ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# FLUXO DE ENERGIA NO ELETROMAGNETISMO

## Teorema de Poynting

## e

## Densidade de Potência Eletromagnética

# Teorema de Poynting

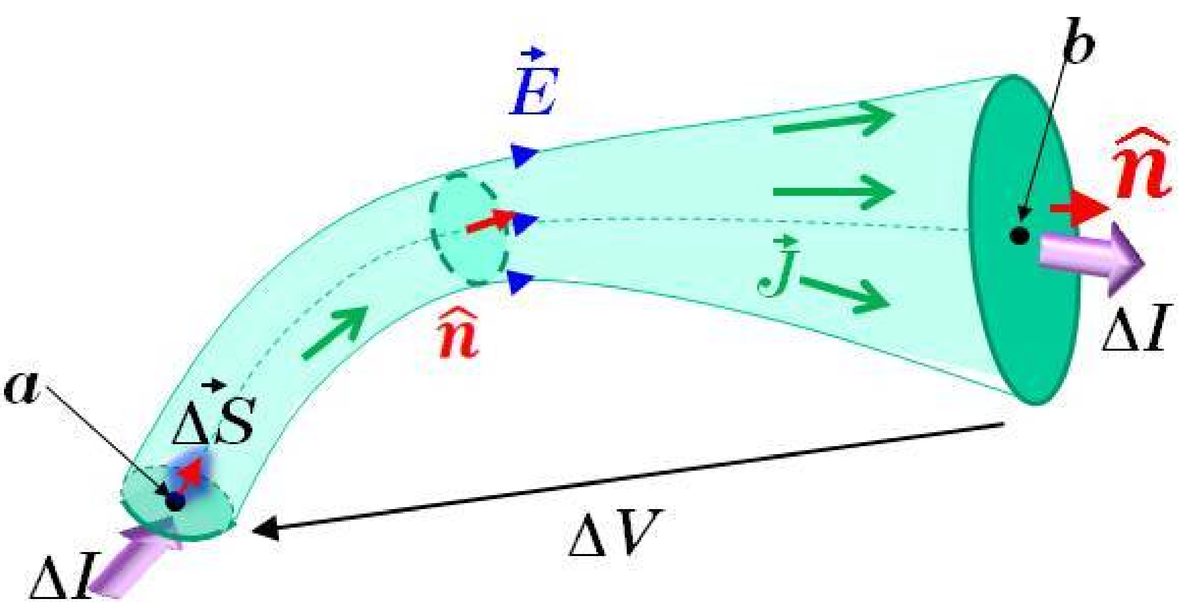
- Expressão matemática do princípio de conservação de energia aplicada aos campos eletromagnéticos
- Balanço da potência para os campos e fontes em uma região de interesse, incluindo a transferência de potência para dentro e/ou fora dessa região
- Energia:
  - Armazenada
    - Elétrica
    - Magnética
  - Dissipada
    - efeito Joule (condução)
    - polarização em dielétricos
    - perdas magnéticas (histerese)

# Balanço da Energia e Potência no Campo Eletromagnético

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \boxed{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

# Densidade de Potência Elétrica
# Potência Dissipada em Meios Condutores




Condutor sujeito a $\mathbf{E}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$

