ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EQUAÇÕES DE MAXWELL

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

CONDIÇÕES DE CONTORNO

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Equações de Maxwell – Forma Integral

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Lei de Faraday

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = = \iint_{S} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Lei de Ampère

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Inexistência de Monopólos

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau$$

Lei de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau = 0$$

Eq. Continuidade

Equações de Maxwell – Forma Diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Lei de Ampère

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Inexistência de Monopolos
(Lei de Gauss "magnética")

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$$

Eq. Continuidade

Relações Constitutivas

- As Equações de Maxwell são **4**, mas apenas **2** são independentes: as **2** primeiras (rotacionais)
- Há **4** vetores incógnitas nas **2** equações rotacionais; são necessárias ao menos mais **2** equações vetoriais para a solução completa
- Equações suplementares: ***relações constitutivas***

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Relações Constitutivas

- Descrevem as **propriedades físicas** de um meio, relacionando duas grandezas físicas
- Descrevem a **interação dos campos eletromagnéticos com a matéria** do ponto de vista macroscópico

Relações Constitutivas

LINEAR	NÃO VARIA COM VARIAÇÃO DOS CAMPOS
HOMOGÊNEO	INDEPENDENTE DA POSIÇÃO
ISOTRÓPICO	INDEPENDENTE DA DIREÇÃO NO ESPAÇO
SEM DISPERSÃO	INDEPENDENTE DA FREQUÊNCIA

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Relações Constitutivas

$\vec{E}$ $\vec{D}$ ➔ $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \ [\mathrm{F/m}]$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \ [\mathrm{F/m}]$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

$\vec{B}$ $\vec{H}$ ➔ $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$

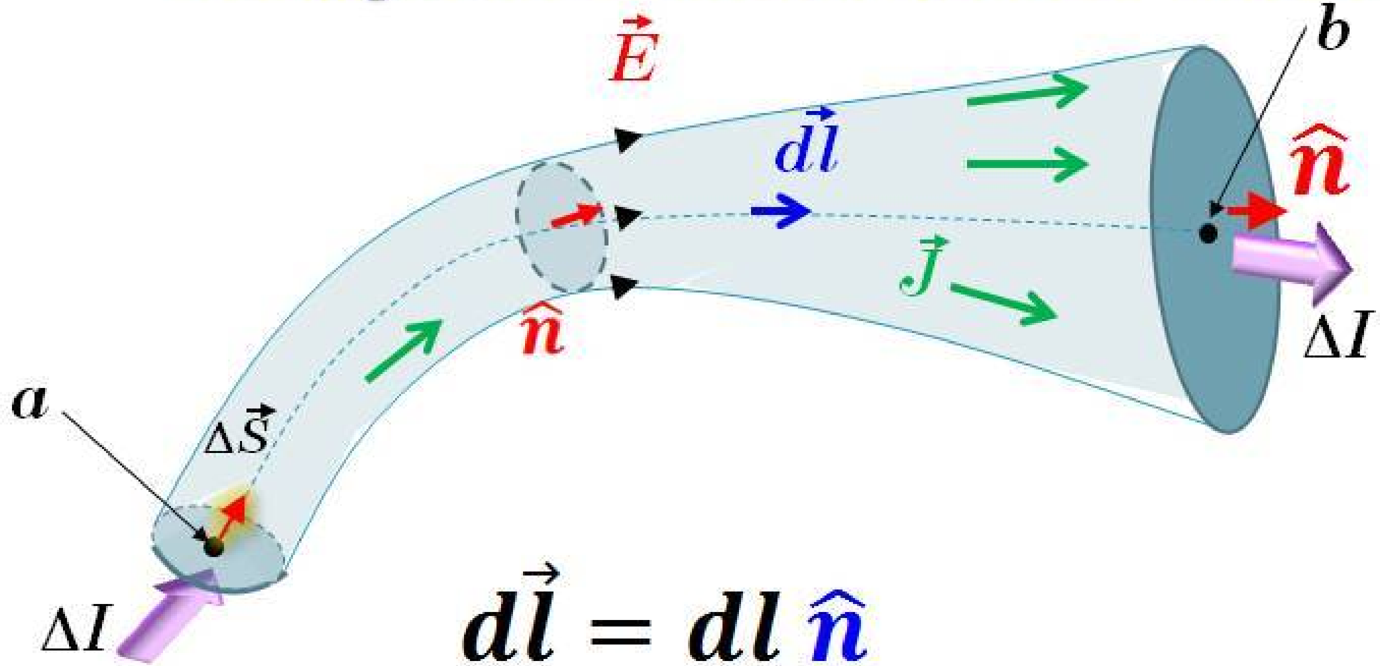
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ [\mathrm{H/m}]$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

