ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo de Correntes Estacionárias
Campo Eletrostático
Função Potencial
Resistência e Capacitância

Eq. Maxwell – Campos Estacionários

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \qquad \vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campos de Correntes Estacionárias em Meios condutores (Eletrocinética)

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^{i}\right)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo Eletrostático

Campo Eletrostático:

Campo criado por cargas estacionárias

Em condutores, se $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v = 0$$

Regime Estático: *E*≠0 somente em dielétricos perfeitos, σ=0

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Eletrostática

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad \Longleftrightarrow \quad \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau = Q$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Teorema de Stokes

Rotacional de um vetor – Significado Físico

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{n} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \left(\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \right)$$

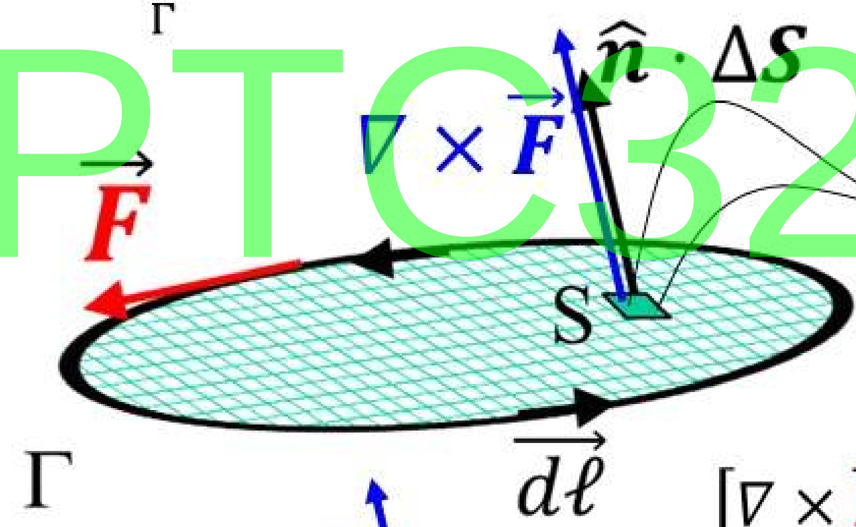
$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- O nome "rotacional" foi adotado porque, num certo sentido:
- $\nabla\times$***F***(x,y,z) descreve a **rotação do campo *F* no ponto (*x, y, z*)**
- $\nabla\times$***F*** pode ser interpretado como uma **medida do movimento angular** de um fluido
- Quando $\nabla \times$ ***F*** = 0, dizemos que ***F*** é irrotacional.

Teorema de Stokes

Rotacional de um vetor – Significado Físico

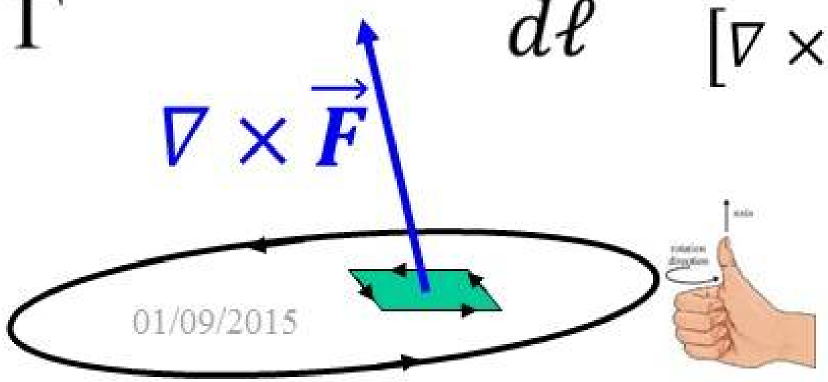
$$W = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$ ⇨ Trabalho para arrastar um corpo ao longo de Γ



$$\Delta W = \oint_{\Delta\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1,..4} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Delta\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$[\nabla \times \vec{F}] = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta S}$$ ⇨ $$\Delta W = [\nabla \times \vec{F}] . \Delta S$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

