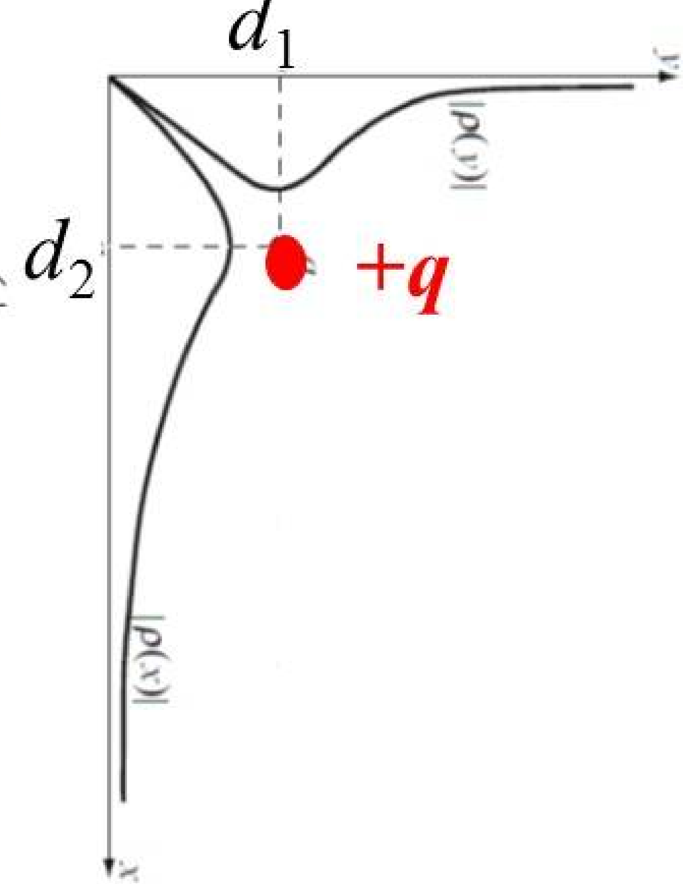
Dois Planos Condutores Ortogonais

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{r_i} \quad x>0, y>0$$

$$q_i = \pm q; \quad r_i = \sqrt{(x \mp d_1)^2 + (y \mp d_2)^2 + z^2}$$

