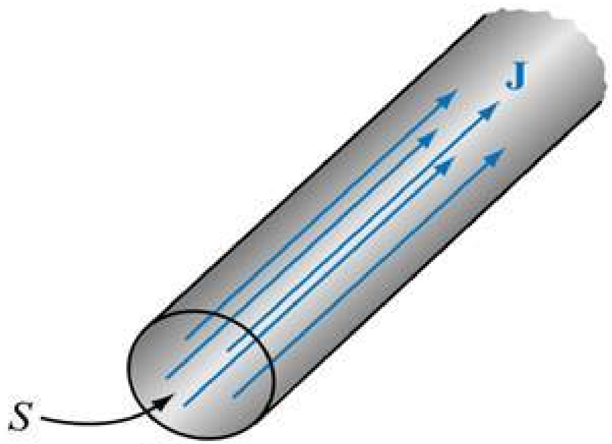
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Densidade de Corrente Campo Elétrico e Vetor Deslocamento Equação da Continuidade

Densidade de Corrente

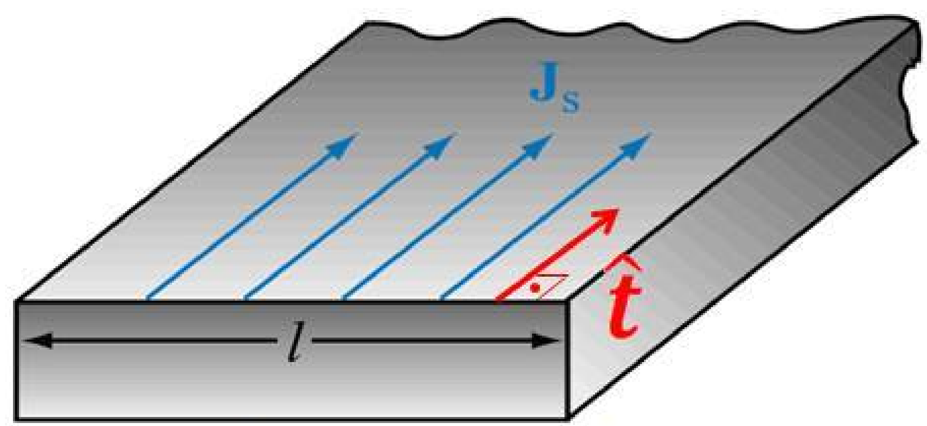
- **<u>CORRENTE ELÉTRICA E SUAS DENSIDADES</u>: Vetor Densidade de Corrente e Densidade Superficial**

$\vec{J}$ [A/m^2]



$$I = \oiint_S \vec{J} \cdot \Delta\vec{S}$$

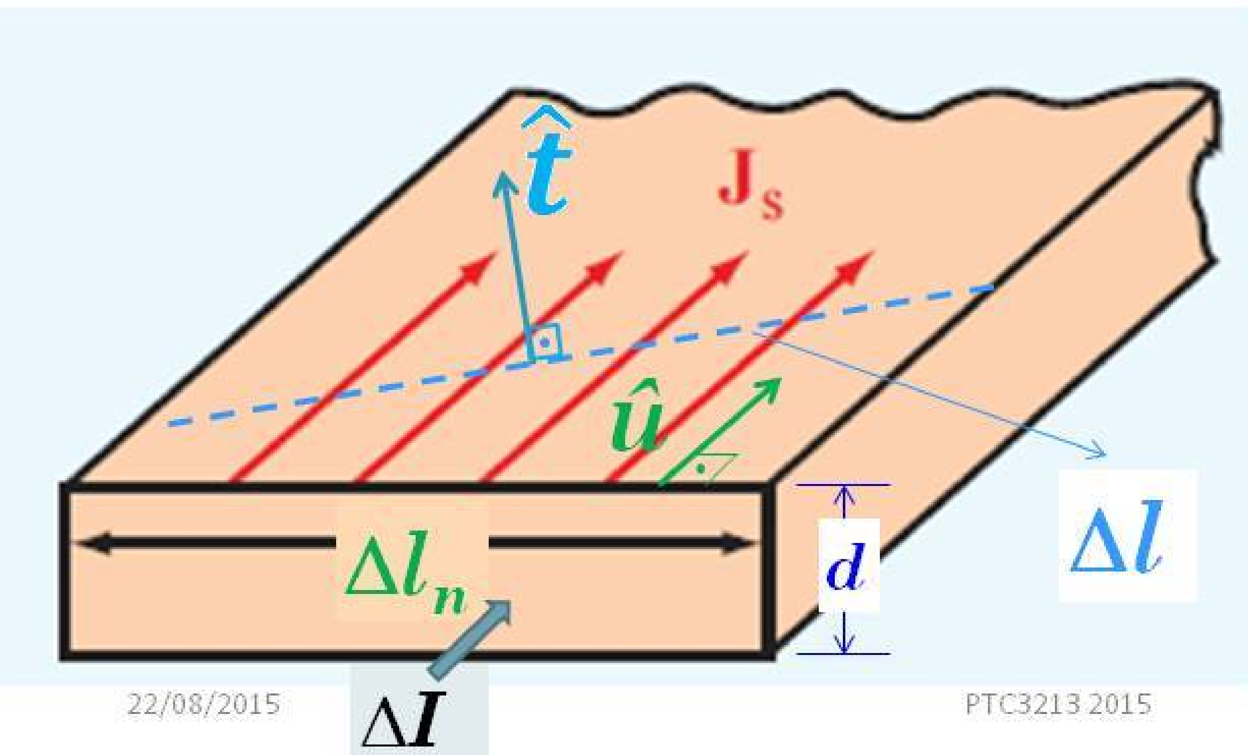
$\vec{J}_S$ [A/m]



