ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Equações de Maxwell

Relações Constitutivas

Condições de Contorno

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condições de Contorno

Componente	Normal B	Normal D	Tang. E	Tang. H
Forma geral	$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_2) = \boldsymbol{0}$	$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_1 - \vec{\boldsymbol{D}}_2) = \rho_S$	$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{E}}_1 - \vec{\boldsymbol{E}}_2) = 0$	$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_2) = \vec{J}_s$
Sem fontes na Interface	$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}_1} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}_2}$	$\boldsymbol{D}_{n_1} - \boldsymbol{D}_{n_2} = 0$	$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{t}_1} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{t}_2}$	$\vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{t}_1} = \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{t}_2}$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}_1} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}_2}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\sigma}_1} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\sigma}_2}\right) \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S}}$$

Condições de Contorno - J

Ex. 2.5: A direção das linhas de corrente na superfície de separação entre os meios (1) e (2) faz um ângulo de 30 graus com a normal à superfície, no meio (1). O regime é estacionário e as constantes do meio dadas por:

(1) σ_1=5 [S/m], ε_1= 80ε_0 (água do mar);

(2) σ_2=10^{-2} [S/m], ε_2= 15ε_0 (solo);

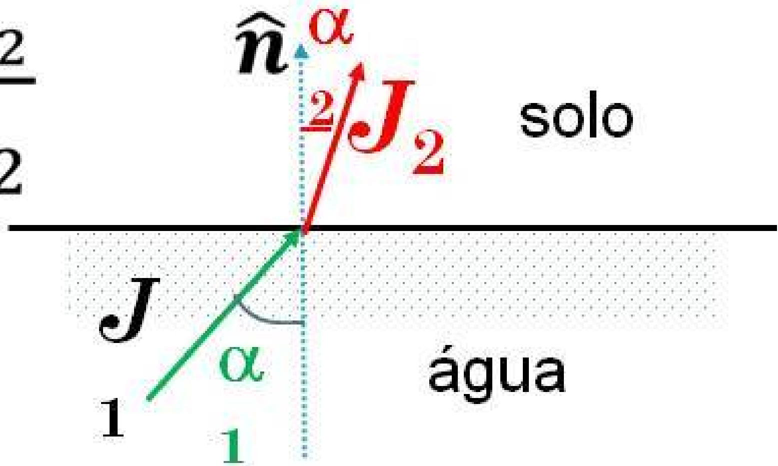
Determinar:

(a) O ângulo que a ***J*** forma com a normal à superfície do meio (2);

(b) Se $\boldsymbol{J}_1$ = 10 A/m^2, qual a densidade de carga na interface?

Condições de Contorno - J

Ex. 2.5 (a) $\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2} \Rightarrow \dfrac{J_{t_1}}{\sigma_1} = \dfrac{J_{t_2}}{\sigma_2}$



$$J_{t_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_{t_1}$$

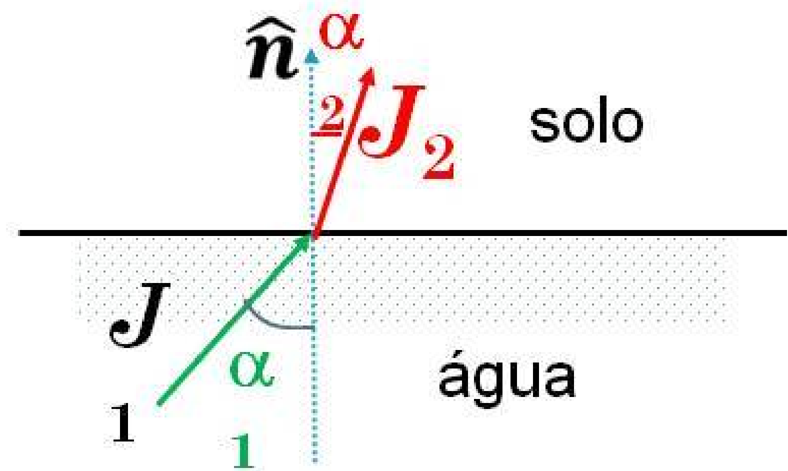
Regime estacionário: $J_{n_1} = J_{n_2}$

$$\tan\alpha_1 = \frac{J_{t_1}}{J_{n_1}} \Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{J_{t_2}}{J_{n_2}} \Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{J_{t_2}}{J_{n_2}} = \frac{J_{t_1}\,{}^{\sigma_2}/_{\sigma_1}}{J_{n_1}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\tan\alpha_1$$

$$= \frac{10^{-5}}{5}\tan 30° \Rightarrow \alpha_2 \approx 0°$$

Condições de Contorno - J

Ex. 2.5: b) $D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S$



$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} J_{n_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} J_{n_2} = \rho_S$$

$$J_{n_1} = J_{n_2} = J_n$$

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right) J_n = \rho_S \Rightarrow \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{r1}}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2}\right) J_n = \rho_S$$

$$\rho_S = 8{,}854.10^{-12} \left(\frac{15}{10^{-2}} - \frac{80}{5}\right) 10 \cos 30°$$

$$\boxed{\rho_S = 1{,}138.10^{-7}\ [\mathrm{C/m^2}]}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

