ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo de Correntes Estacionárias

Campo Eletrostático

Função Potencial

Resistência e Capacitância

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Função Potencial

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{l}$$

- Função **Escalar**: ajuda no cálculo dos campos vetoriais
- Representa o **Trabalho** realizado (por unidade de carga) para trazer q de P_0 a P
- Sinal **negativo**: Trabalho realizado **contra as forças do campo** E (Coulomb)

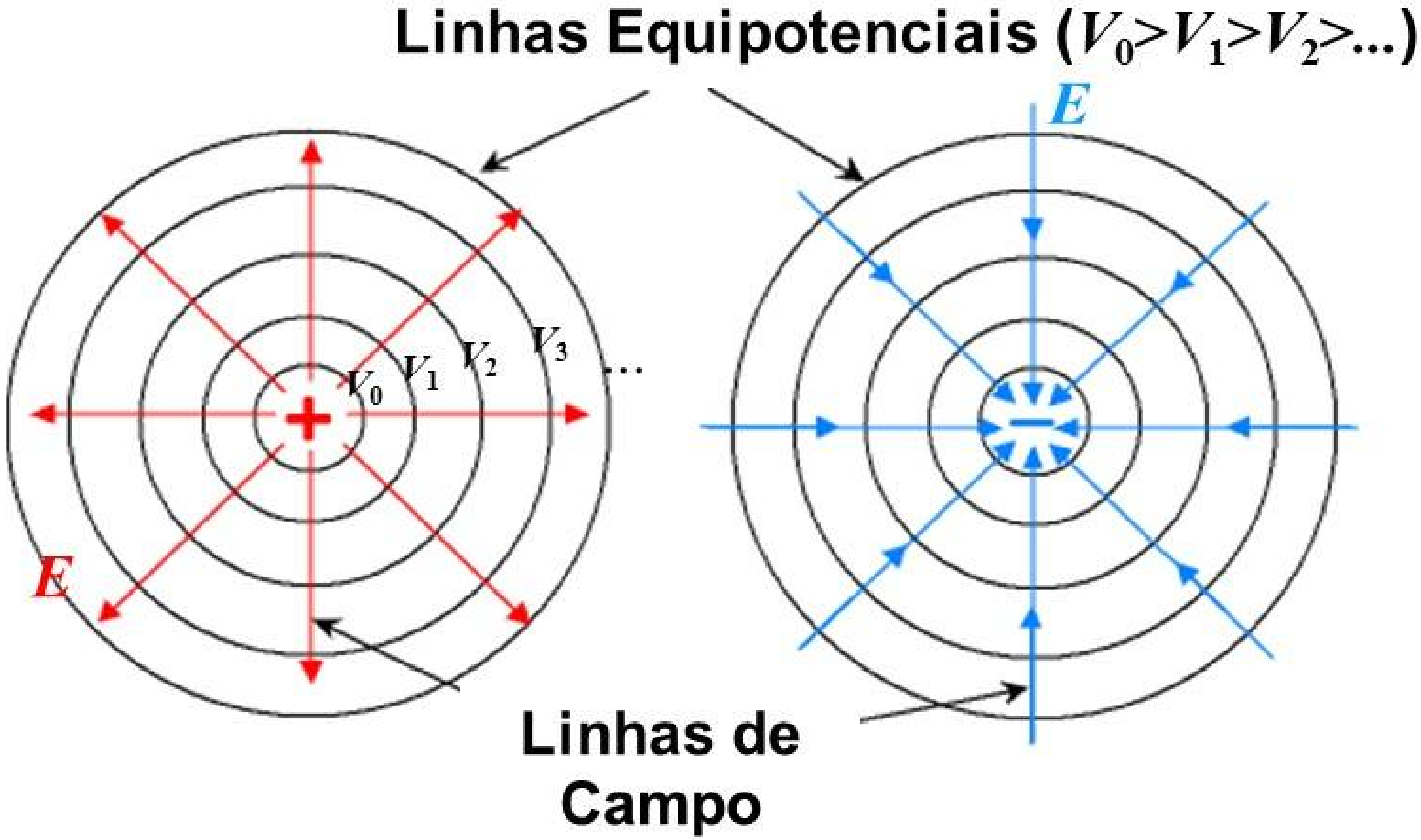
Função Potencial

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

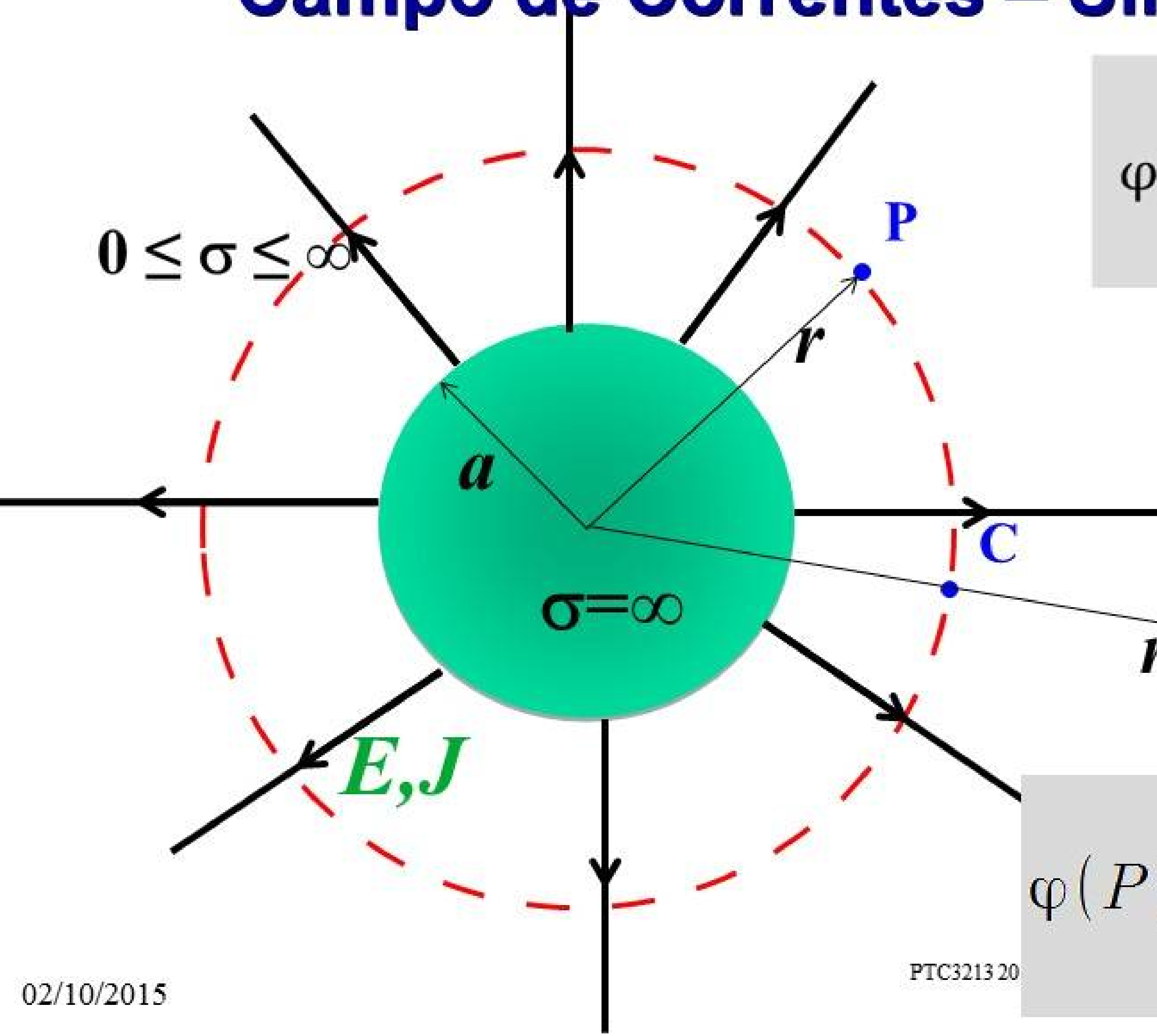
- **Linhas Equipotenciais** de $\varphi \rightarrow$ Linhas de φ **constante**
- **Linhas de Campo** $\rightarrow$ **Linhas *tangentes* ao Campo Elétrico**
- Número de linhas de campo numa dada área = Fluxo
- **Linhas Equipotenciais $\perp$ Linhas de campo**

Superfície de condutores perfeitos $\rightarrow$ superfície equipotencial

Linhas Equipotenciais



Campo de Correntes – Simetria Esférica



$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\,\hat{u}_r$$

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Resistência de contato entre esfera e meio

$$\varphi(P_0 \to \infty) = 0$$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{I}{4\pi\sigma \boldsymbol{r}}$$