Relações Constitutivas - Meios Condutores



$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

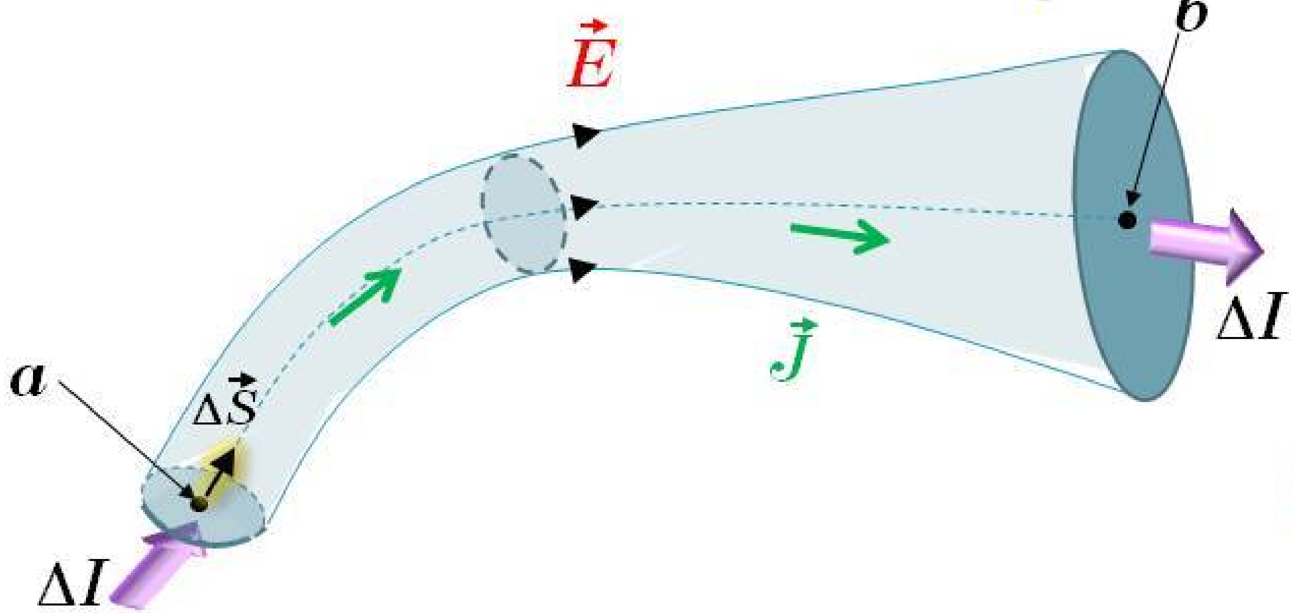
Lei de Ohm

σ → condutividade elétrica do meio [S/m]

$$d\vec{l} = dl\,\hat{n}$$

$$V = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \;\Rightarrow\; V = \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l} \;\Rightarrow\; \vec{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S}\hat{n}$$

Lei de Ohm no Campo Eletromagnético



$$\boxed{V = \Delta I \int_a^b \frac{1}{\sigma \Delta S} \cdot dl}$$

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma \Delta S} \cdot dl \Rightarrow V = R\Delta I \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Lei de Ohm

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Propriedades físicas dos materiais – P e M