$\Downarrow$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$

$\Downarrow$

$\mathrm{V/m} \,.\, \mathrm{A/m^2}$

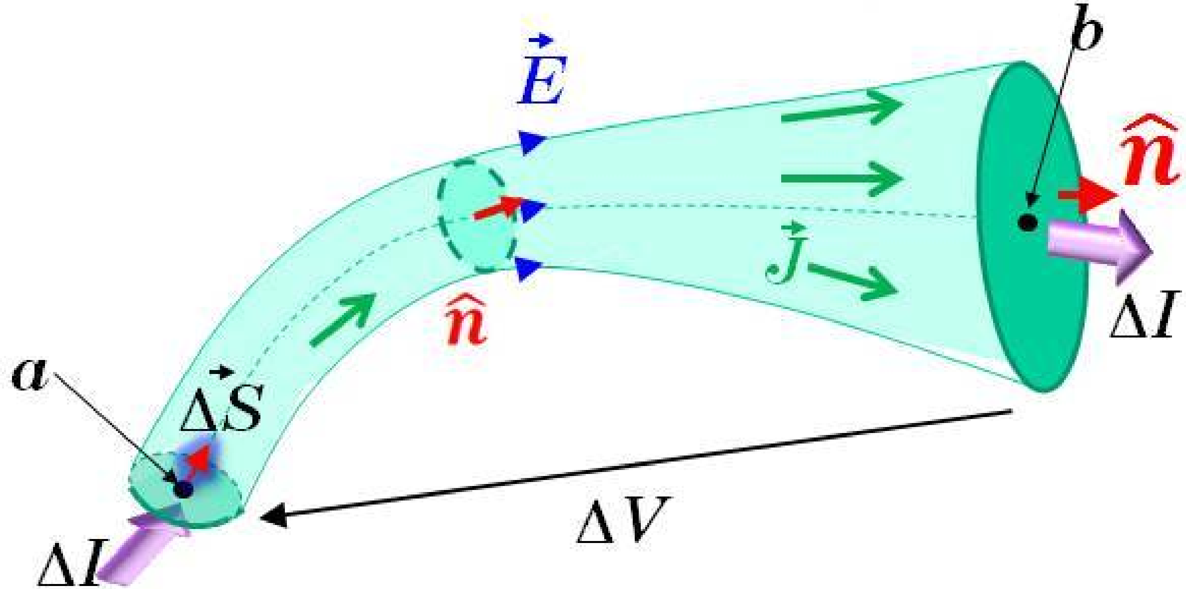
$\Downarrow$

$\mathrm{W/m^3}$

**Potência dissipada por efeito Joule por unidade de volume**

# Densidade de Potência Elétrica - Efeito Joule

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S}\hat{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{E} = \frac{\Delta V}{\Delta \ell}\hat{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{\Delta V}{\Delta \ell}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta S}$$




$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{\Delta W}{\Delta \tau}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} = \sigma|\mathbf{E}|^2$$

