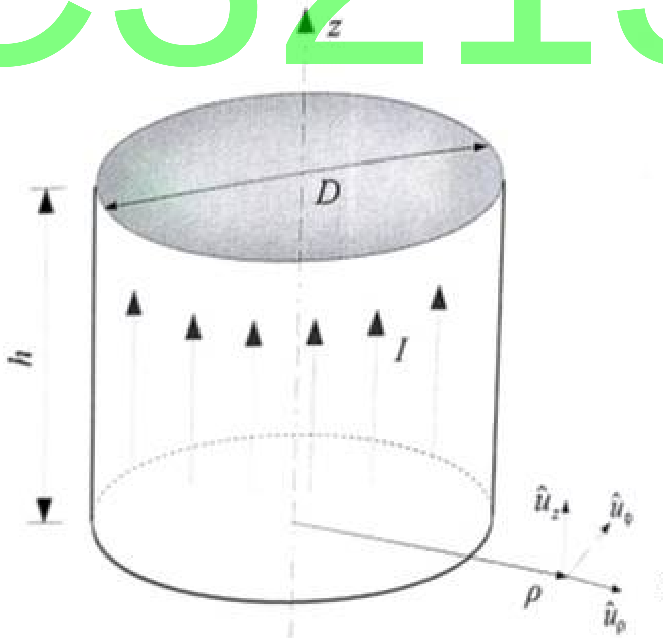
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Aproximações das Equações de Maxwell

Campo de Correntes Estacionárias

Exemplo

- Um fio de cobre reto, infinito, isolado de σ=5,8e-07 S/m, D=2.a = 0,1 cm, conduz corrente contínua de I=5 A. Integrar o vetor de Poynting sobre uma superfície fechada que inclua um pedaço de fio de comprimento h e comparar com o calor desenvolvido por efeito Joule internamente.



Exemplo

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2} & r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} & r > a \end{cases} \hat{\boldsymbol{u}}_\phi$$

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{\sigma}\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{I}{\sigma 2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{u}}_z (r \leq a)$$

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} = -\frac{I}{\sigma\pi a^2}\frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{u}_r = -\frac{I^2 r}{2\sigma\pi^2 a^4}\hat{u}_r$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{N}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_{lat.} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_r \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa \\ sup.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_z \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa \\ inf.}} \vec{\boldsymbol{N}}.(-\hat{u}_z)\boldsymbol{dS} =$$

Exemplo

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{N}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_{\boldsymbol{lat.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_r \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa\\ sup.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_z \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa\\ inf.}} \vec{\boldsymbol{N}}.(-\hat{u}_z)\boldsymbol{dS} =$$

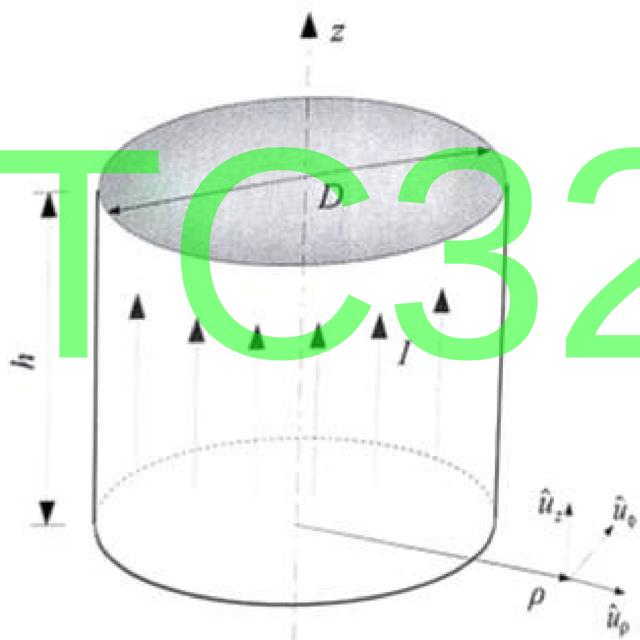
$$= \int_0^{\boldsymbol{h}} \int_0^{\boldsymbol{2\pi}} -\frac{I^2 r}{2\sigma\pi^2 a^3} a\, d\phi\, dz + 0 + 0 = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}(2\pi a h) = -\frac{I^2 h}{\sigma\pi a^2}$$