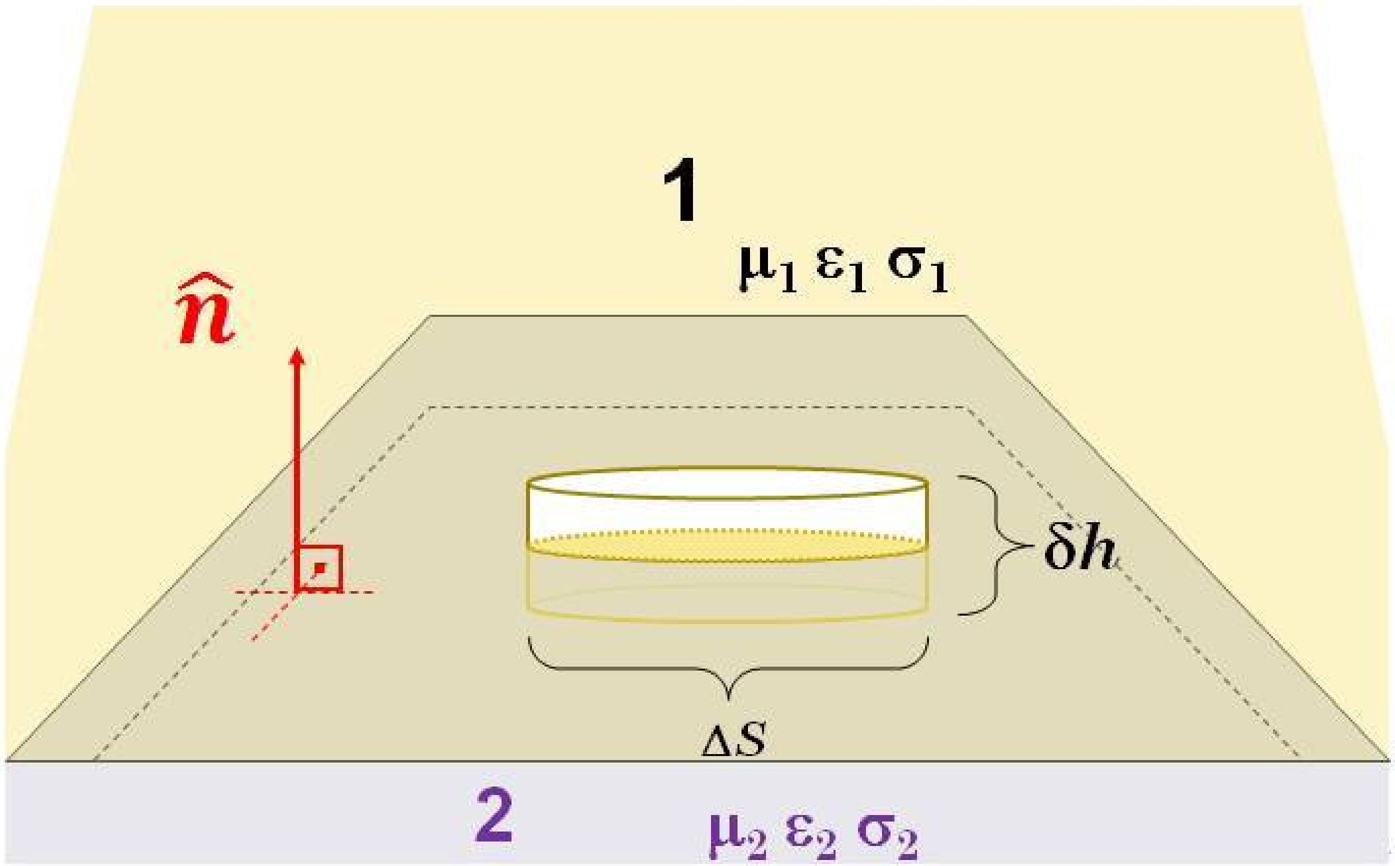
Vetor Polarização Elétrica

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \; [\mathrm{C/m^2}]$$

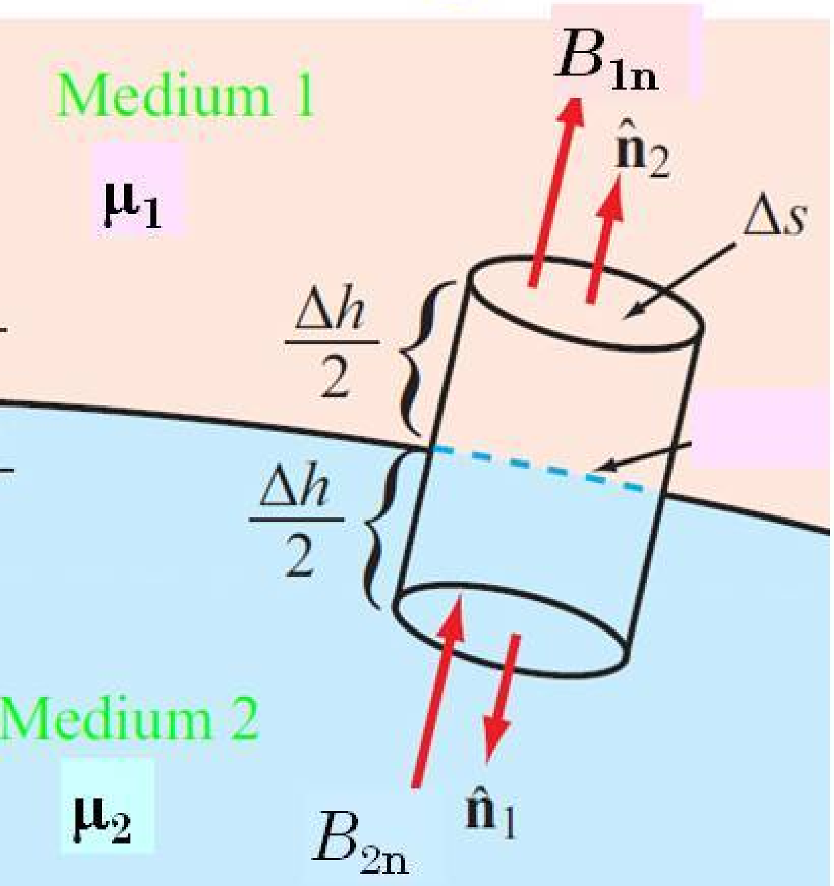
Vetor Polarização Magnética

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H} \; [\mathrm{A/m}]$$

Interface entre dois meios
Condições de Contorno



Condições de Contorno – B, H normais



$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Delta S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\Delta S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$$