⇨ Circuitação de ***F*** sobre Γ ≡ Fluxo de seu rotacional em *S*

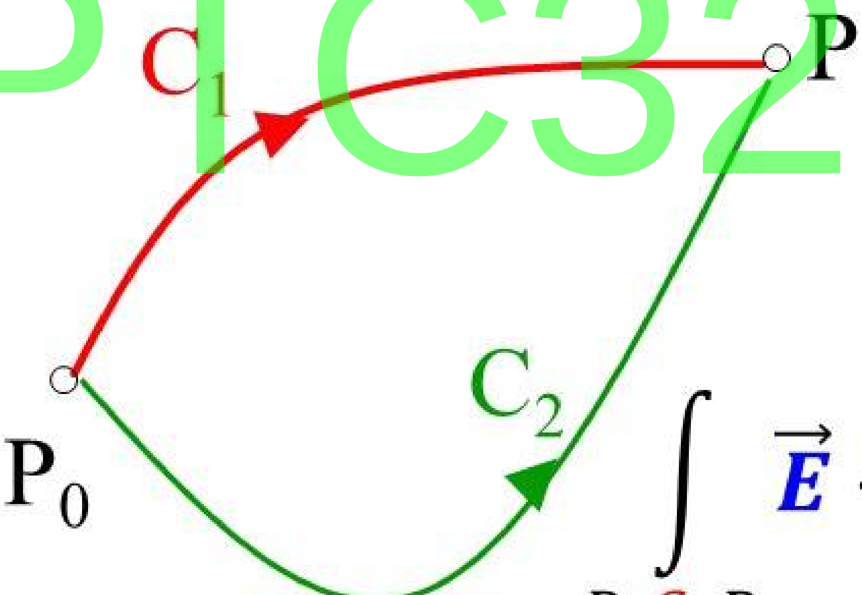
Função Potencial

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Função **Escalar**: ajuda no cálculo dos campos vetoriais
- Representa o **Trabalho** realizado (por unidade de carga) para trazer q de P_0 a P
- Sinal **negativo**: Trabalho realizado **contra as forças do campo** E (Coulomb)

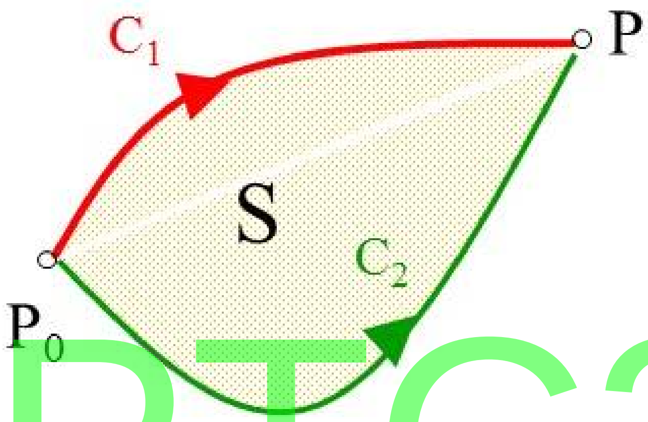
Função Potencial

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$\int_{P_0 C_1 P} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P C_2 P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_1 + C_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Função Potencial



$$\oint_{C_1+C_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

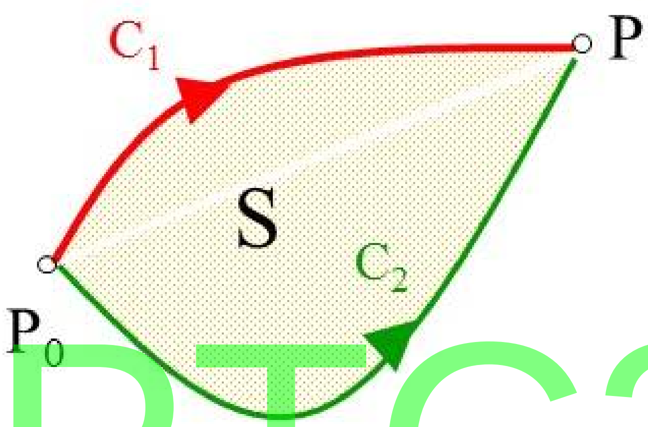
$$\int_{P_0C_1P} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{PC_2P_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{P_0C_1P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{PC_2P_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_0C_2P} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

C_1 e C_2 quaisquer $\rightarrow \int \mathrm{E}.\mathrm{dl}$ **independe do trajeto**

$\mathrm{E} \rightarrow$ **campo conservativo (irrotacional** $\rightarrow \nabla\times\vec{E} = 0$**)**

Função Potencial



$$\varphi(P)-\varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_{P_0} = V_{P-P_0} \qquad \varphi(P_0)=0$$

Para $d\vec{l}$ muito pequena

$$\varphi(P)-\varphi(P_0) = d\varphi = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{l} \qquad d\vec{l} = dx\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + dy\,\hat{\boldsymbol{u}}_y + dz\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_x\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + E_y\hat{\boldsymbol{u}}_y + E_z\hat{\boldsymbol{u}}_z \Rightarrow d\varphi = -\left(E_x\,dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \Leftarrow d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Função Potencial