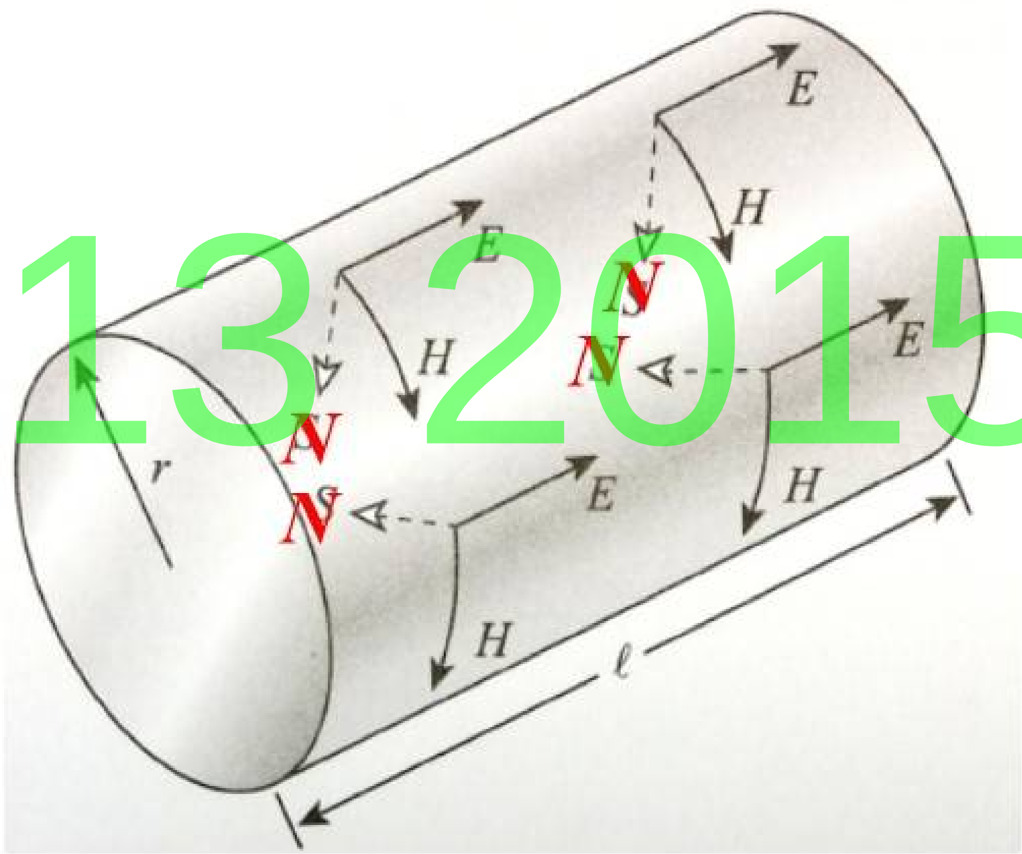
$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{N}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{S}} = -R.I^2$$

$$\iiint_{\boldsymbol{\tau}} \frac{|\vec{\boldsymbol{J}}|^2}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{d\tau} = \int_0^{\boldsymbol{h}} \int_0^{\boldsymbol{a}} \int_0^{\boldsymbol{2\pi}} \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4} r\, d\phi\, dr\, dz = \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4}\pi a^2 h = R.I^2$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Exemplo