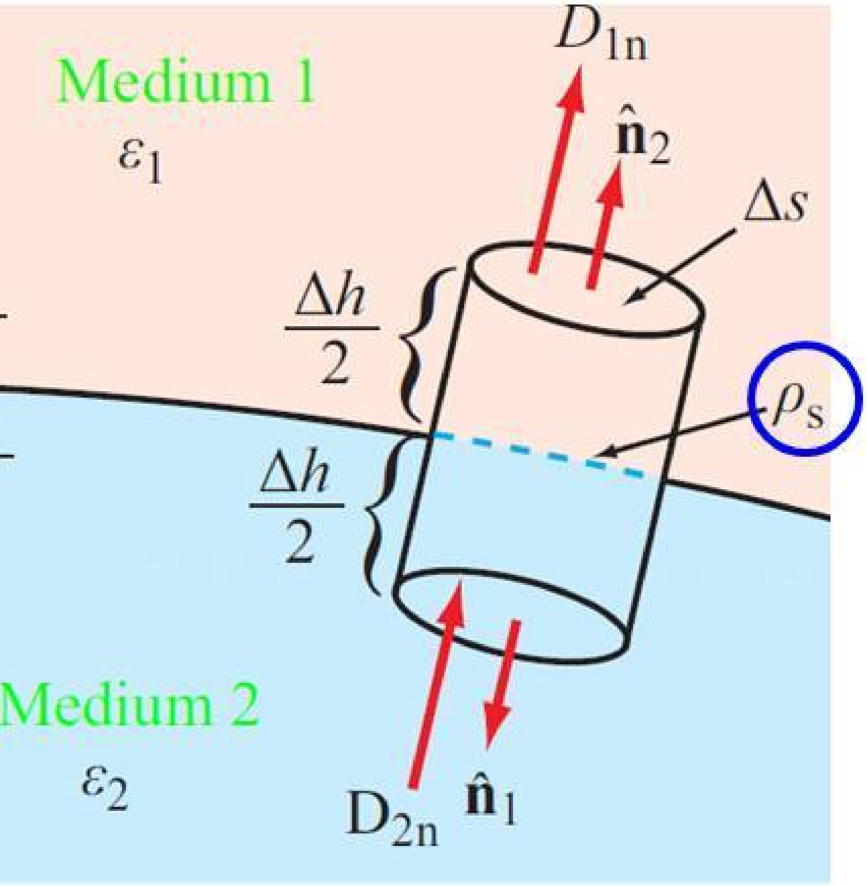
$$\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \vec{B}_1 \cdot \hat{n}\,\Delta S + \vec{B}_2 \cdot (-\hat{n})\Delta S$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = (B_{n_1} - B_{n_2})\Delta S = 0 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} B_{n_1} &= B_{n_2} \\ \mu_1 H_{n_1} &= \mu_2 H_{n_2} \end{aligned}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condições de Contorno – D, E normais



