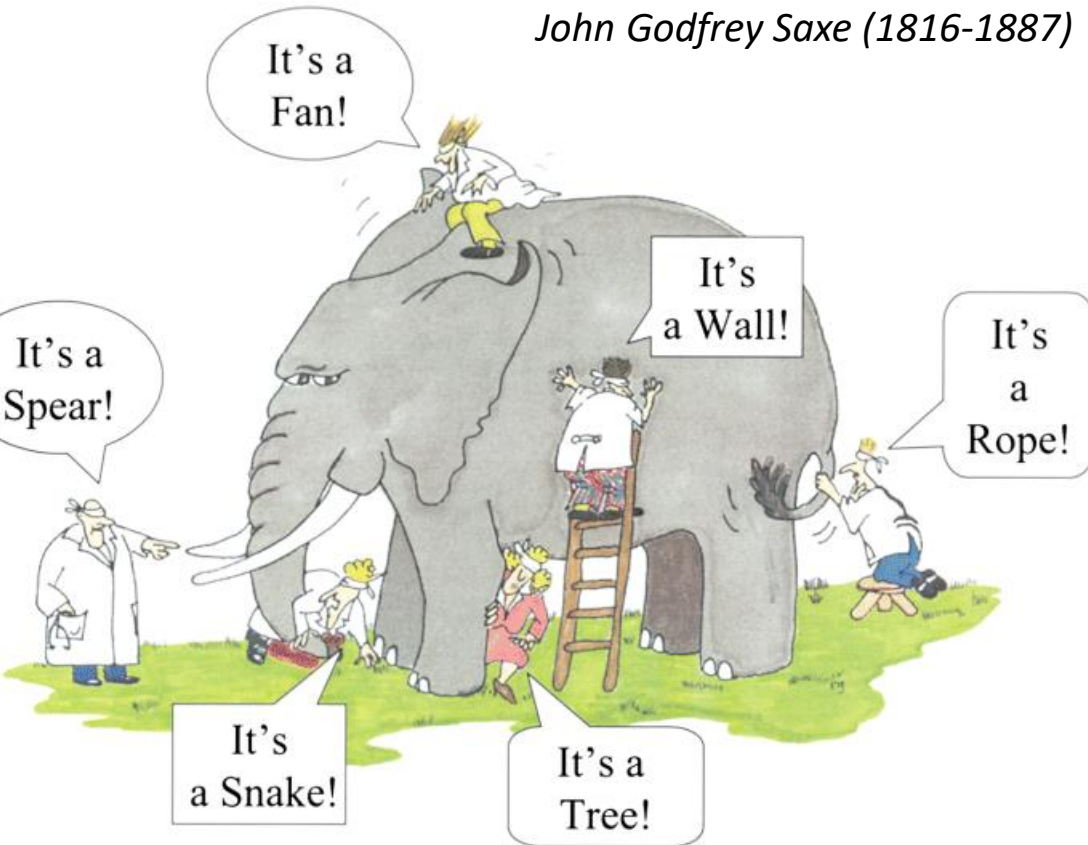


And so these men of Indostan,  
Disputed loud and long,  
Each in his own opinion,  
Exceeding stiff and strong,  
Though each was partly in the right,  
And all were in the wrong!

*John Godfrey Saxe (1816-1887)*



# PMR5026 – Elementos Finitos Linear: Teoria, Programação e Experimentos

## Aula 01: Introdução

*Profa. Dra. Larissa Driemeier*

*Prof. Dr. Marcilio Alves*

*Prof. Dr. Rafael Traldi Moura*

Aula	Data	Assunto	Professor
1	17/2	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modelagem em engenharia</li><li>• Mecânica dos Sólidos</li><li>• Introdução ao Método dos Elementos Finitos</li></ul>	Rafael
2	02/3	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos finitos 1D - estático</li><li>• Ensaios experimentais e modelos de material</li></ul>	Rafael
3	09/3	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos finitos 1D - dinâmico</li></ul>	Marcilio
4	16/3	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos Finitos de viga - estático</li></ul>	Marcilio
5	23/3	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos Finitos de viga - dinâmico</li></ul>	Marcilio
6	30/3	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos Finitos de viga - análise modal</li></ul>	Marcilio
7	13/4	<ul style="list-style-type: none"><li>• Ensaio experimental: vibrações em viga</li></ul>	Rafael
8	27/4	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos finitos isoparamétricos – estático</li></ul>	Larissa
9	04/5	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos finitos isoparamétricos – Integração numérica</li></ul>	Larissa
10	11/5	<ul style="list-style-type: none"><li>• Elementos finitos isoparamétricos – dinâmico</li></ul>	Larissa
11	18/5	<ul style="list-style-type: none"><li>• Ensaio experimental: vibrações em placa</li></ul>	Rafael