**Lei de Joule** no campo eletromagnético

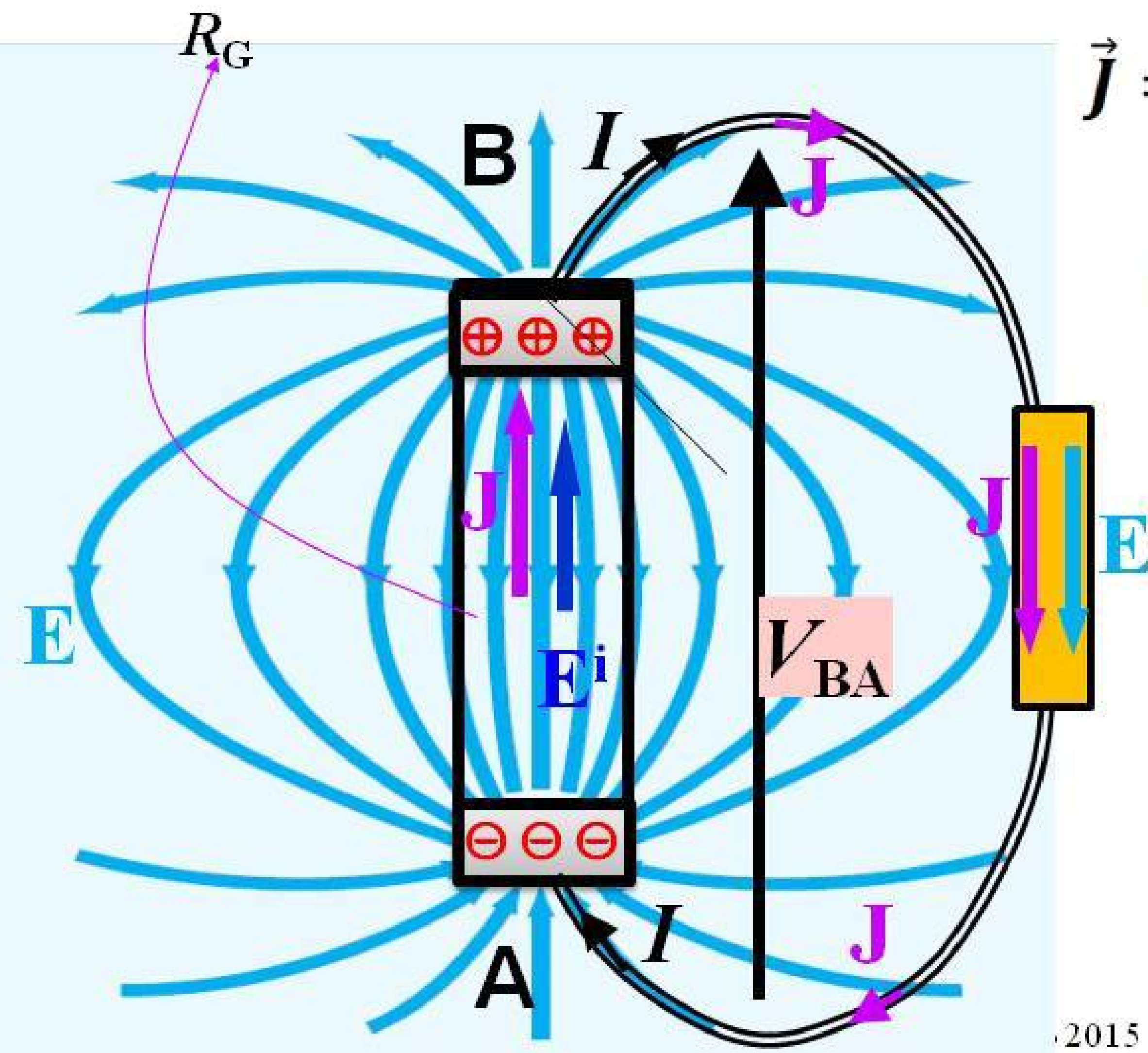
# Fontes de Campo (Geradores)

$E^i$ $\rightarrow$ campo "**impresso**" $\rightarrow$ efeito de transformação de alguma forma de energia em eletromagnética

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}^i$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} - \vec{E}^i \cdot \vec{J}$$

# Densidade de Potência Elétrica - Efeito do Campo Impresso




$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}^i$$

$$V_{BA} = \int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

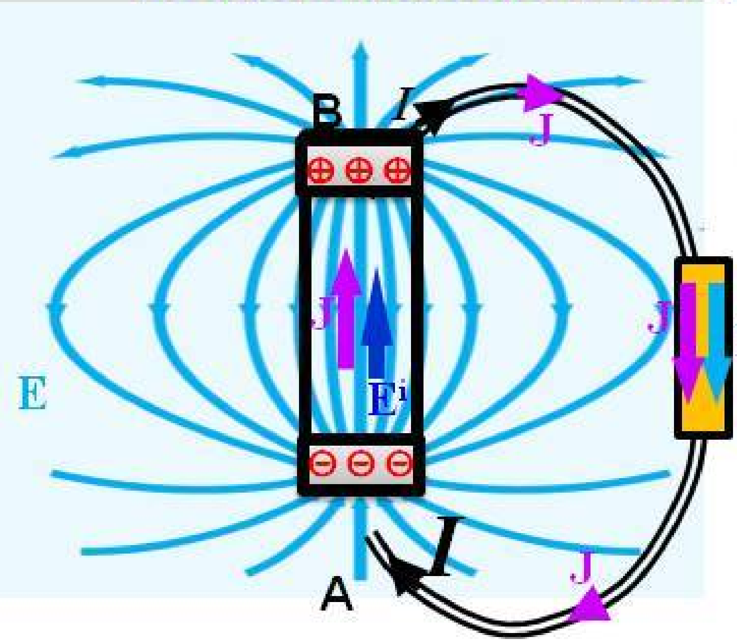
$$V_{BA} = -\int_A^B \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}^i\right)\cdot d\vec{l}$$