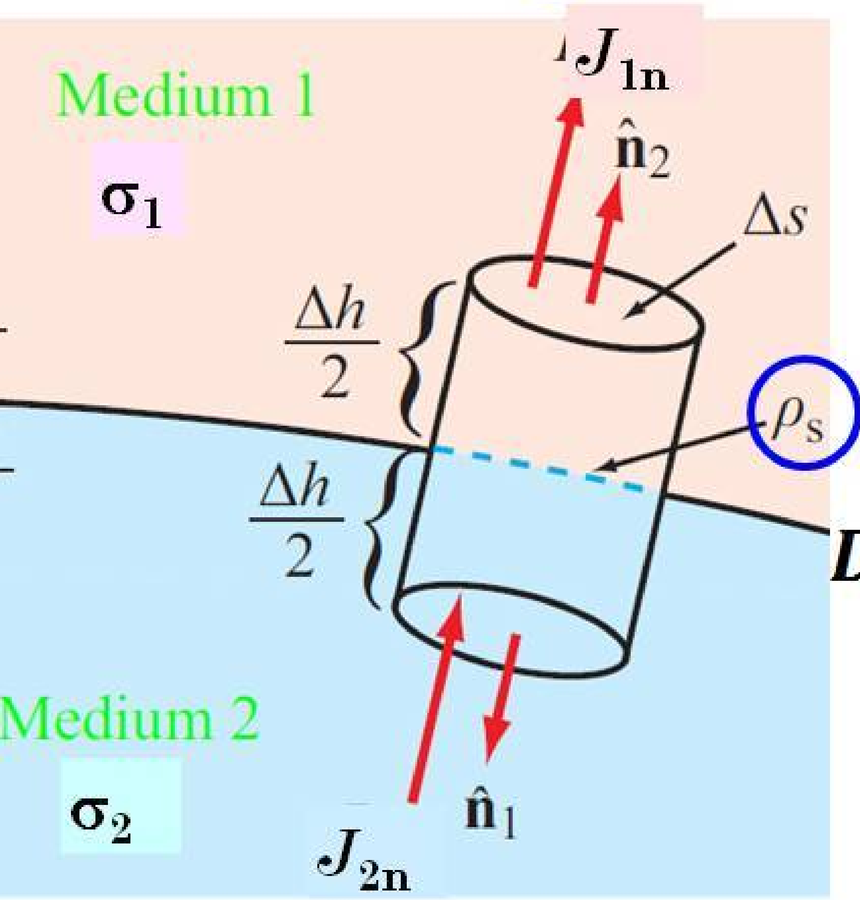
$$\left(D_{n_1} - D_{n_2}\right)\Delta S = \Delta Q \qquad \Delta Q = \rho_S \Delta S$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S$$

$$\rho_S = 0 \Rightarrow D_{n_1} - D_{n_2} = 0$$

$$\varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \rho_S$$

Condições de Contorno – J normal



$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\oiint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