A média final é composta por:

$$\text{Média final} = 0,5 * \text{Media}_{EX} + 0,5 * \text{Media}_{Pr}$$

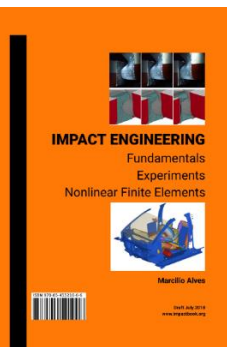
- **Media<sub>Pr</sub>** significa média de projetos;
  - **Programas: podem** ser feitos em dupla;
- **Media<sub>EX</sub>** significa média de exercícios;



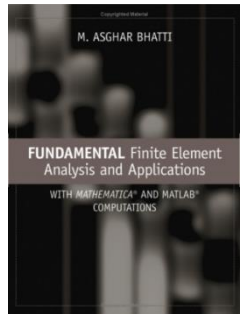
- **AVELINO ALVES FILHO** “*Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE*”, 5ª Edição – Editora Érica.



- **AVELINO ALVES FILHO** “*Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise Dinâmica*”, 2ª Edição – Editora Érica.



- **MARCÍLIO ALVES** “*IMPACT ENGINEERING: FUNDAMENTALS, EXPERIMENTS, NONLINEAR FINITE ELEMENTS*”, 1ª Edição disponível online em [www.impactbook.org](http://www.impactbook.org).



- **M. ASGHAR BHATTI** “*Fundamental Analysis and Applications with Mathematica and MatLab computations*”, 1ª Edição – Editora Wiley.



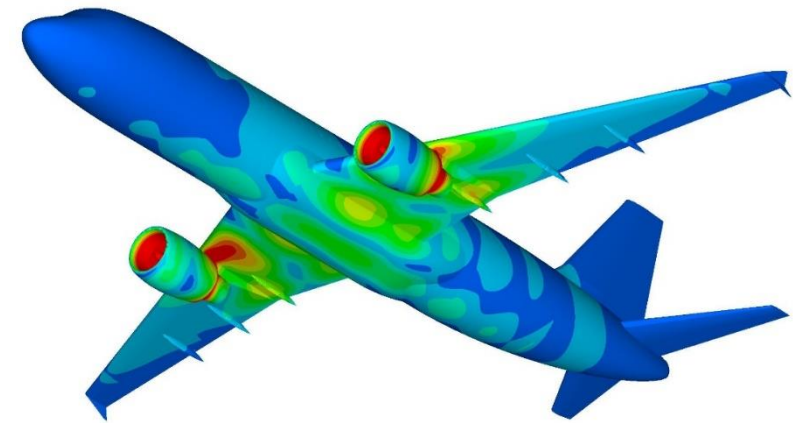
- **KLAUS-JURGEN BATHE** “*Finite Element Procedures*”, 2ª Edição – Editora Prentice Hall.

- Um pouco de engenharia...
  - MEF.
- Um pouco de postura de engenheiro...
  - Curiosidade;
  - Cuidado;
  - Capricho;
  - Responsabilidade;
  - Atitude.