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{I}{4\pi\sigma a}$$

$$R = \frac{\varphi(\boldsymbol{a})}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

Capacitância entre a esfera e o meio ao redor

Carga total acumulada na superfície da esfera:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon\overrightarrow{E} = 0 \Longrightarrow Q = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{\varepsilon I}{\sigma}$$

$$C = \frac{Q}{\varphi(a)} = 4\pi\varepsilon a$$

Analogia entre Campos de Correntes e Eletrostático

Campo de correntes	Campo eletrostático
$\vec{E}$	$\vec{E}$
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$
$\vec{E}=-\nabla\varphi$	$\vec{E}=-\nabla\varphi$
$\vec{J}$	$\vec{D}$
$\nabla\cdot\vec{J}=0$	$\nabla\cdot\vec{D}=0 \quad (\ \rho_v=0\ )$
$\nabla^2\varphi=0$	$\nabla^2\varphi=0 \quad (\ \rho_v=0\ )$
$\vec{J}=\sigma\vec{E}$	$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$
σ	ε
$G=1/R$	$C=1/S$

Analogia entre Campos de Correntes e Eletrostático

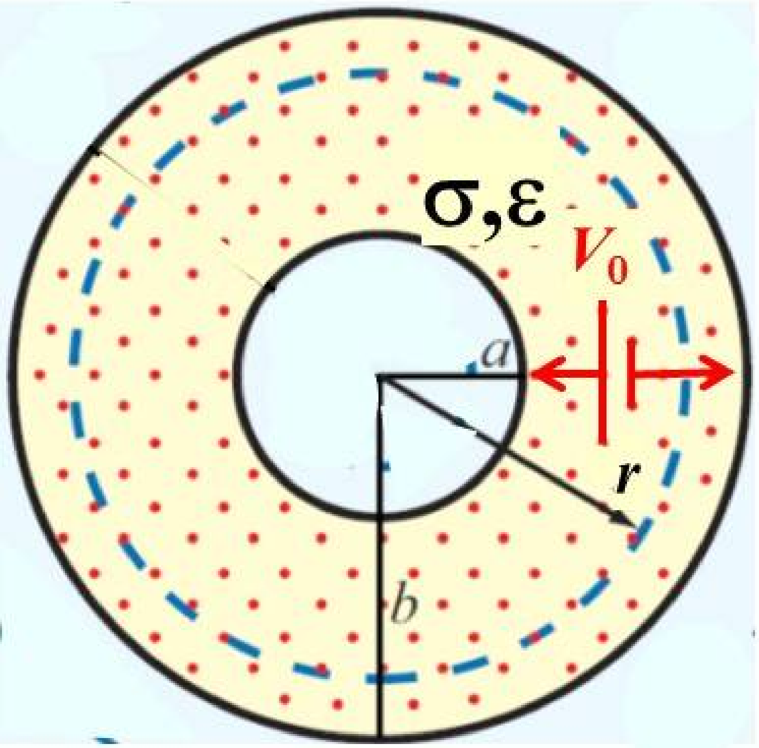
Campos Eletrostáticos → Levantamento experimental é difícil
Campos de Correntes → Mais fáceis de realizar experimentalmente (cubas eletrolíticas)

Em ambos:

- **Campos ortogonais à superfície dos eletrodos ($\sigma \to \infty$)**
- **Campo nulo no interior dos eletrodos**
- **Superfície dos eletrodos = Superfície Equipotencial**

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{V}{I} = \frac{V}{\iint_S \sigma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{S}} \\ C &= \frac{Q}{V} = \frac{\iint_S \varepsilon \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{S}}{V} \end{aligned}\right\} \quad RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Campo entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas



$$\varphi_a = V_0 \qquad \varphi_b = 0$$

$$V_0 = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\varepsilon\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

Campo de Fontes Puntiformes

Fonte Puntiforme:

- pequena esfera alimentada por fio finíssimo e isolado do meio
- Esfera condutora carregada