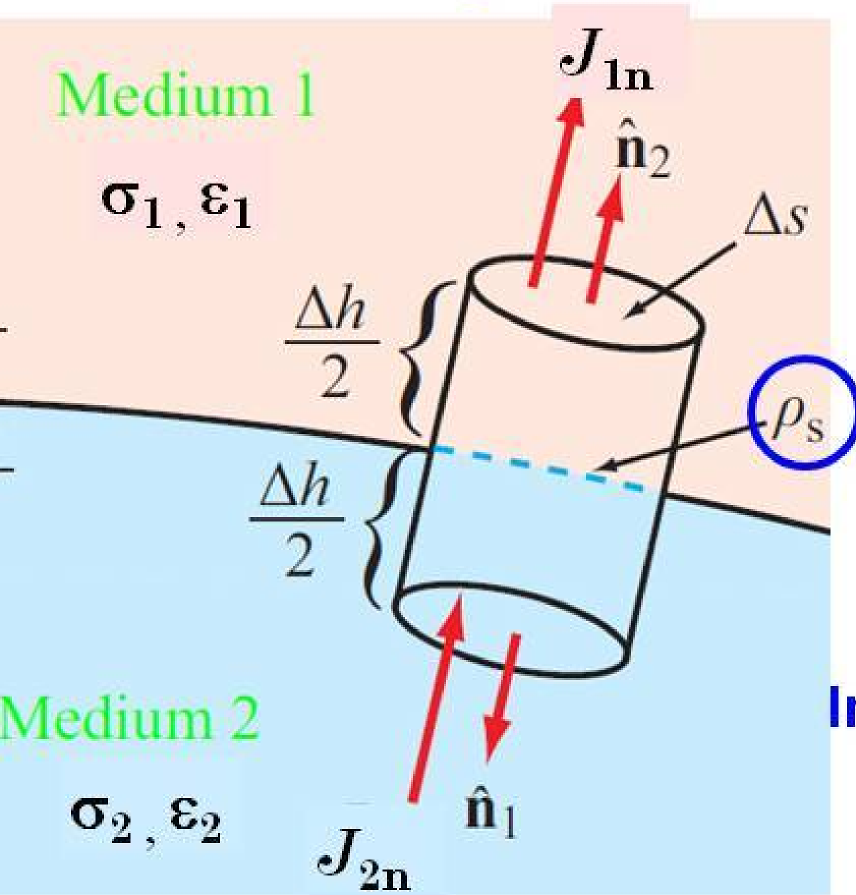
$$J_{n_1} - J_{n_2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{n_1} - D_{n_2}\right)$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_S \qquad J_{n_1} - J_{n_2} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{n_1} - J_{n_2} = 0$$

$$\boxed{J_{n_1} = J_{n_2}}$$

Condições de Contorno – J,E normais



$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \qquad \varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \rho_S$$

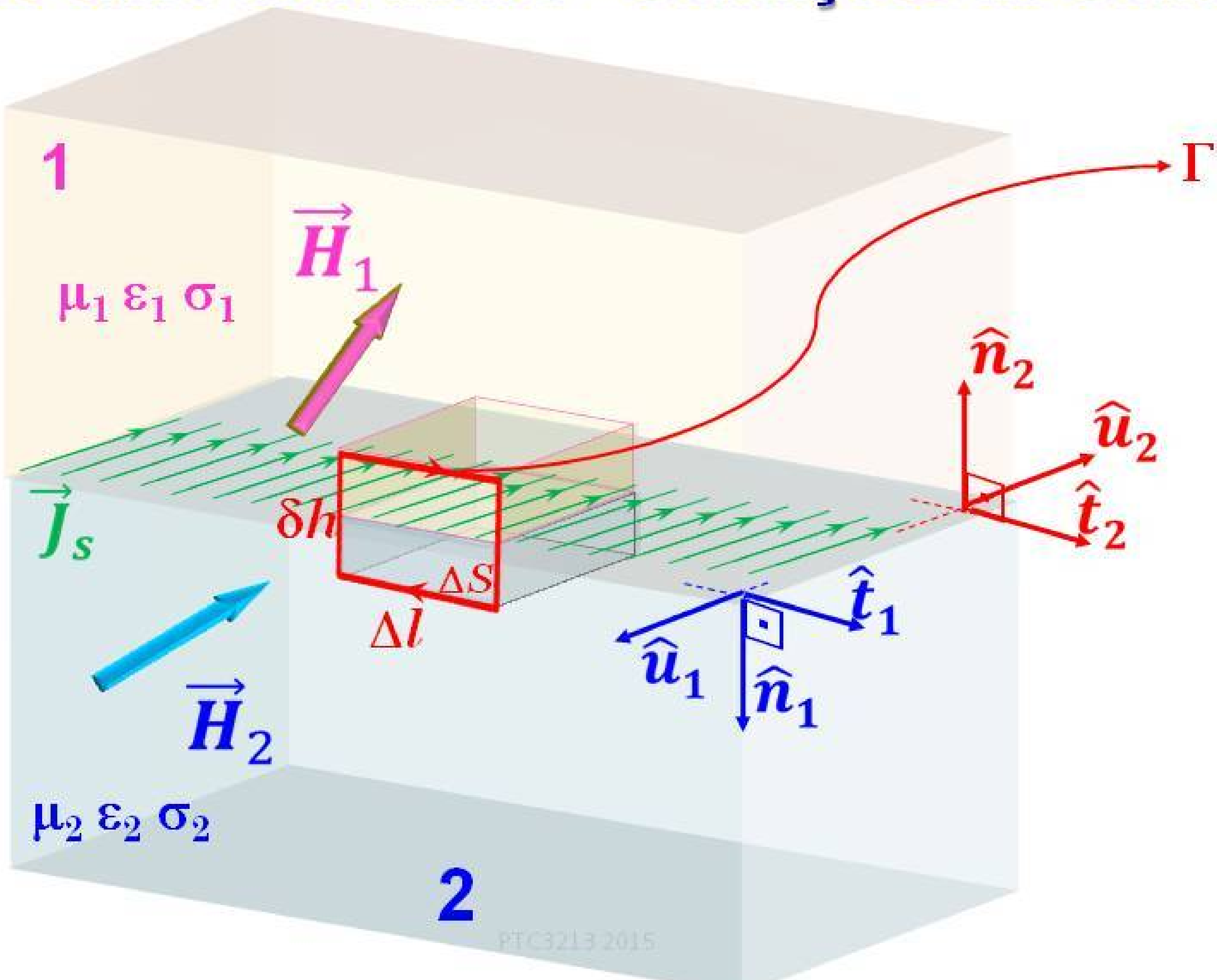
$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} J_{n_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} J_{n_2} = \rho_S$$