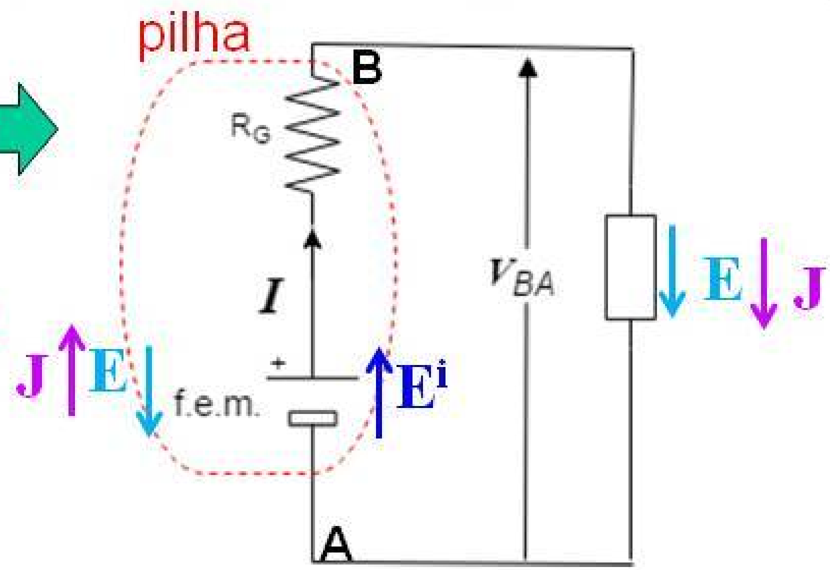
$$V_{BA} = -\int_A^B \frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}^i\cdot d\vec{l}$$

$$V_{BA} = -R_G . I + \text{f.e.m.}$$

d.d.p.

# Densidade de Potência Elétrica - Efeito do Campo Impresso




$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^i\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}^i$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}^i\right)\cdot\vec{J}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} - \vec{E}^i\cdot\vec{J}$$

Densidade de Potência dissipada (Efeito Joule)

Densidade de Potência fornecida por fonte externa

# Correntes no Vácuo

- Feixe de elétrons
  - tubo de raios catódicos
  - acelerador de partículas
  - válvula
- $\mathbf{E}$ acelera cargas
- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ : densidade de potência fornecida às cargas (energia cinética)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# Densidade de Potência Elétrica

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \boxed{\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) = \underbrace{-\vec{E}^{i}\cdot\vec{J} + \frac{\left|\vec{J}\right|^{2}}{\sigma}} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Densidade de Potência fornecida por fonte externa

Densidade de Potência dissipada (Joule)

Densidade de Potência *fornecida ao Campo Elétrico*

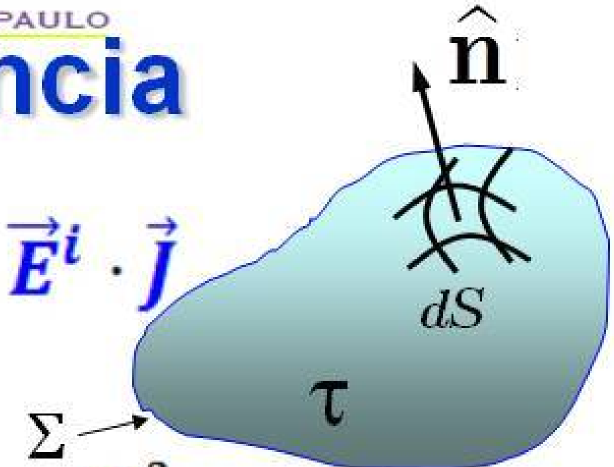
# Densidade de Potência Magnética

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\nabla \cdot \left( \vec{E} \times \vec{H} \right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \left( -\vec{E}^i \cdot \vec{J} + \frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