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{u}}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{u}}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{u}}_z\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi}$$

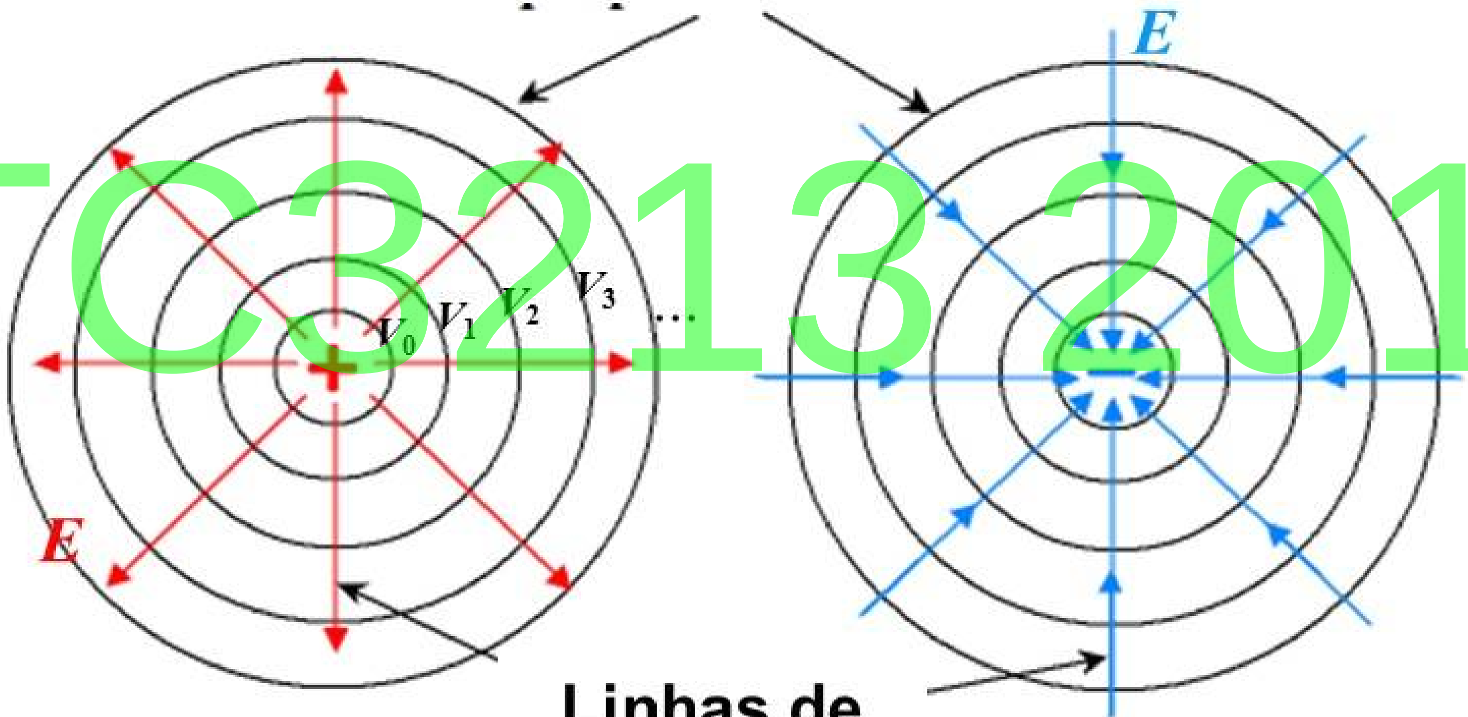
Se $\varphi(P_0) = \varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla[\varphi(P) - \varphi_0] = \nabla \varphi(P)$

- **Linhas Equipotenciais** de φ $\rightarrow$ Linhas de φ **constante**
- **Linhas de Campo** $\rightarrow$ **Linhas *tangentes* ao Campo Elétrico**
- Número de linhas de campo numa dada área = Fluxo
- **Linhas Equipotenciais** $\perp$ **Linhas de campo**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Função Potencial