$$J_{n_1} = J_{n_2} \Rightarrow \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right) J_n = \rho_S$$

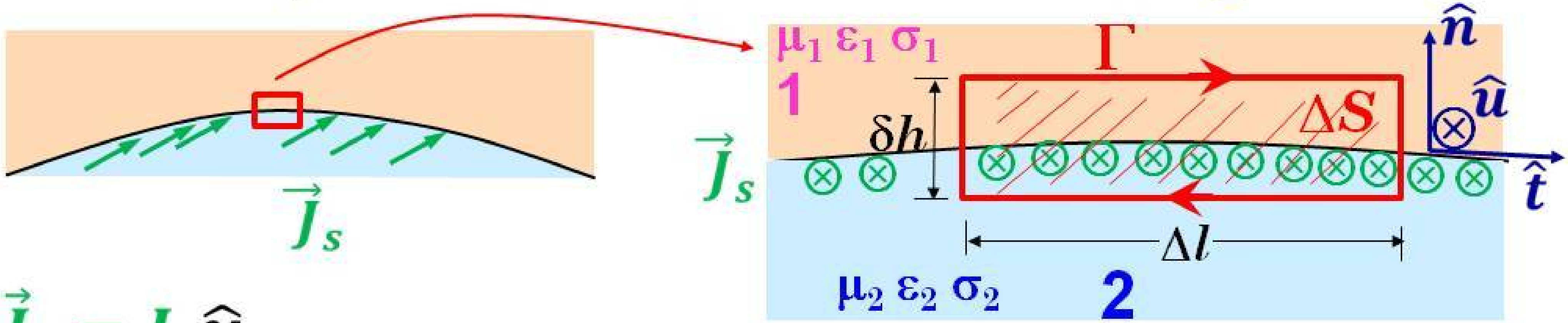
Interface de dois condutores → haverá sempre ρ_S

Se: $\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1} = \dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \Rightarrow \rho_S = 0$

Interface entre dois meios - Condições de Contorno



Condições de Contorno – H e E tangenciais



$$\vec{J}_s = J_s \hat{u}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{dl} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}\,\Delta l - \vec{E} \cdot \hat{n}\,\delta h - \vec{E}_2 \cdot \hat{t}\,\Delta l + \vec{E} \cdot \hat{n}\,\delta h =$$