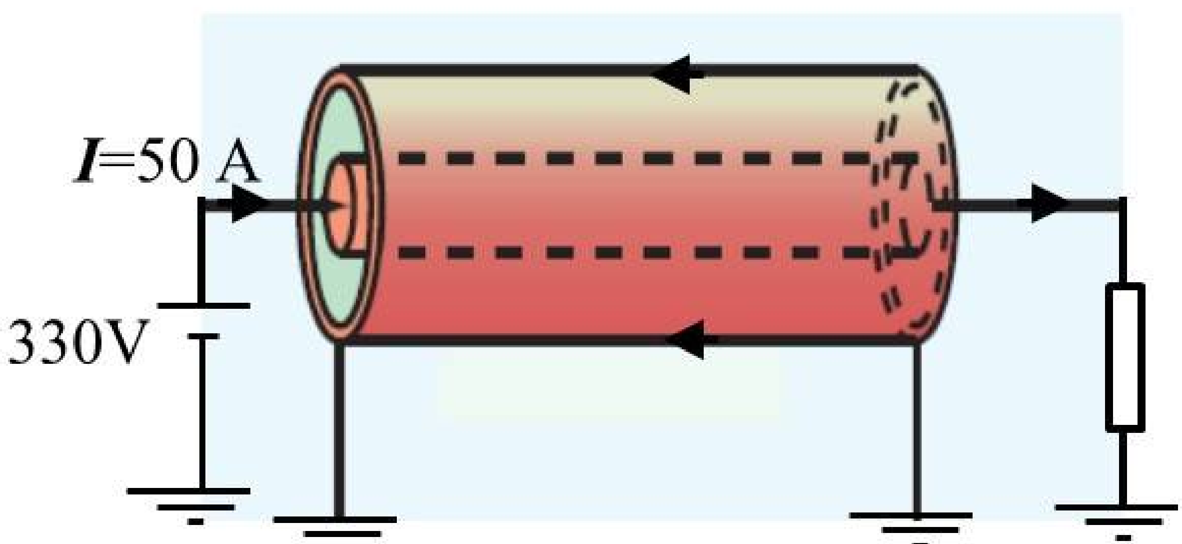


Exemplo

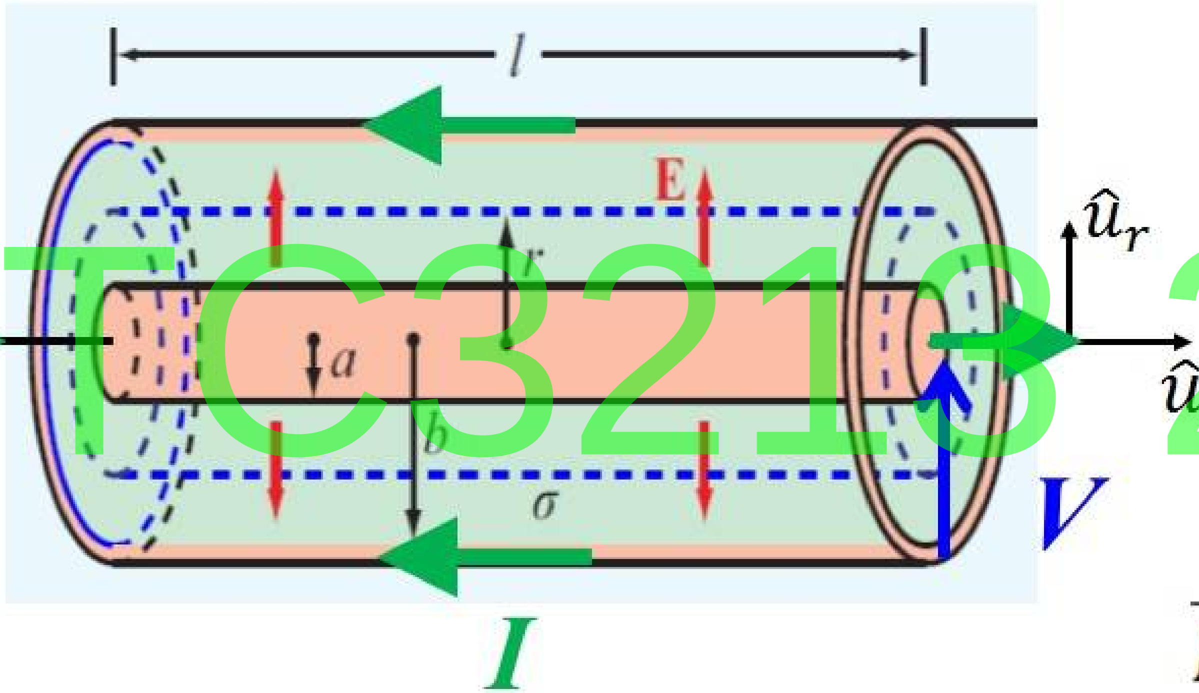
Ex. 2.8 – Um cabo coaxial de seção circular tem um condutor externo de diâmetro $2b$=2cm e um fio central de diâmetro $2a$=0,5 cm. O espaço entre eles é preenchido de material isolante. O condutor externo é aterrado enquanto queo interno está a um potencial de 330 V. O cabo conduz I=50 A. Determinar:

a) O componente axial do vetor de Poynting entre condutores.

b) A integral desse vetor sobre uma seção transversal do cabo.

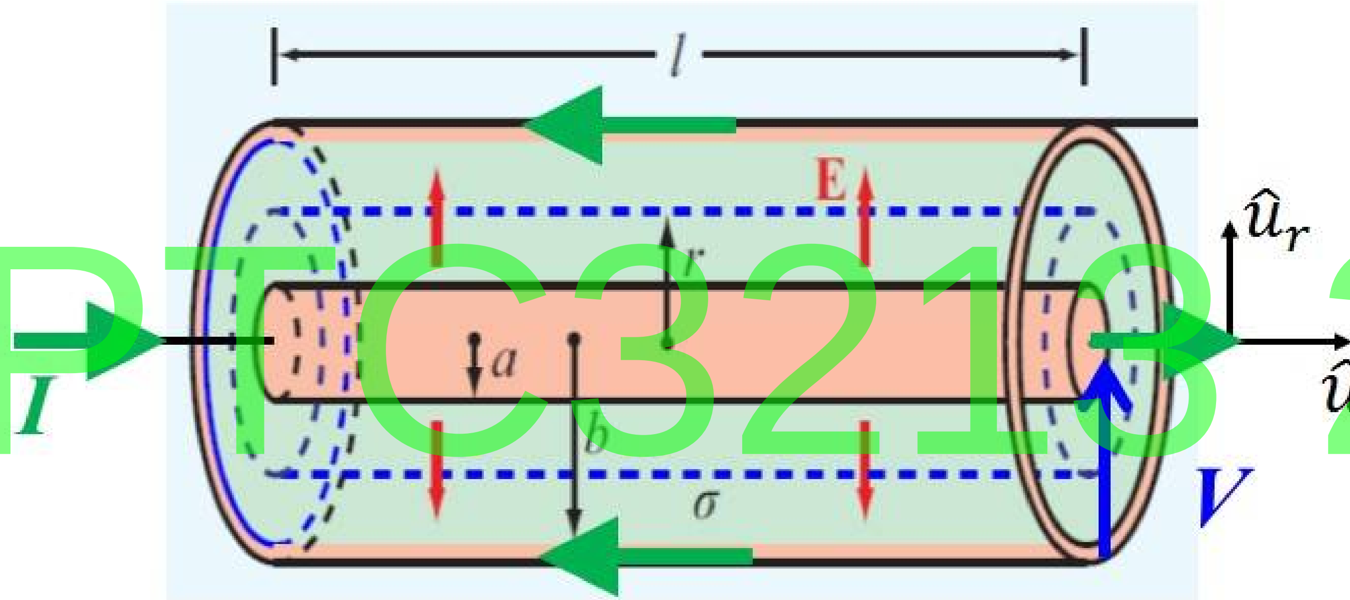


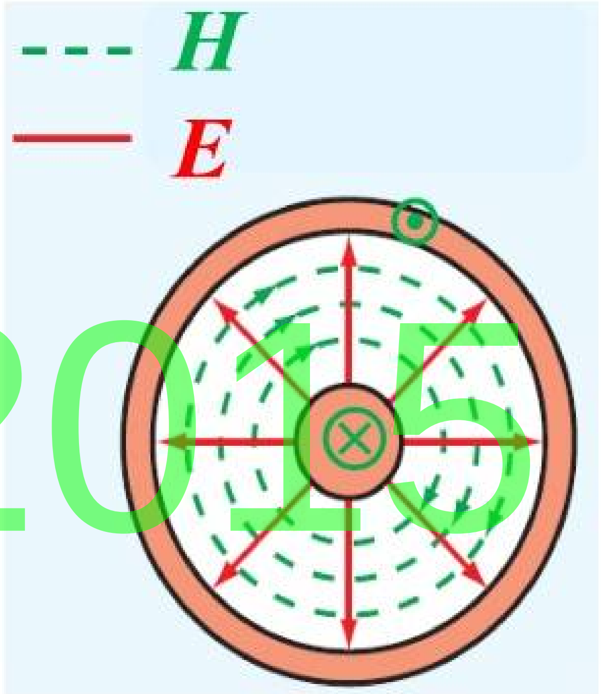
Exemplo



$$\vec{E} = \frac{V}{r \ln {}^{b}/_{a}} \hat{u}_r$$