- Campo: simetria esférica
- Ponto da fonte: ponto singular $\rightarrow$ $r = 0 \rightarrow \quad \varphi \rightarrow \infty$

$$\varphi(P) = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

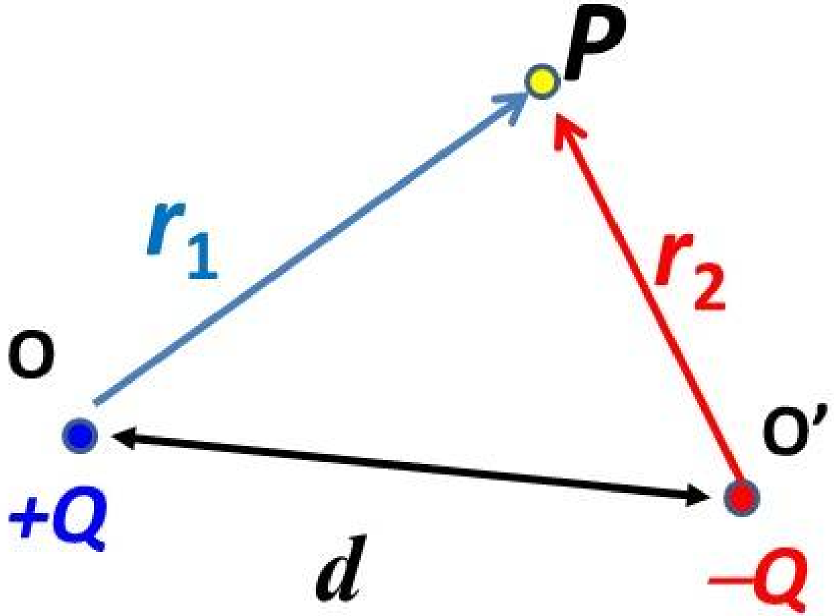
$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

Superfícies Equipotenciais: esferas concêntricas; diferença de potencial entre r e ∞

Campo de Fontes Puntiformes

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

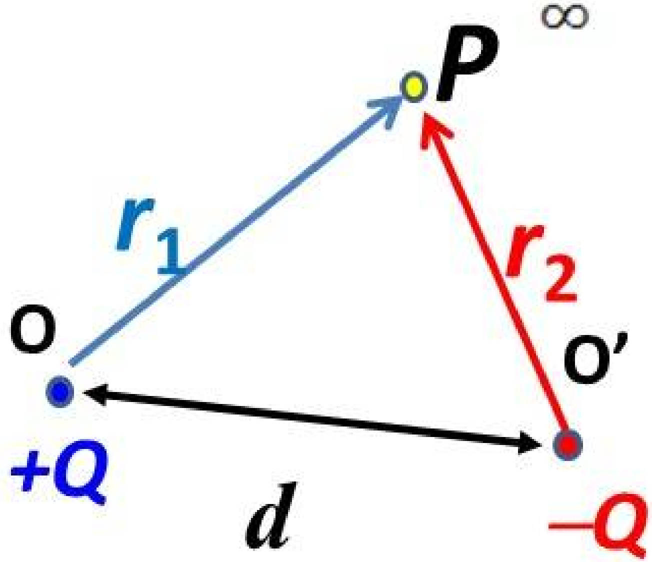
$$\varphi(P_1) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$



$$\varphi(P_2) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

Campo de Fontes Puntiformes

$$\varphi(P) = -\int_{\infty}^{P} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) \cdot d\vec{l} = \varphi_1(P) + \varphi_2(P)$$



$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon r_2}$$

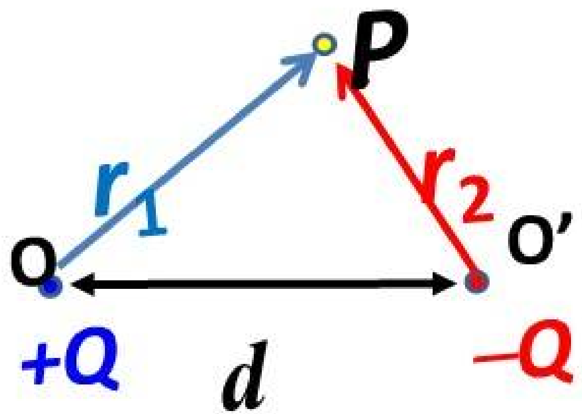
$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Superfícies Equipotenciais:

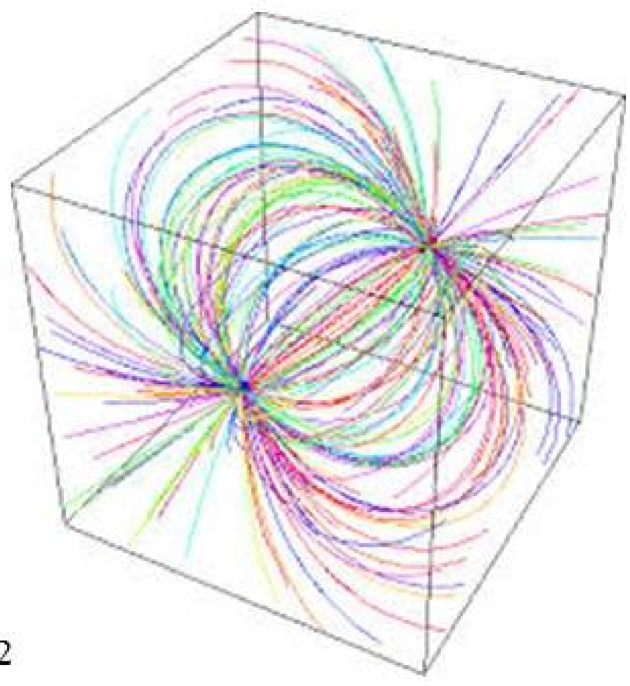
$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{constante}$$

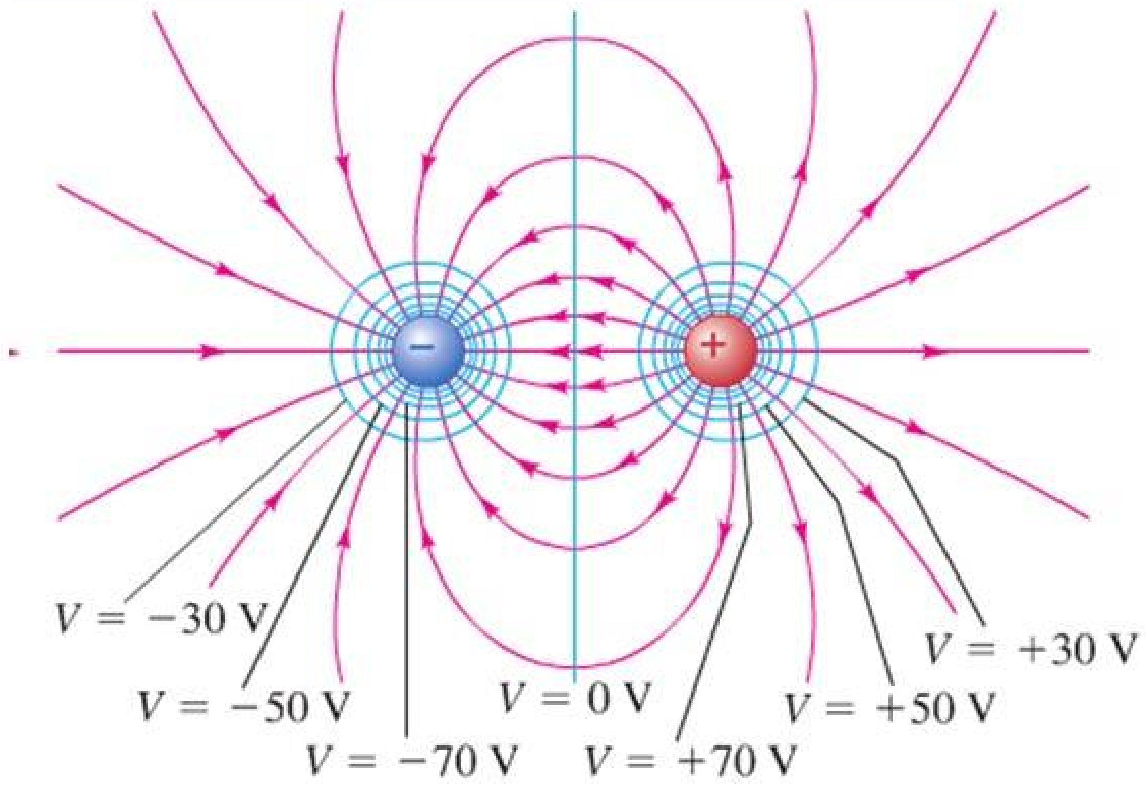
$r_1 = r_2 \rightarrow$ **ponto médio de OO'** $\rightarrow$ **φ=0**

Campo de Fontes Puntiformes



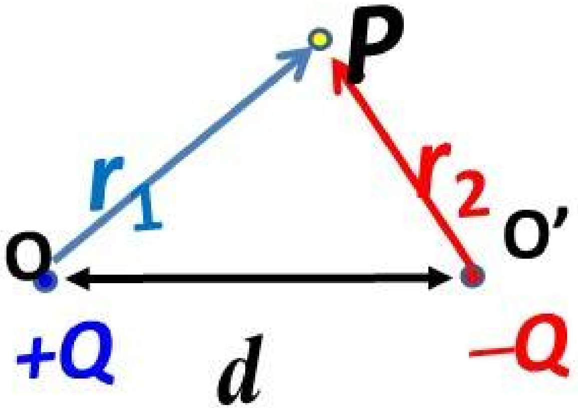
$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