$$I = \oint_l \vec{J}_S \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{J}_S \cdot \hat{t}\, dl$$

Distribuição superficial de corrente

- $\vec{J}_S$ - Campo de corrente superficial no condutor
- $d << \Delta l_n$
- ΔI – Corrente que atravessa a “linha” Δl_n



$$\vec{J}_S = \frac{\Delta I}{\Delta l_n} \hat{u} \text{ [A/m]}$$

$$\Delta I = \vec{J}_S \cdot \hat{t}\, \Delta l$$

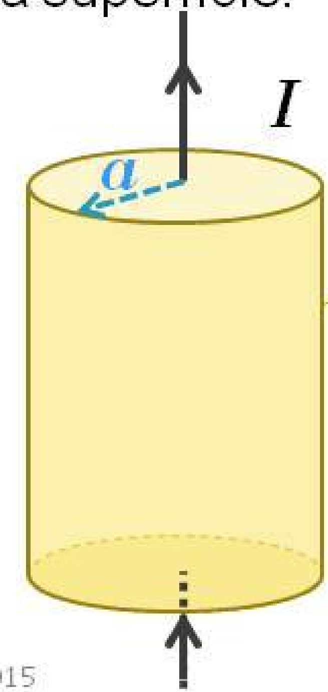
$\hat{u}$, t:

- tangentes à superfície condutora
- $\perp$ a Δl_n e Δl, respectivamente

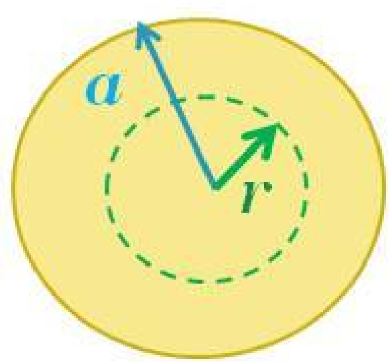
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Densidade Superficial de Corrente

Ex. 1.3 – Considere uma superfície condutora cilíndrica de raio a e comprimento l, fechada por duas superfícies condutoras circulares (tampas) e conectada a uma fonte de corrente contínua de valor I através de fios ligados ao centro das tampas. Determine a densidade de corrente que flui nessa superfície.