# Fluxo Total de Potência




$$\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E}^i \cdot \vec{J}$$

Integrando no volume $\tau$

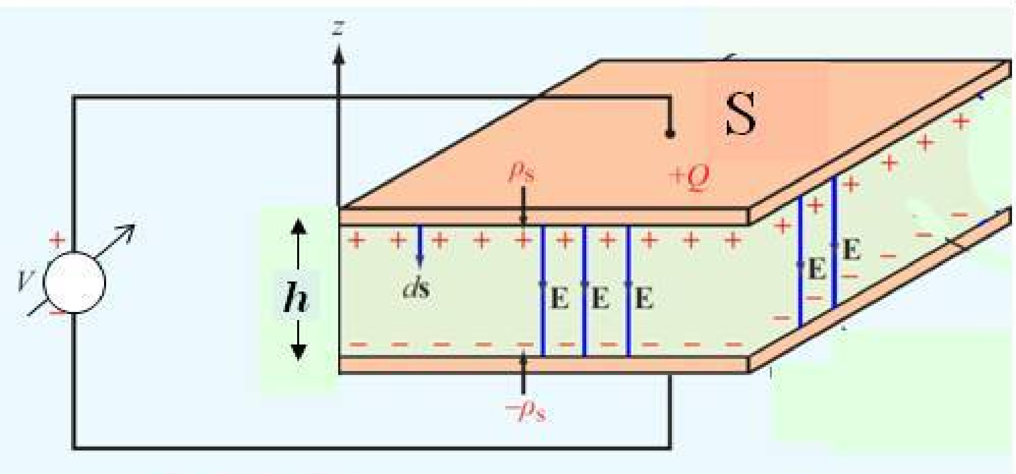
$$\iiint_\tau \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\tau = -\iiint_\tau \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\tau - \iiint_\tau \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} d\tau + \iiint_\tau \vec{E}^i \cdot \vec{J}\, d\tau$$

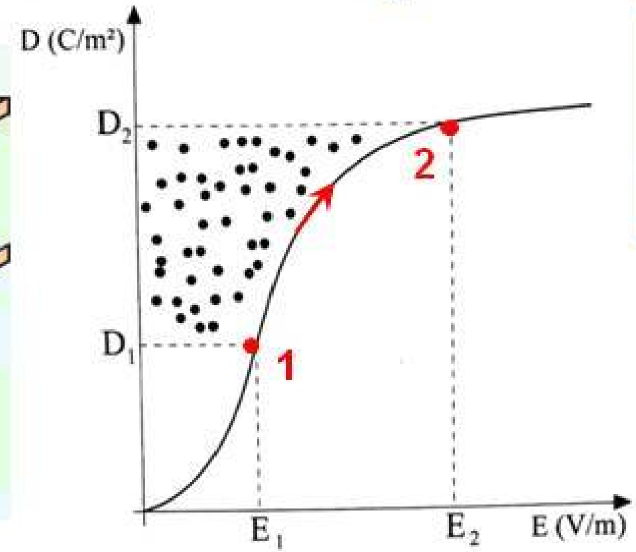
Teorema da divergência

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}\right) \qquad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}\right)$$

$$\oiint_\Sigma \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}\right) d\tau - \iiint_\tau \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} d\tau + \iiint_\tau \vec{E}^i \cdot \vec{J}\, d\tau$$