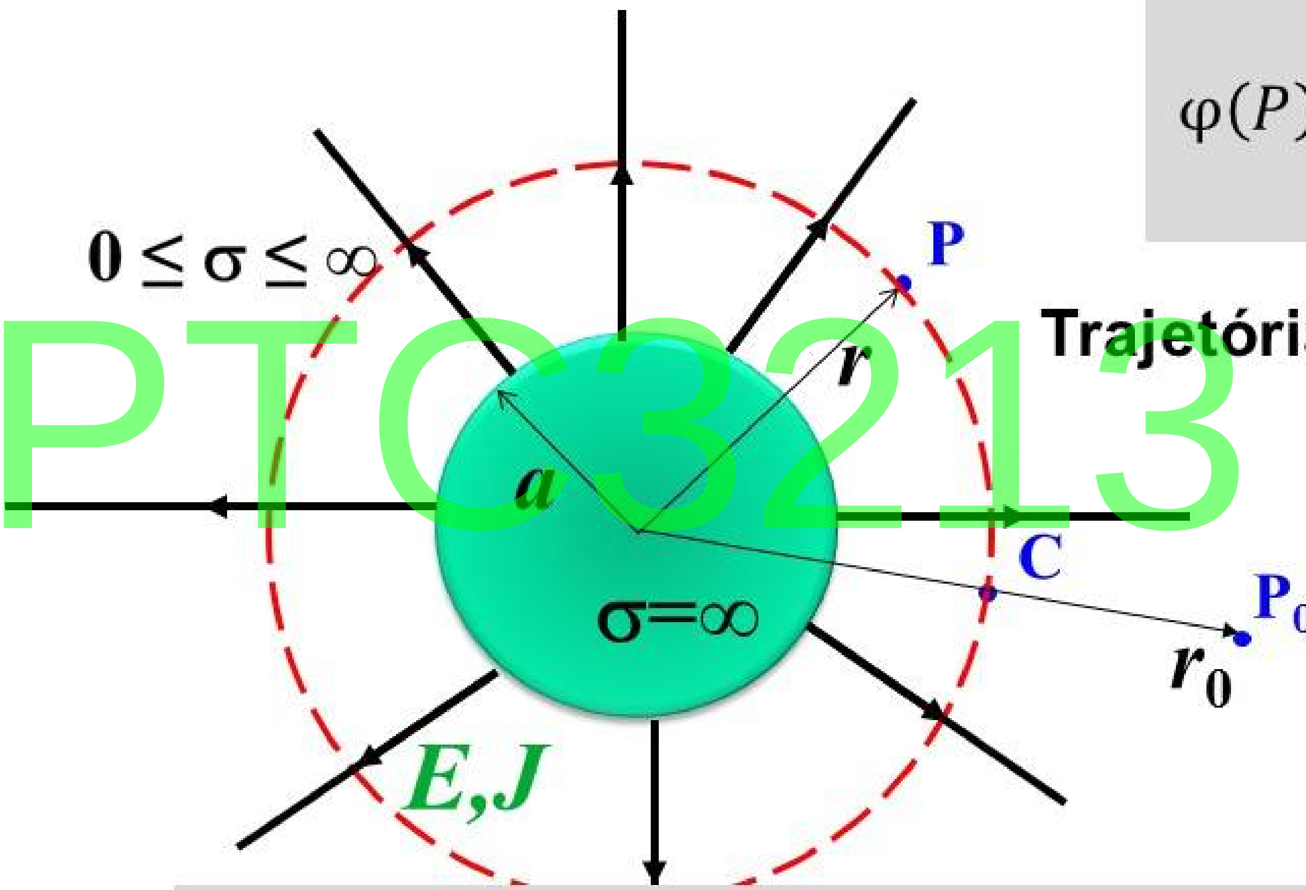
Linhas Equipotenciais ($V_0 > V_1 > V_2 > \ldots$)



Linhas de Campo

Exemplo – Resistência e Capacitância

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Trajetória de integração arbitrária

$P_0 \rightarrow C \rightarrow P$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{u}_r$$

$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{I}{4\pi\sigma}\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Resistência

$$\varphi(P_0 \to \infty) = 0$$

$$\varphi(\boldsymbol{P}) = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{I}{4\pi\sigma a}$$

Resistência entre a esfera e o meio condutor

$$R = \frac{\varphi(\boldsymbol{a})}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Capacitância

Carga total acumulada na superfície da esfera:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad Q = \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon I}{\sigma}$$

Capacitância entre a esfera e o meio ao redor

$$C = \frac{Q}{\varphi(a)} = 4\pi\varepsilon a$$

Analogia entre Campo de Correntes e Campo Eletrostático

Campo de correntes	Campo eletrostático
$\vec{E}$	$\vec{E}$
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{E}=0$
$\vec{E}=-\nabla\varphi$	$\vec{E}=-\nabla\varphi$
$\vec{J}$	$\vec{D}$
$\nabla\cdot\vec{J}=0$	$\nabla\cdot\vec{D}=0 \quad (\quad \rho_v=0 \quad)$
$\vec{J}=\sigma\,\vec{E}$	$\vec{D}=\varepsilon\,\vec{E}$
σ	ε
$G=1/R$	$C=1/S$