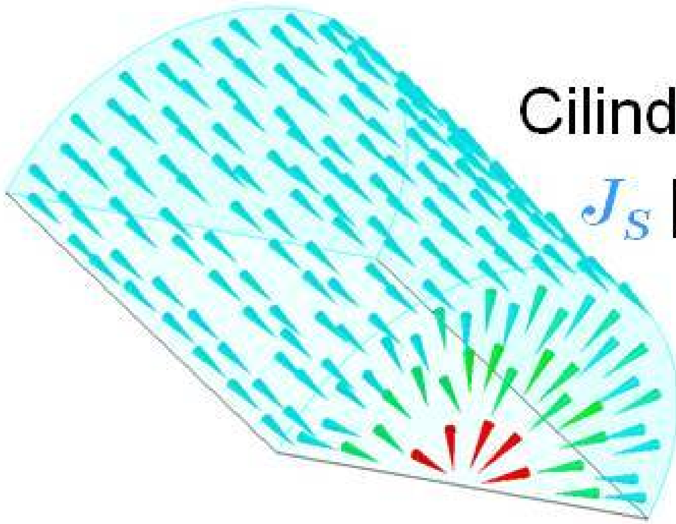


Nas laterais ➡ $$J_S = \frac{I}{2\pi a}$$



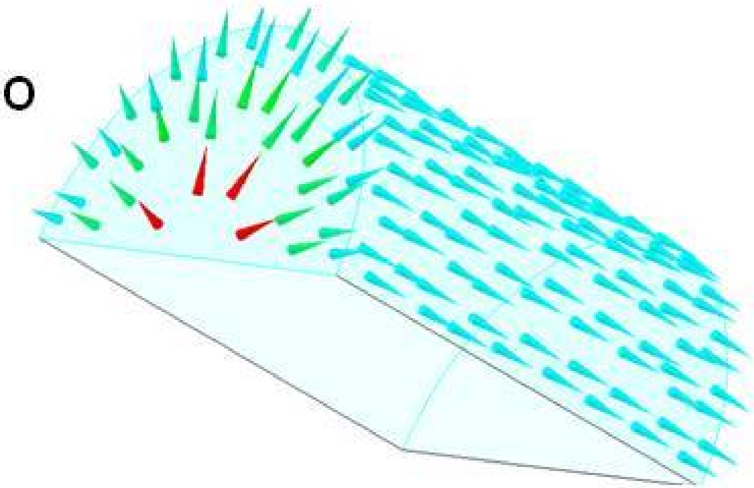
Nas tampas ➡ $$J_S = \frac{I}{2\pi r}$$

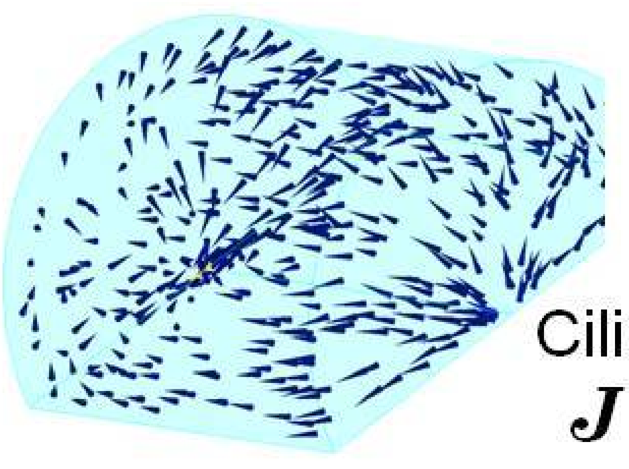
Distribuição do Vetor Densidade de Corrente



Cilindro oco

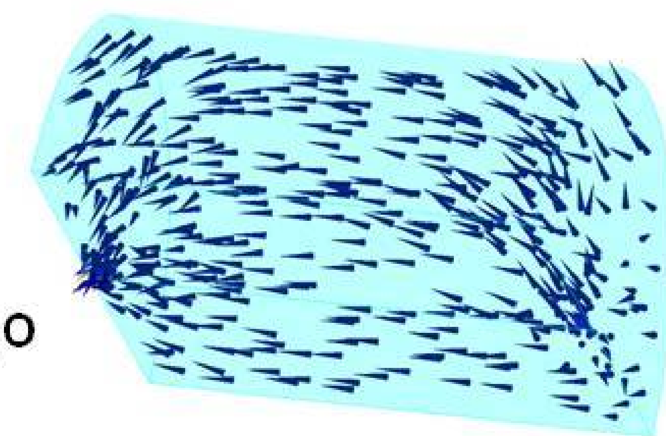
J_S [A/m]





Cilindro maciço

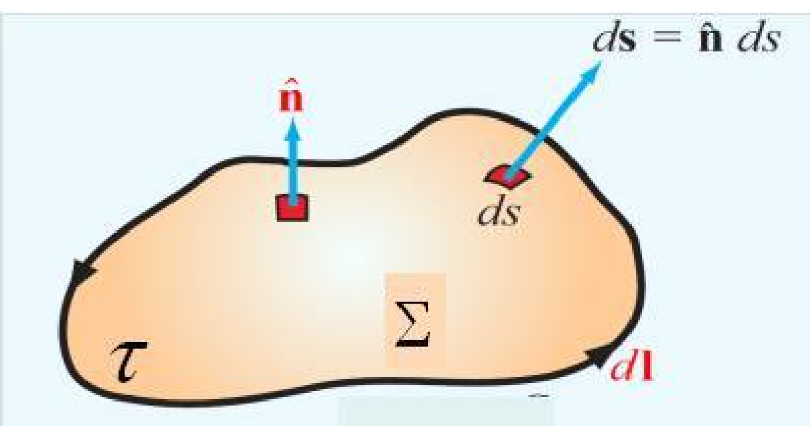
$\boldsymbol{J}$ [A/m^2]