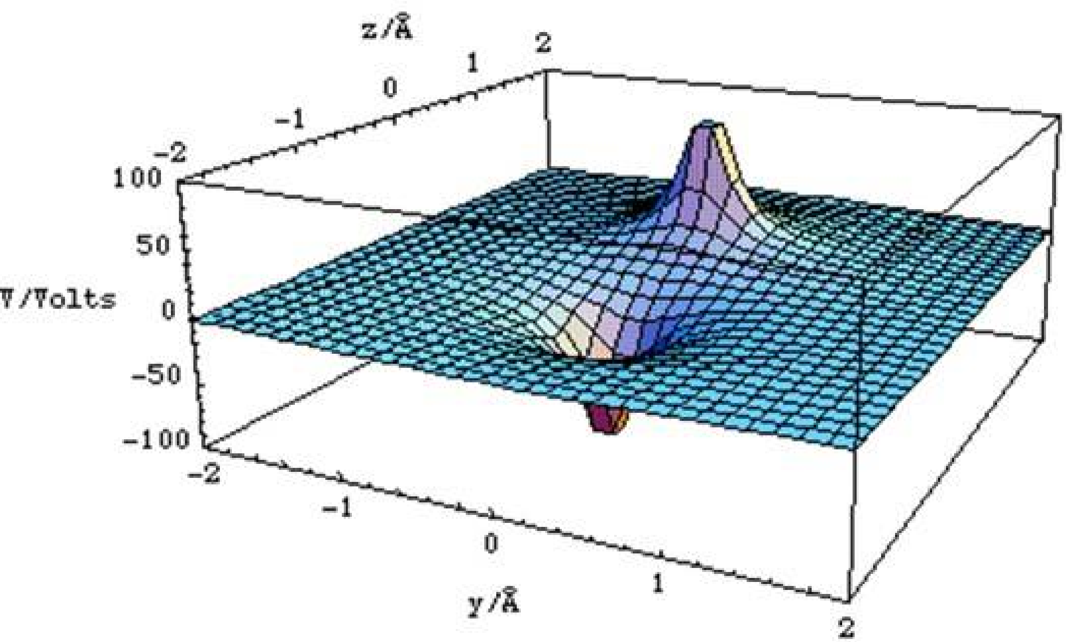


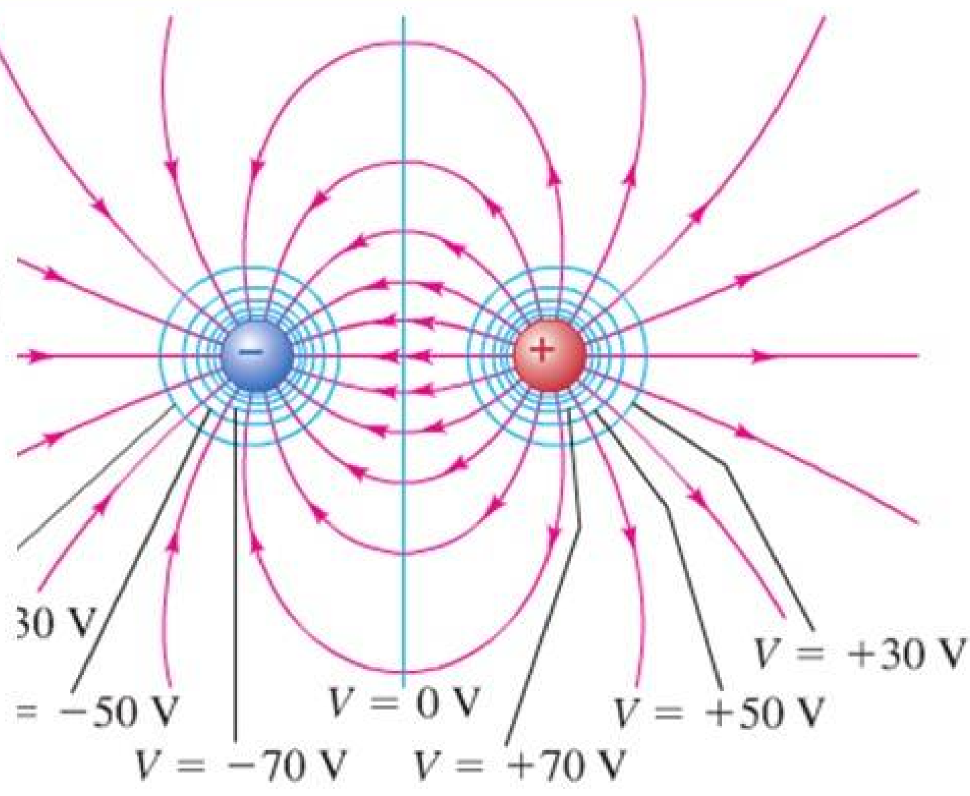
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo de Fontes Puntiformes