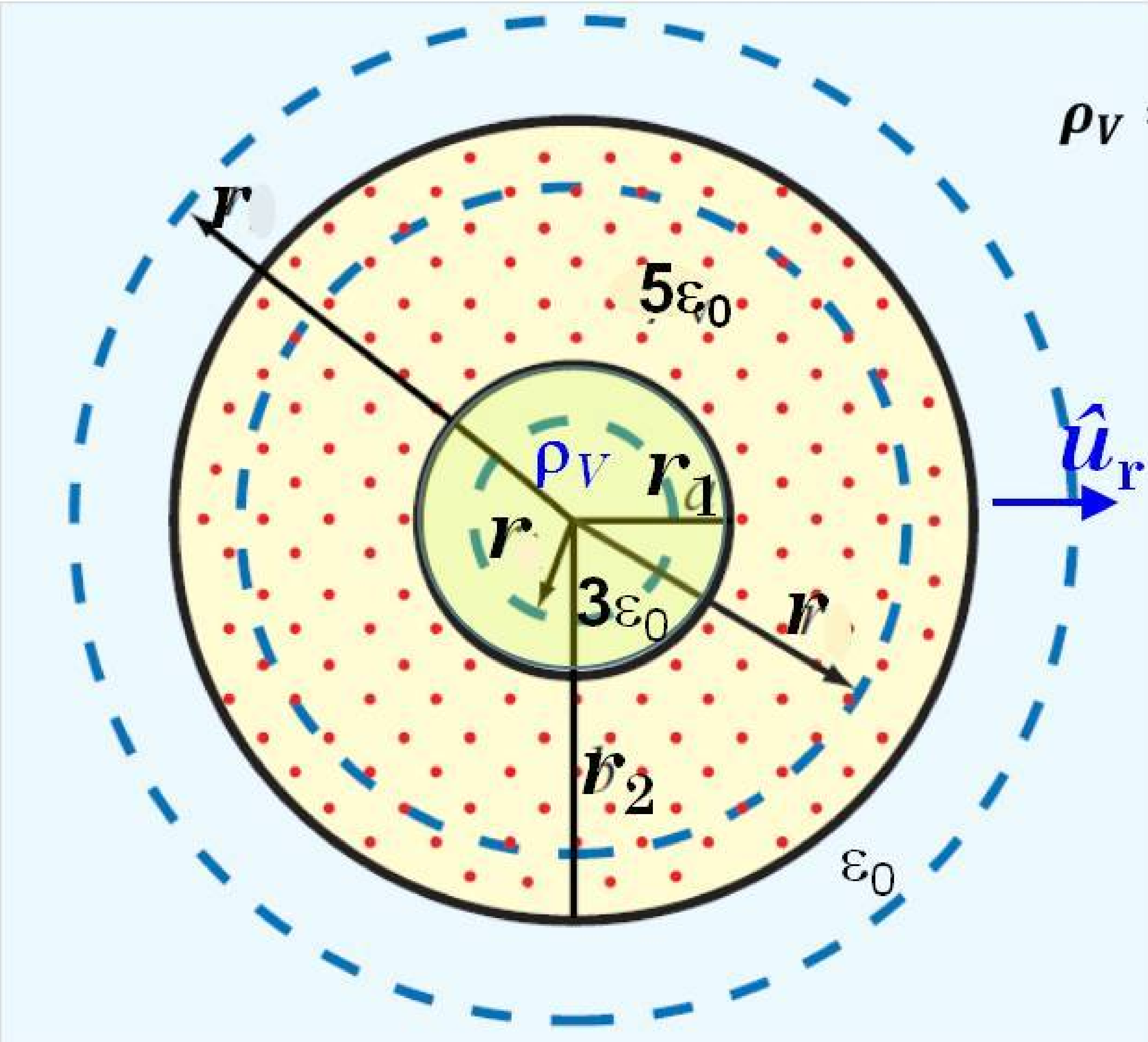
Condições de Contorno - D

Ex. 2.6: Uma esfera feita de material de constante dielétrica $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$, de raio r_1=0,1 m contém a carga total de 1 μC uniformemente distribuída em seu voluma. Uma segunda esfera de $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$, de raio r_2=0,3 m, sem carga elétrica, envolve a primeira. O conjunto das duas esferas está imerso no vácuo, de $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$.

a) Determinar D e E nos três meios em função de *r*.

b) Fazer os gráficos dos 2 vetores em função de *r*.

Condições de Contorno – D, E



$$\rho_V = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{3\times10^{-3}}{4\pi}\ [\mathrm{C/m^3}]$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau$$

$$D_1 4\pi r^2 = \rho_V \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\rho_V}{3} r\, \hat{u}_r$$

$$\boxed{\vec{D}_1 = \frac{10^{-3}}{4\pi} r\, \hat{u}_r}$$