Teorema da Divergência e Significado Físico

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

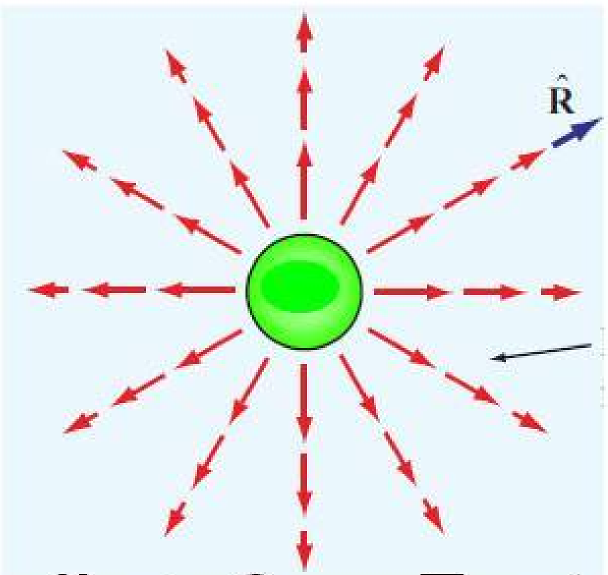
$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{A}\, d\tau$$



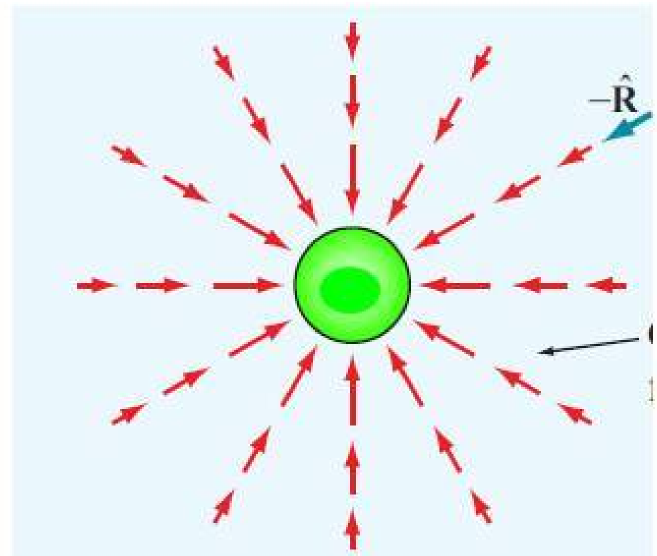
Σ se contrai em pto. de τ em que $\nabla \cdot A \neq 0$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Sigma \to 0} \frac{1}{\tau} \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} \neq 0$$