# Potência fornecida ao Campo Elétrico



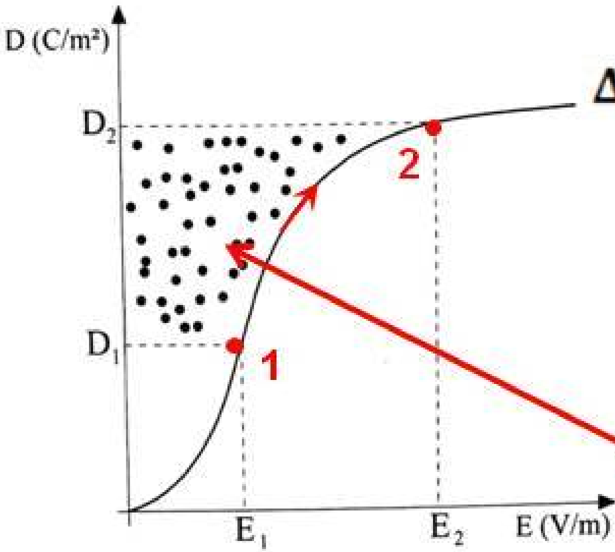

$$\int_\tau \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\tau$$

$$\int_\tau \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,d\tau = \mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\int_\tau d\tau = \mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot S\cdot h = V\,\frac{dQ}{dt} = V\cdot i = p(t)$$

***Energia*** **fornecida ao campo elétrico no intervalo** $t_1$-$t_2$:

$$\Delta W_e\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_\tau \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,d\tau\,dt$$

# Energia fornecida ao Campo Elétrico




$$\Delta W_e\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_\tau \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,d\tau\,dt = \iiint_\tau \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,dt\,d\tau$$

$$= \iiint_\tau \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\,dt\,d\tau = \iiint_\tau \boxed{\int_{D_1}^{D_2} \vec{E}\cdot d\vec{D}}\,d\tau$$

***Densidade volumétrica de Energia*** *fornecida ao campo elétrico para levá-lo do ponto* $(E_1,D_1)$ ao ponto $(E_2,D_2)$:

$$\Delta w_e = \int_{D_1}^{D_2} \vec{E}\cdot d\vec{D} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

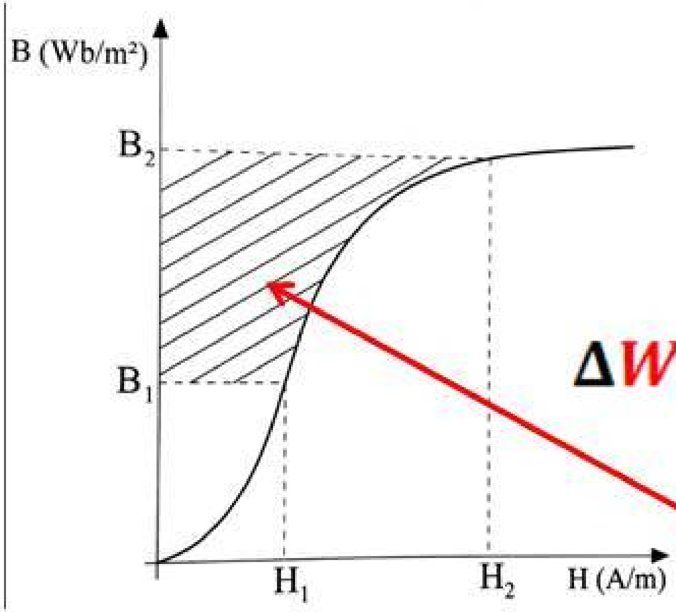
# Densidade de Energia Armazenada no Campo Elétrico

## Em dielétricos lineares:

$$\Delta w_e = \int_{D_1}^{D_2} \vec{E} \cdot d\vec{D} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{D}{\varepsilon} \cdot dD = \frac{1}{2\varepsilon} D^2 \Big|_{D_1}^{D_2}$$