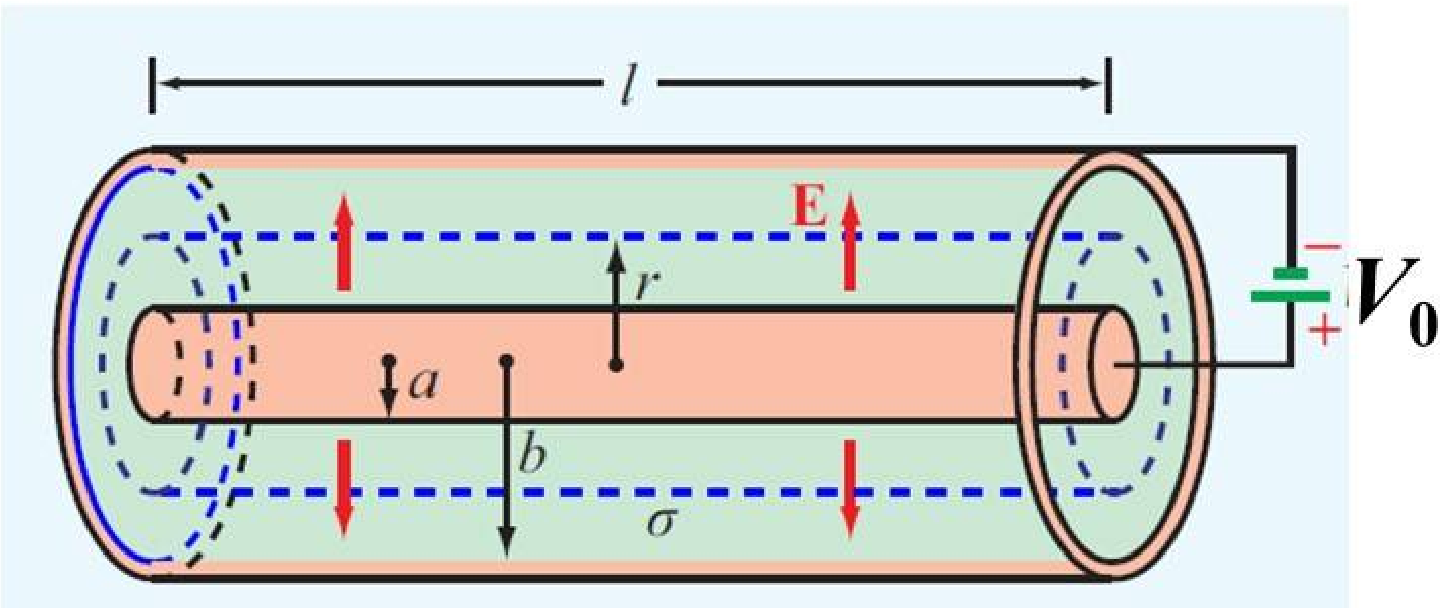


$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$





Campo entre dois condutores cilíndricos
Cabo Coaxial

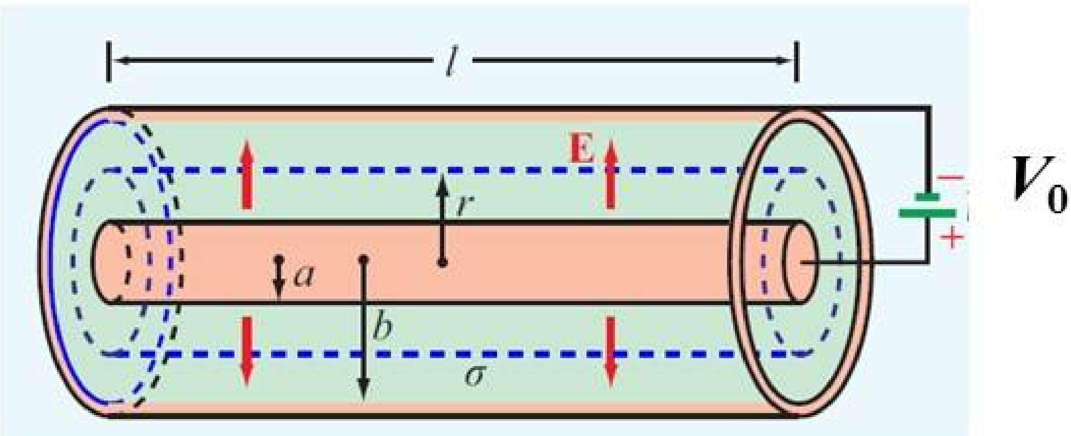


$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r l}\hat{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r l}\hat{u}_r$$

$$\varphi(r) - \varphi(b) = -\int_b^P \vec{E}\cdot dr = \frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{r}$$

Campo entre dois condutores cilíndricos
Cabo Coaxial

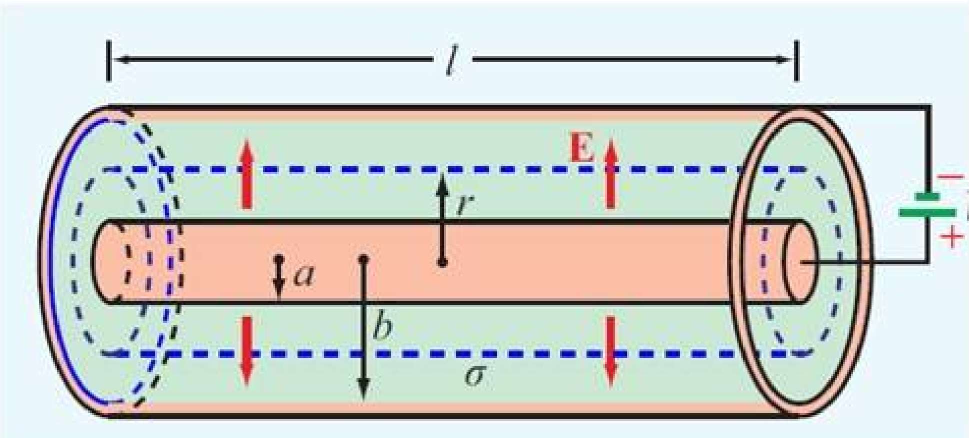


$$R = \frac{V_0}{I}$$

$$\text{ddp} = V_0 = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{a}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{a}$$

Campo entre dois condutores cilíndricos
Cabo Coaxial



$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon\frac{I}{2\pi\sigma r l}\hat{u}_r$$

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

$$\iint_{\text{sup.cil.}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r l D = \varepsilon\frac{I}{\sigma} = Q$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$\varphi(r) - \varphi(b) = \frac{V_0}{\ln{}^{b}/_{a}}\ln\frac{b}{r}$$

Determinação da Função Potencial

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho_v \qquad \nabla \cdot (-\varepsilon\nabla\varphi) = \rho_v$$

Para meios lineares e homogêneos:

$$\varepsilon\nabla \cdot \nabla\varphi = -\rho_v$$

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

Eq. Poisson

Determinação da Função Potencial

Se $\rho_V = 0$:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Eq. Laplace

Qualquer região condutora homogênea:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\sigma \vec{E}\right) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

Operador Laplaciano ∇^2

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

Eq. Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Coordenadas Cartesianas

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Significado Físico do Laplaciano

φ, φ_0

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi \, dx \, dy \, dz$$

Taylor a partir de φ_0:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_0 + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_0 x + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_0 y + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_0 z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \cdots$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{a^3}\left[\varphi_0 a^3 + \frac{a^5}{24}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_0 + \cdots\right]$$

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 \cong \frac{a^2}{24}(\nabla^2 \varphi)_0$$

➡ **Diferença entre o potencial num ponto e o seu valor médio numa vizinhança infinitesimal**

Significado Físico do Laplaciano

$$\bar{\varphi} - \varphi_0 \cong \frac{a^2}{24}(\nabla^2 \varphi)_0$$

φ médio nas vizinhanças de um campo E ou J sem cargas é igual a φ nesse ponto.

Nas regiões regulares do campo, sem Q, φ não passa por máximos ou mínimos