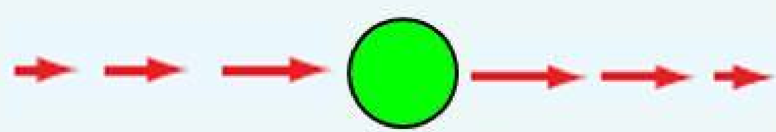
Divergência de um Campo Vetorial



div > 0 $\rightarrow$ Fonte



div < 0 $\rightarrow$ Sorvedouro



div = 0

Equação da Continuidade

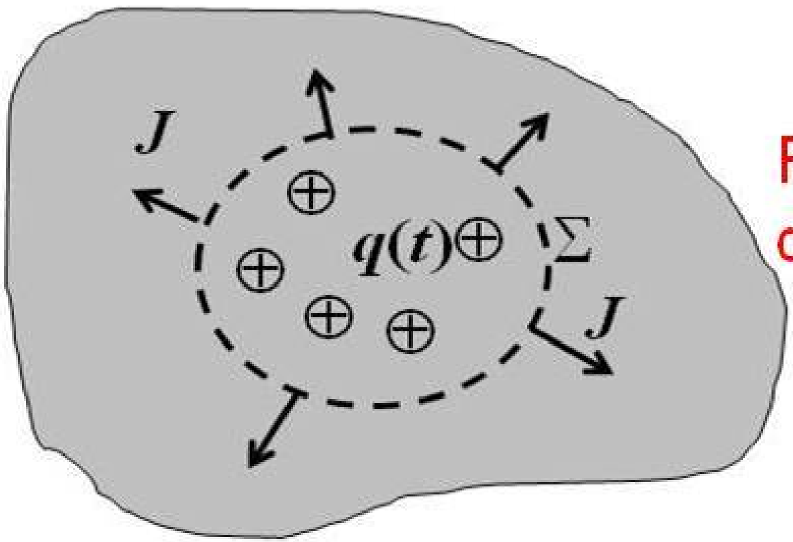
Expressa o princípio da conservação de cargas elétricas

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \Delta\vec{S} = -\iiint_{\tau} \frac{d\rho_v}{dt} d\tau$$

Forma integral

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \Delta\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{J}\, d\tau$$



Forma diferencial

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Equação da Continuidade

No regime estacionário $\partial / \partial t = 0$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Lei de Kirchhoff das Correntes

Lei de Coulomb e Vetor Intensidade de Campo Elétrico

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\hat{u}_{\mathrm{r}}$$

Q: carga "fonte"
q: carga de prova

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 8{,}988 \times 10^9\ [\mathrm{m/F=Nm^2/C^2}]$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \ [\mathrm{F/m}]$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \ [\mathrm{F/m}]$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\ \ [\mathrm{V/m = N/C}]$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{r}}}$$

Vetor Intensidade de Campo Elétrico

Campo Elétrico E [V/m ou N/C]:

Propriedade que o espaço adquire quando nas suas proximidades é colocada uma carga elétrica Q [C].

Efeito de E: aparecimento de força sobre q, $F = qE$

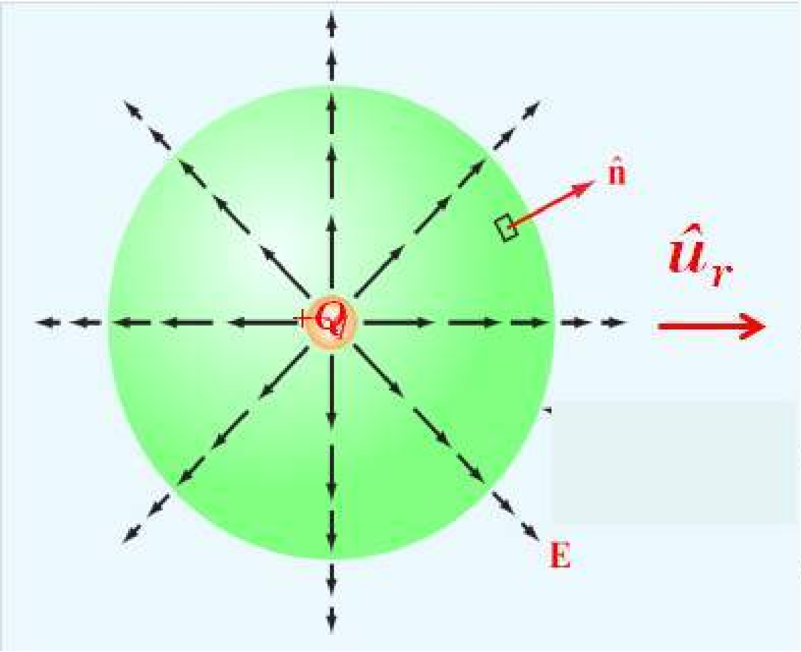
$$F \,//\, E$$

Consome Energia para deslocar a carga

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Vetor Intensidade de Campo Elétrico

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{u}_r$$



- E depende de Q e da distância r a Q
- $+Q \Rightarrow E$ na direção $+\hat{u}_r$
- $-Q \Rightarrow E$ na direção $-\hat{u}_r$
- Para mesmos valores de r, E constante

Potencial Escalar Elétrico – Tensão Elétrica

Forma alternativa de calcular E

- E calculado a partir de um potencial escalar V
- V definido a partir de Força F e Trabalho realizado W
- W **positivo**: realizado **contra** o sistema
- W **negativo**: realizado **pelo** o sistema
- $+Q$ e $+q$: movimentando $+q$ **contra** $E \rightarrow W$ **positivo** $\rightarrow$ **aumenta** energia potencial do sistema
- $+Q$ e $+q$: deixando $+q$ **se movimentar devido a** $F \rightarrow W$ **negativo** $\rightarrow$ **diminui** energia potencial do sistema até repouso.