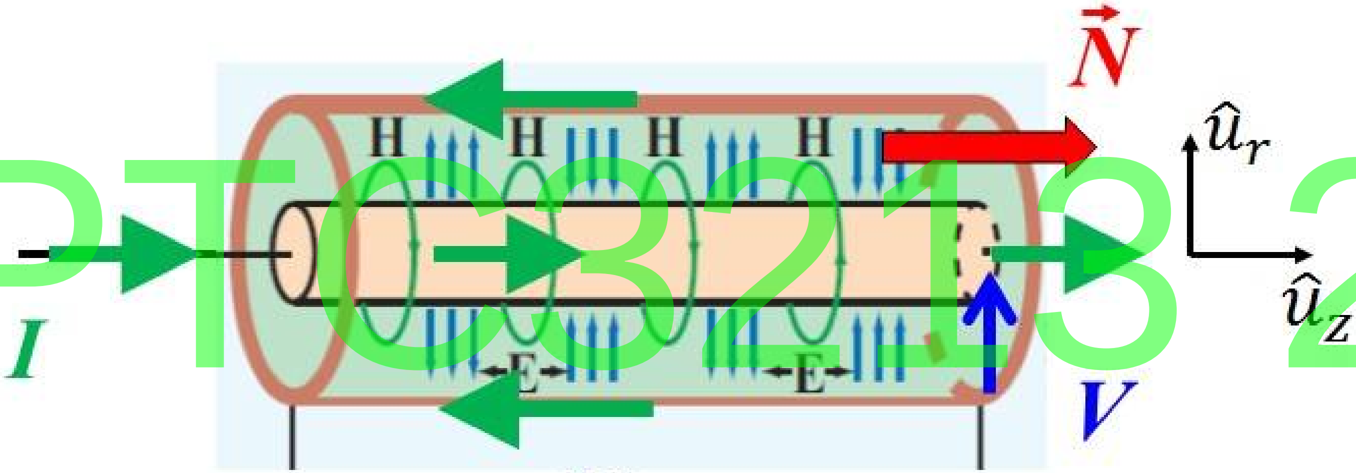
Exemplo

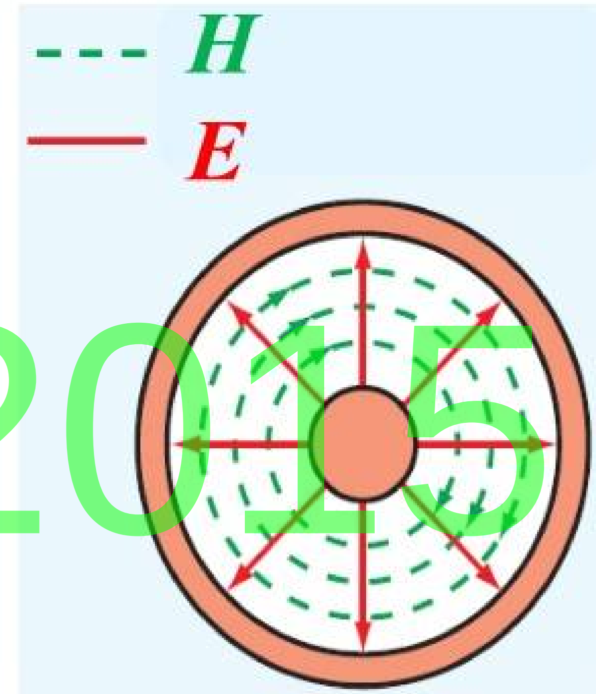




$$\vec{E} = \frac{V}{r \ln {}^{b}/_{a}} \hat{u}_r \qquad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi$$

Exemplo





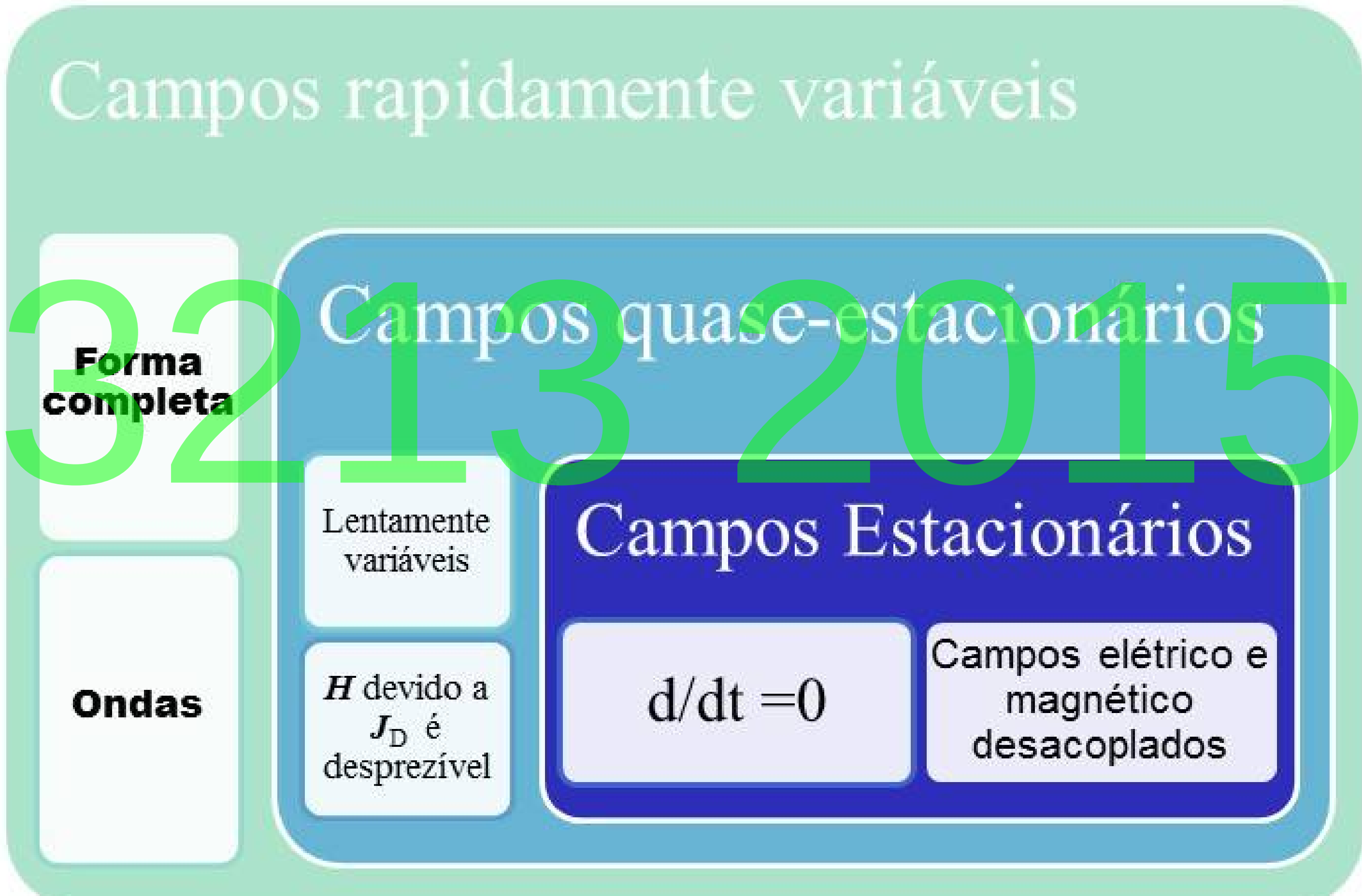
$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{VI}{2\pi r^2 \ln {}^{b}/_{a}} \hat{u}_z$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{N}.d\vec{S} = \int_{a}^{b} N 2\pi r \, dr = \frac{VI}{\ln {}^{b}/_{a}} \int_{a}^{b} \frac{dr}{r} = VI$$