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

# Potência fornecida ao Campo Magnético




$$\int_\tau \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau$$

$$\Delta W_m \big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_\tau \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau\, dt$$

$$\Delta w_m = \int_{B_1}^{B_2} \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

***Densidade de Energia*** fornecida ao campo magnético em meio *isotrópico, homogêneo e linear*:

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} \quad [\mathrm{J/m^3}]$$

# Teorema de Poynting

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) d\tau - \iiint_{\tau} \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} d\tau + \iiint_{\tau} \vec{E}^i \cdot \vec{J} \, d\tau$$

Taxa de decréscimo da energia armazenada em τ

Potência dissipada em τ

Potência de fontes internas a τ

**Fluxo total de potência saindo pela área Σ**

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} \;\; [\mathrm{W/m^2}]$$

**Vetor de Poynting**

# Teorema de Poynting

$$\iiint_\tau \vec{E}^i \cdot \vec{J}\, d\tau$$

$$\iiint_\tau \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma}\, d\tau$$

$\tau$

$$\iiint_\tau \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\tau$$

$$\iiint_\tau \vec{H} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}\, d\tau$$

$\Sigma$

$$\oiint_\Sigma (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{S}$$

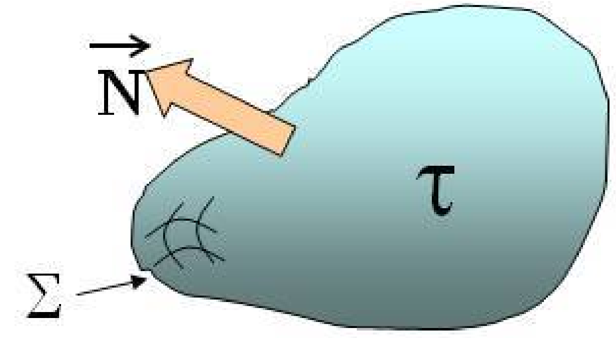
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# Vetor de Poynting

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} \ \ [\mathrm{W/m^2}]$$

Vetor de Poyting ⇨ densidade de fluxo de potência em módulo, direção e sentido

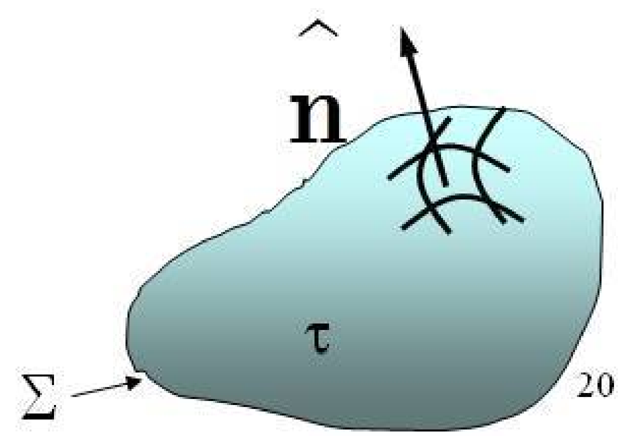
$$\mathbf{P} = \oiint_{\Sigma} \vec{N} \cdot d\vec{S}$$




Fluxo total de potência saindo pela área Σ que delimita τ

# Vetor de Poynting

- Indica a direção do fluxo de potência
  - saindo de $\Sigma \rightarrow$ positivo $\rightarrow$ transmissor
  - entrando em $\Sigma \rightarrow$ negativo $\rightarrow$ receptor
- Fluxo de potência é $\perp$ a **E** e **H**