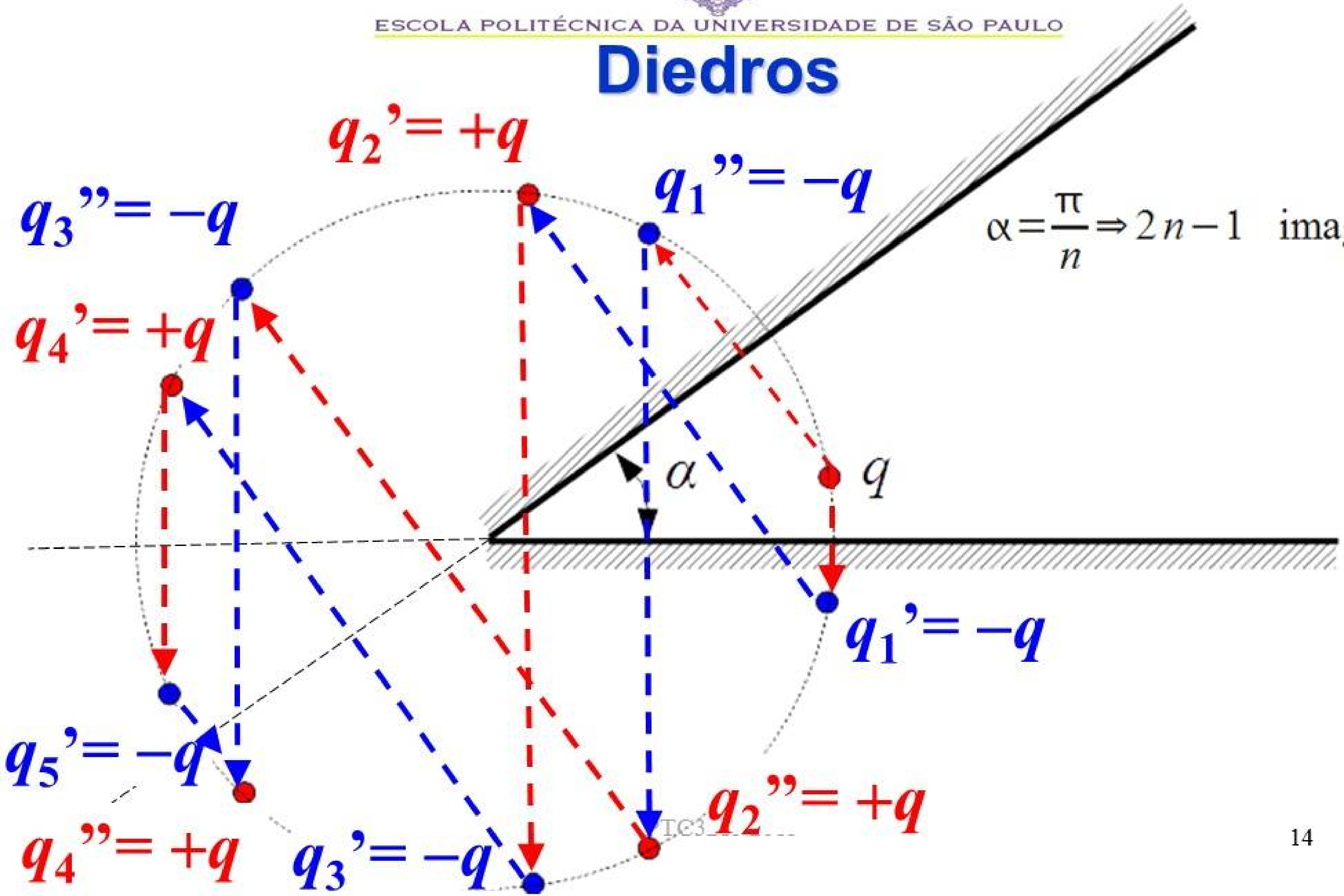






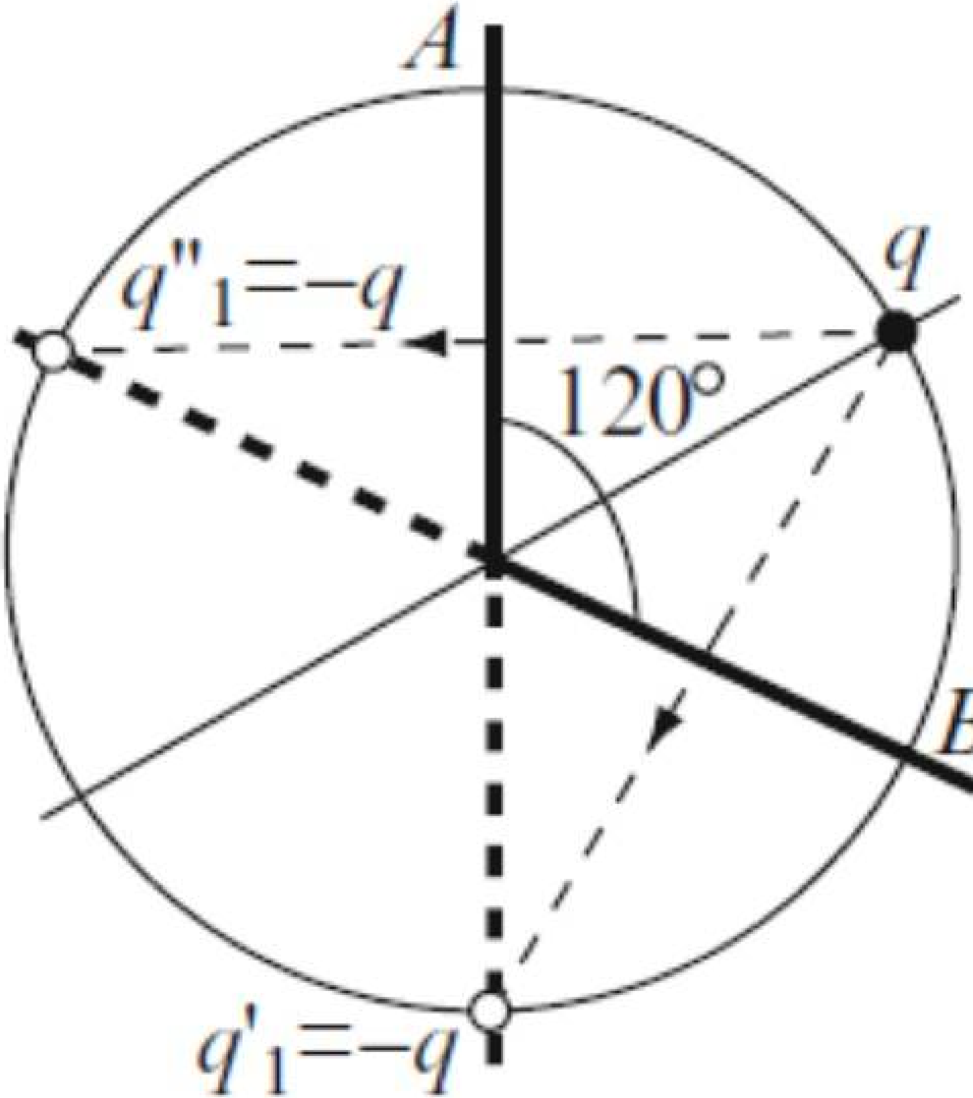
Diedros

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \Rightarrow 2n-1 \quad \text{imagens}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Diedros



n não inteiro