Analogia entre Campo de Correntes e Campo Eletrostático

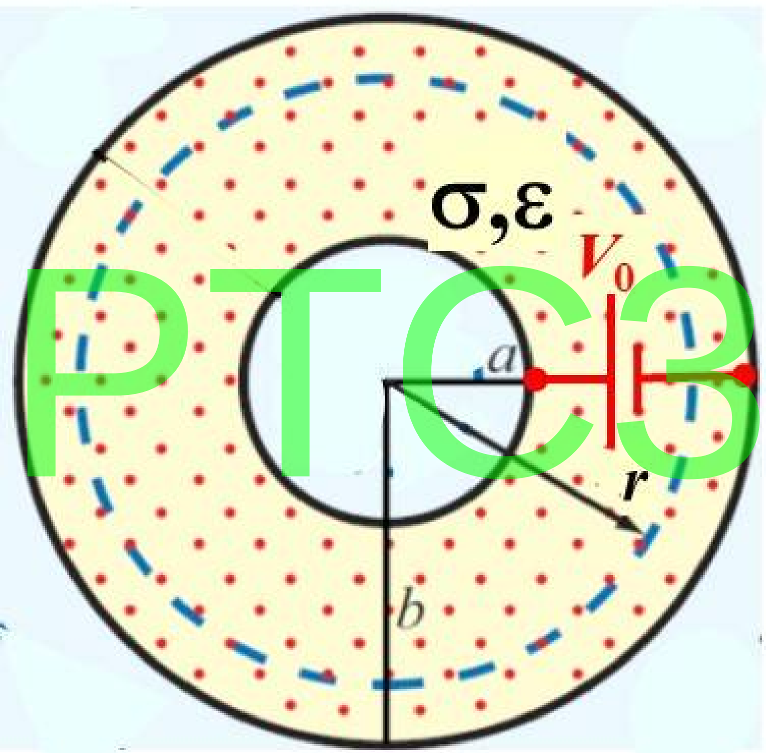
$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{\iint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\iint_S \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{V}$$

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas



$$\varphi_a = V_0 \qquad \varphi_b = 0$$

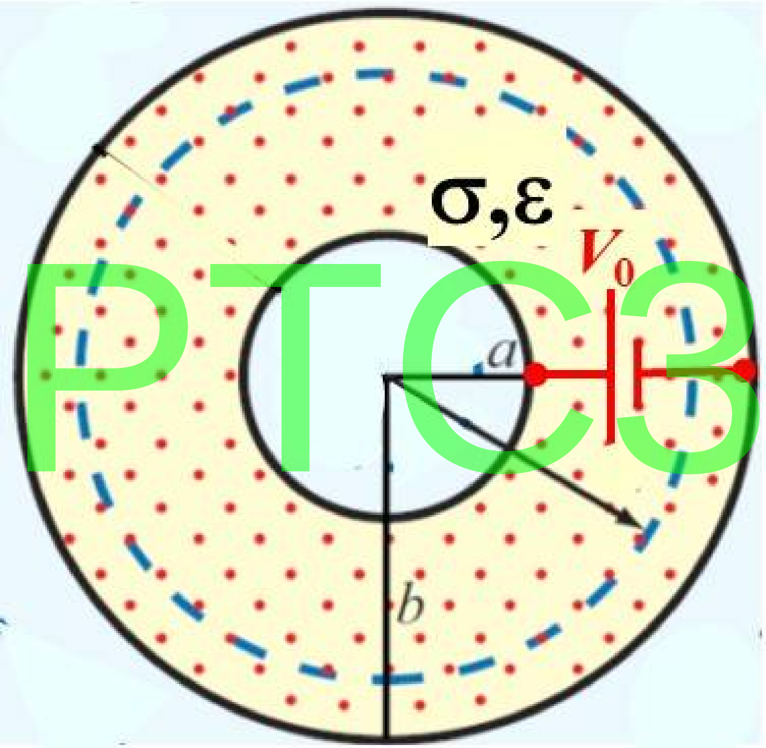
$$\varphi(P) - \varphi(P_0) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$V_0 = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}$$

Campo entre duas esferas condutoras concêntricas



Potencial a um ponto ***P***, à distância ***r*** do centro da esfera

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$I = V_0/R$$

$$I = \frac{4\pi\sigma V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$\varphi(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$