Segundo Prof. Dr. Avelino Alves Filho (livro texto),

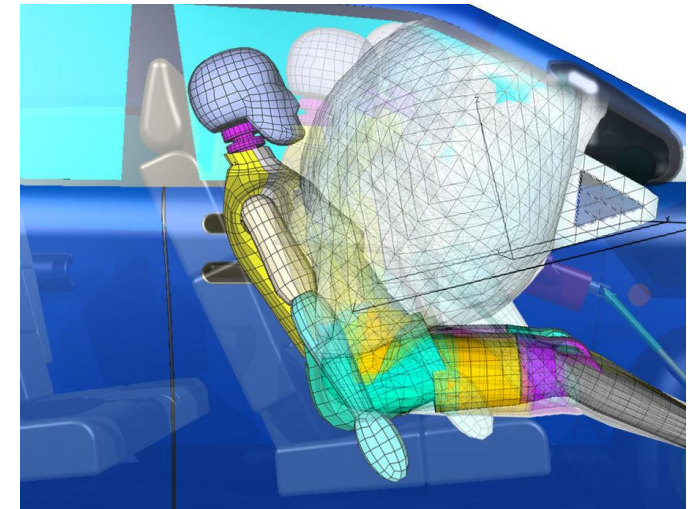
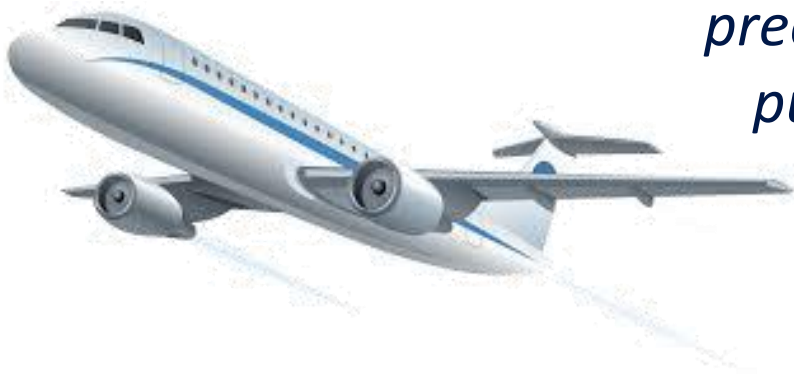
*“Um dos pontos mais importantes que contribui comprovadamente para o sucesso e progresso dos recursos de CAE, e que tive a oportunidade de verificar nos anos de trabalho nesta área, está relacionado aos CONCEITOS OBRIGATÓRIOS NA UTILIZAÇÃO DA TECNOLOGIA CAE. Muitos profissionais que iniciam suas aplicações na área de Elementos Finitos encontram dificuldades, pois o aprendizado de uso de software é feito sem base conceitual, confundindo o aprendizado de manuseio de programa com o conhecimento do Método dos Elementos finitos. Justifica-se portanto, a filosofia de abordagem:*

***SE O ENGENHEIRO NÃO SABE MODELAR O PROBLEMA SEM TER O COMPUTADOR, ELE NÃO DEVE FAZÊ-LO TENDO O COMPUTADOR!”***



O problema é bem resumido pelo Dr A. R. Sykes, do *British Institution of Engineers*, que, em 1976, disse:

*Engineering is the art of modelling materials we do not wholly understand, into shapes we cannot precisely analyse, so as to withstand forces we cannot precisely assess, in such a way that the public has no reason to suspect the extent of our ignorance.*