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

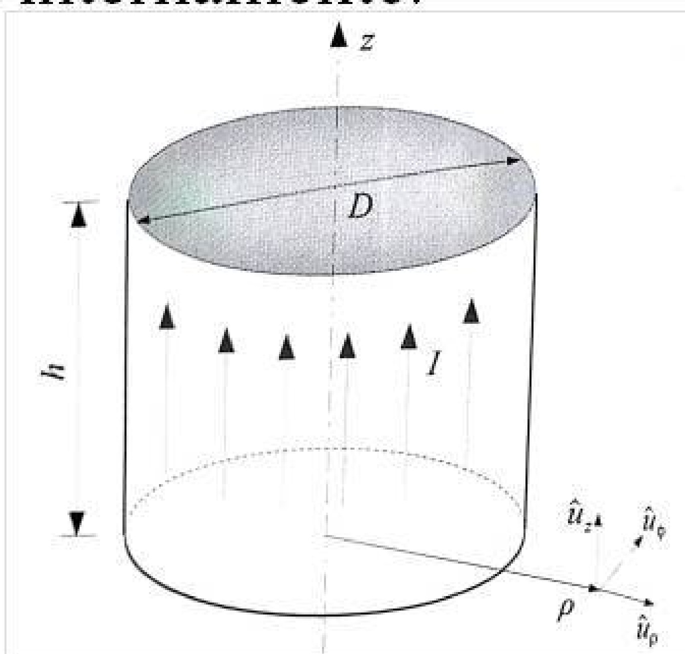
# Sumário

- Teorema de Poynting fornece as **relações de energia dos campos num dado volume** (princípio da conservação de energia aplicada aos campos EM)
- O Vetor de Poynting é uma **densidade superficial de potência** que atravessa a superfície que delimita o volume
- Direção do Vetor de Poynting $\equiv$ direção do fluxo de potência
- A direção do Vetor de Poynting dá a **direção de propagação** da potência eletromagnética
- O Teorema de Poynting dá o **fluxo líquido de potência que sai de um dado volume** através de sua superfície

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# Exemplo

- Um fio de cobre reto, infinito, isolado de $\sigma$=5,8e-07 S/m, D=2.a = 0,1 cm, conduz corrente contínua de I=5 A. Integrar o vetor de Poynting sobre uma superfície fechada que inclua um pedaço de fio de comprimento h e comparar com o calor desenvolvido por efeito Joule internamente.



# Exemplo

$$\vec{\boldsymbol{H}} = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2} & r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} & r > a \end{cases} \hat{\boldsymbol{u}}_\phi$$

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{\sigma}\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{I}{\sigma 2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}(r \leq a)$$

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} = -\frac{I}{\sigma\pi a^2}\,\frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{u}_r = -\frac{I^2 r}{2\sigma\pi^2 a^4}\hat{u}_r$$

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{N}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_{\boldsymbol{lat.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_r \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa \\ sup.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_z \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa \\ inf.}} \vec{\boldsymbol{N}}.(-\hat{u}_z)\boldsymbol{dS} =$$

# Exemplo

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{N}}.d\vec{\boldsymbol{S}} = \int_{\boldsymbol{lat.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_r \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa\\ sup.}} \vec{\boldsymbol{N}}.\hat{u}_z \boldsymbol{dS} + \int_{\substack{tampa\\ inf.}} \vec{\boldsymbol{N}}.(-\hat{u}_z) \boldsymbol{dS} =$$

$$= \int_0^{\boldsymbol{h}} \int_0^{\boldsymbol{2\pi}} -\frac{I^2 r}{2\sigma\pi^2 a^3} a\, d\phi\, dz + 0 + 0 = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 a^3}(2\pi a h) = -\frac{I^2 h}{\sigma\pi a^{\ 2}}$$

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \vec{\boldsymbol{N}}.d\vec{\boldsymbol{S}} = -R.I^2$$

$$\iiint_{\boldsymbol{\tau}} \frac{\left|\vec{\boldsymbol{J}}\right|^2}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{d\tau} = \int_0^{\boldsymbol{h}} \int_0^{\boldsymbol{a}} \int_0^{\boldsymbol{2\pi}} \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4} r\, d\phi\, dr\, dz = \frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4}\pi a^2 h = R.I^2$$