Potencial Escalar Elétrico – Diferença de Potencial

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_b - W_a \ [\mathrm{J}]$$

$$V = \frac{W}{q} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}\right] \Rightarrow V_{ba} = \frac{W}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W_b - W_a}{q}$$

$$\boxed{V_{ba} = \frac{W}{q} = V_b - V_a \quad [\mathrm{V}]}$$

Potencial Elétrico V

- V não depende do caminho entre a e b. Isso vale apenas para ***campos estacionários***
- V só depende da distância radial entre a e b a partir da carga fonte
- V é constante em qualquer superfície esférica com a carga fonte no seu centro
- V é constante em linhas e superfícies $\perp$ a E

Densidade de Fluxo Elétrico e Fluxo Elétrico

- **Lei de Coulomb**: experimental.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{u}_{\mathrm{r}} \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{r}}$$

- $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{E}$ dependem das características do meio (ε)
- Por conveniência define-se $\boldsymbol{D}$, independente do material $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\ \ [\mathrm{A/m^2}]$ Densidade de Fluxo Elétrico ou Deslocamento

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Densidade de Fluxo Elétrico e Fluxo Elétrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \quad [\mathrm{A/m^2}]$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r$$

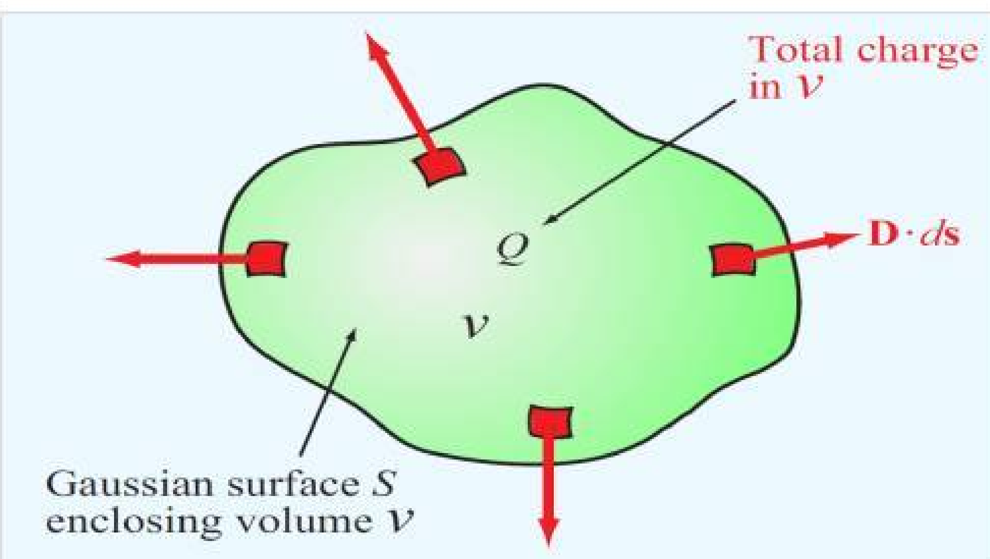
Fluxo Elétrico ⇐ $$\Psi = \oiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot d\vec{S} \quad [\mathrm{C}]$$ $= Q$

Densidade de Fluxo Elétrico e Fluxo Elétrico
- Vetor Deslocamento

- Vetor Deslocamento D [C/m^2] ou Densidade de Fluxo Elétrico - Lei de Gauss

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv} \Rightarrow \boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q} \Rightarrow$$

Fluxo Elétrico numa superfície S



A Lei de Gauss é mais simples de se aplicar que a Lei de Coulomb, mas sua utilidade é limitada a distribuições de carga simétricas.
Sua aplicação depende de uma escolha adequada de S
O meio não influencia a integral, ou seja, o "fluxo elétrico"

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Vetor Deslocamento – *D*
Lei de Gauss

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad \Psi = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \ \ [\mathrm{C}]$$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau \quad \Rightarrow$$

Forma Integral

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{D} \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho_v \, d\tau \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

Forma Diferencial

Corrente de Deslocamento

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad [\mathrm{A/m^2}]$$

Corrente de Deslocamento:

$$i_D = \oiint_{\Sigma} \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iiint_{\tau} \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \oiint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Equação da Continuidade Forma Integral