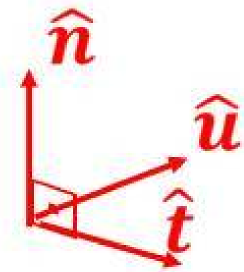
$$-\frac{d}{dt}\iint_{\Delta S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{u}\,\Delta S$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condições de Contorno – E tangencial

$$\delta h \to 0 \Rightarrow \Delta S \to 0$$

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t}\, \Delta l - \vec{E}_2 \cdot \hat{t}\, \Delta l = 0$$



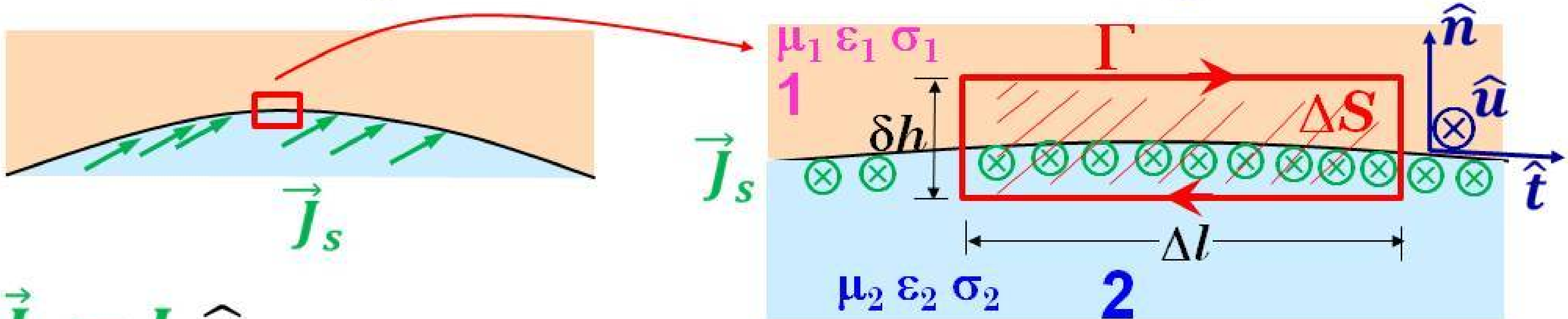
$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t} = \vec{E}_2 \cdot \hat{t}$$

$$\boxed{\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2}}$$

$$\boxed{\hat{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0}$$

$$\boxed{\frac{\vec{D}_{t_1}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{t_2}}{\varepsilon_2}}$$

Condições de Contorno – H tangencial



$$\vec{J}_s = J_s \hat{u}$$

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \boxed{\vec{H}_1\cdot\hat{t}\,\Delta l - \vec{H}_2\cdot\hat{t}\,\Delta l} = \boxed{\iint_{\Delta S}\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{dS}}$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\cdot\hat{t}\,\Delta l = \vec{J}_s\cdot\hat{u}\,\Delta l$$

$$\hat{u} = \hat{n}\times\hat{t}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condições de Contorno – H tangencial

$$\delta h \to 0 \Rightarrow \Delta S \to 0$$

$$\hat{u} = \hat{n} \times \hat{t}$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \cdot \hat{t} = \vec{J}_s \cdot \hat{n} \times \hat{t} = \vec{J}_s \times \hat{n} \cdot \hat{t}$$

$$\boxed{\vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \vec{J}_s \times \hat{n}}$$

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)$$

Se $\vec{J}_s = 0$ ⇨ $\hat{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = 0$

$$\boxed{\vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_2}} \Rightarrow \frac{\vec{B}_{t_1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{t_2}}{\mu_2}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Condições de Contorno

Componente	Normal B	Normal D	Tang. E	Tang. H
Forma geral	$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_2) = \boldsymbol{0}$	$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$	$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)=0$	$\hat{\boldsymbol{n}} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)=\vec{J}_s$
Sem fontes na Interface	$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}_1} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}_2}$	$D_{n_1} - D_{n_2} = 0$	$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{t}_1} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{t}_2}$	$\vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{t}_1} = \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{t}_2}$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}_1} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}_2} \qquad \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\sigma}_1} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\sigma}_2}\right) \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S}}$$