Aproximações das Eq. Maxwell

Simplificações:

- **Simetrias**
- **Abandono de alguns termos**
- **Simplificações de condições de contorno**



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Eq. Maxwell – Campos Estacionários

$$\nabla \times \vec{E} = -\cancel{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \cancel{\frac{\partial \rho_V}{\partial t}} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right)$$

Eq. Maxwell – Campos Estacionários

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \qquad \vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Eq. Maxwell – Campos Estacionários Não condutores

$$\sigma = 0 \rightarrow J = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Eletrostática

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Magnetostática

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campos de Correntes Estacionárias em Meios condutores (Eletrocinética)

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^{i}\right)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Magnetostática

$J \neq 0$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Campos Quase-estacionários

J_D e seu efeito são desprezíveis

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campos Quase-estacionários

Ex.: J_D e J_C em condutores

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \vec{E}_0 \sin \omega t$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \omega \varepsilon \vec{E}_0 \cos \omega t$$

$$\left|\vec{E}_0\right| = 10^4 \, [\mathrm{V/m}]$$

$$J_{D_{max}} = \omega \varepsilon E_0 = 2\pi 60 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 10^4$$

$$J_{D_{max}} = 3{,}3 \times 10^{-5} \, [\mathrm{A/m^2}]$$

$$\left|\vec{E}_0\right| = 10^{-4} [\mathrm{V/m}]$$

$$J_{max} = \sigma E_0 = 5{,}7 \times 10^7 \times 10^{-4}$$

$$J_{max} = 5{,}7 \times 10^3 [\mathrm{A/m^2}]$$

Campos de Correntes Estacionárias em Meios condutores (Eletrocinética)

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$E = \frac{J}{\sigma}$$

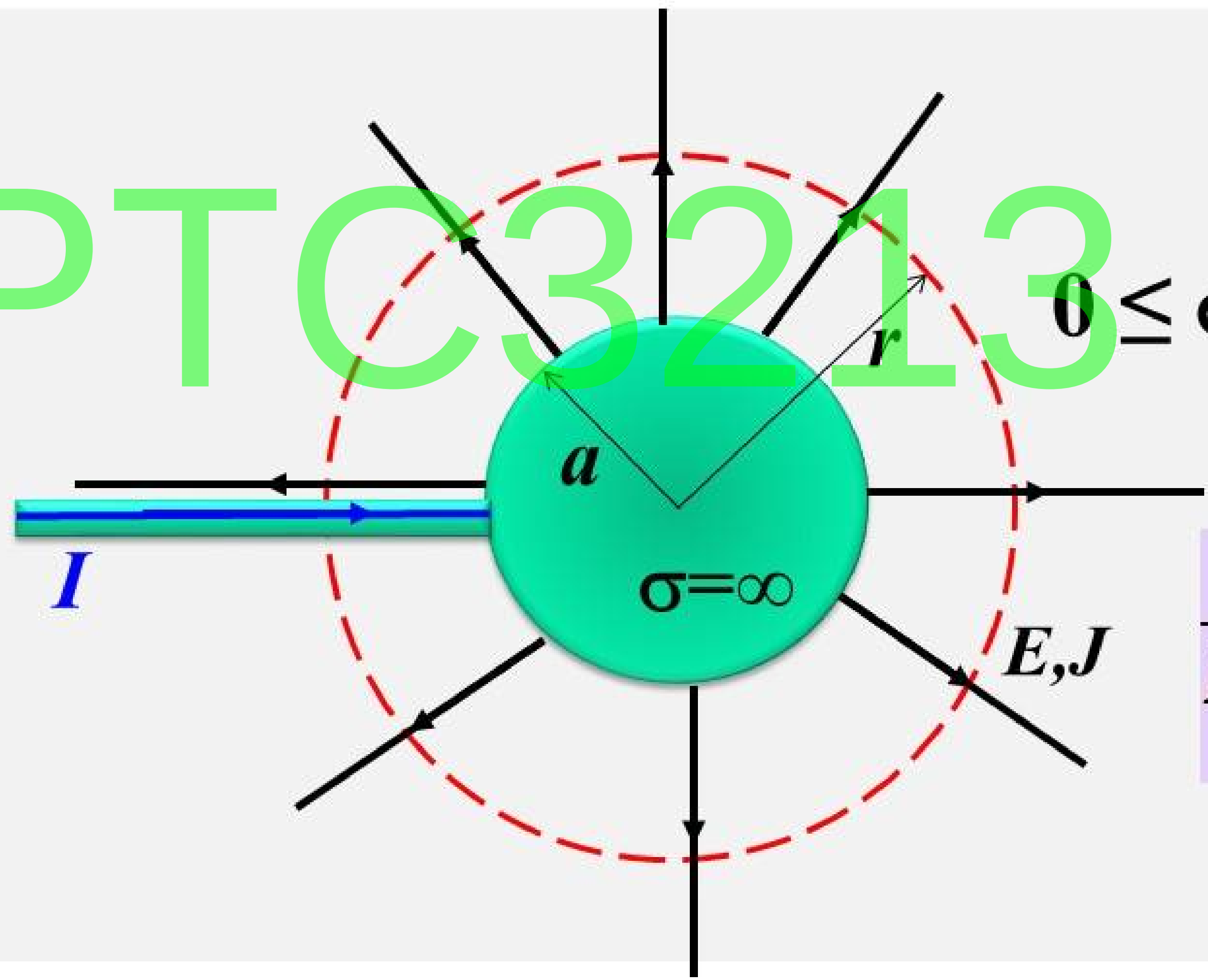
Se $\sigma = \infty$

$E = 0$

para J finito

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campos de Correntes Estacionárias
Esfera condutora perfeita



$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$

$$0 \leq \sigma \leq \infty$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{u}_r$$

Campo Eletrostático

Campo Eletrostático:
Campo criado por cargas estacionárias

Em condutores: $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v = 0$$

Regime Estático: ***E***$\neq$**0 somente em dielétricos perfeitos, σ=0**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Campo Eletrostático

Em t=0 coloca-se num condutor uma carga distribuída ρ_{V0}

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{D}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{D} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_v(t) = \rho_{v0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

Campo Eletrostático - Condutores

$$\rho_v(t) = \rho_{v0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$ ➡ **Constante de tempo de relaxação**

- **Para** $t \geq 4\tau \Rightarrow \rho_V \cong 0$
- $\tau \cong 0$ **para condutores habituais**
- **Cobre:** $\sigma = 5,7 \times 10^7\,\mathrm{S/m}$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_0 \approx 8,9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1,5 \times 10^{-19} s$$ ➡ $\cong 0$

No interior de bons condutores → cargas migram quase que instantaneamente para sua superfície → Q=0, E=0 no interior