Problema real

**Simplificações e aproximações**

Modelo físico

**Eq. Diferencial governante**

Modelo matemático

**Discretização**

Modelo numérico

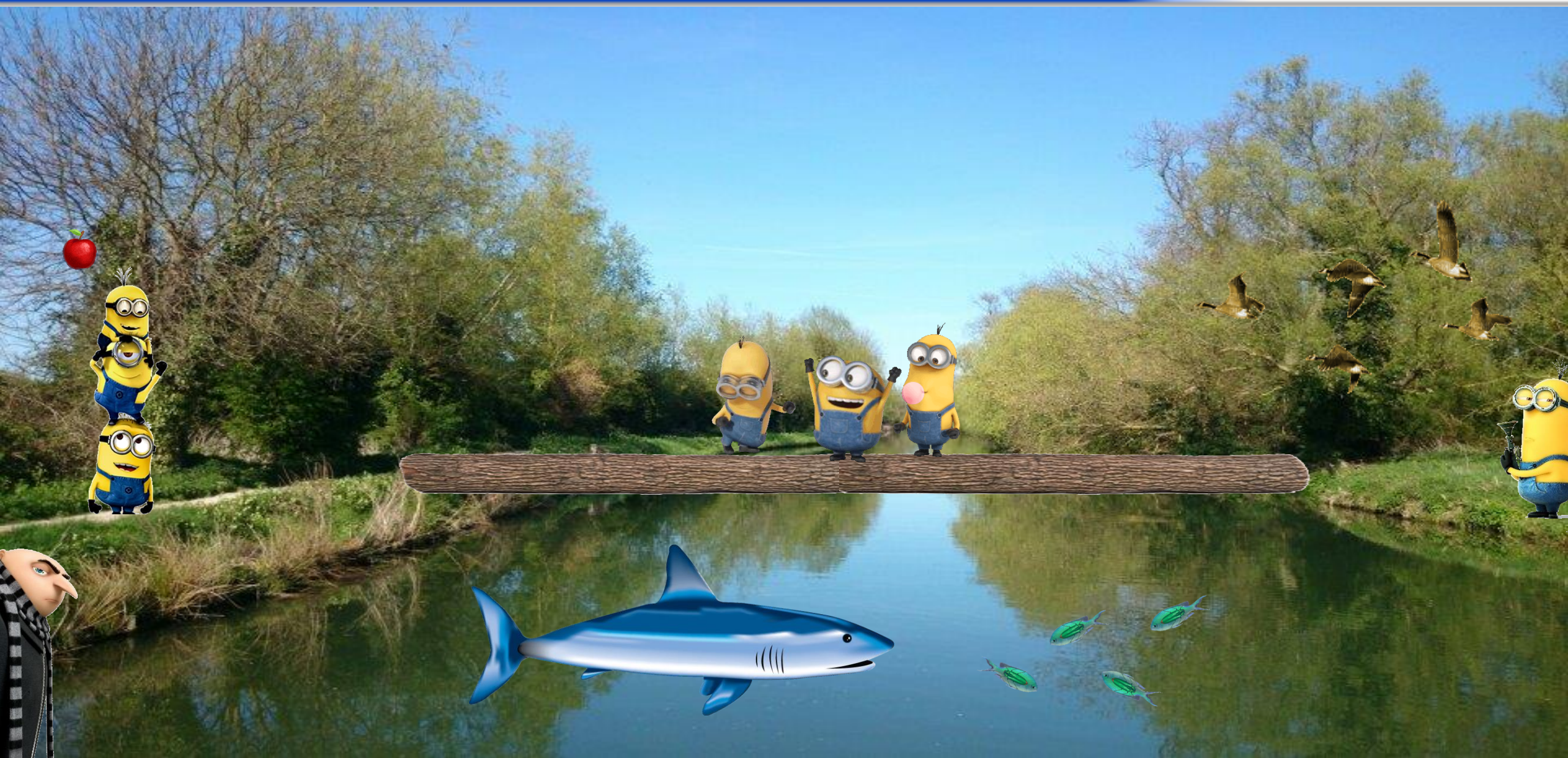
**Solução de Sistemas de Equações**

Análise



MODELO FÍSICO

# O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear



- O engenheiro constrói um **modelo**, a partir de um problema que não possui solução exata, e acha uma solução aproximada ótima.

*Modelar é o processo de escrever uma equação ou sistema de equações que descreve o movimento de um mecanismo físico. O sucesso do modelo é determinado por quão bem a solução da equação prevê o comportamento observado no sistema real.*

# O mundo é tridimensional, dinâmico e não linear

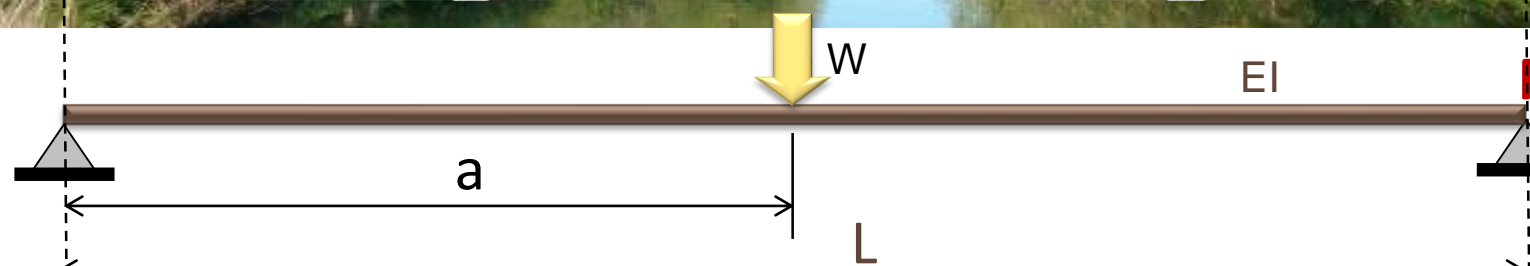
**SISTEMA  
REAL**

Serão desprezados  
quaisquer efeitos  
dinâmicos

Peso concentrado na posição  
correspondente ao centro de  
gravidade do corpo

O tronco tem seção  
transversal constante e a  
madeira é um material  
homogêneo

Apoios  
ideais



**MODELO FÍSICO**  
Viga bi-apoiada

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x)$$

**MODELO MATEMÁTICO**  
Teoria simples de Viga

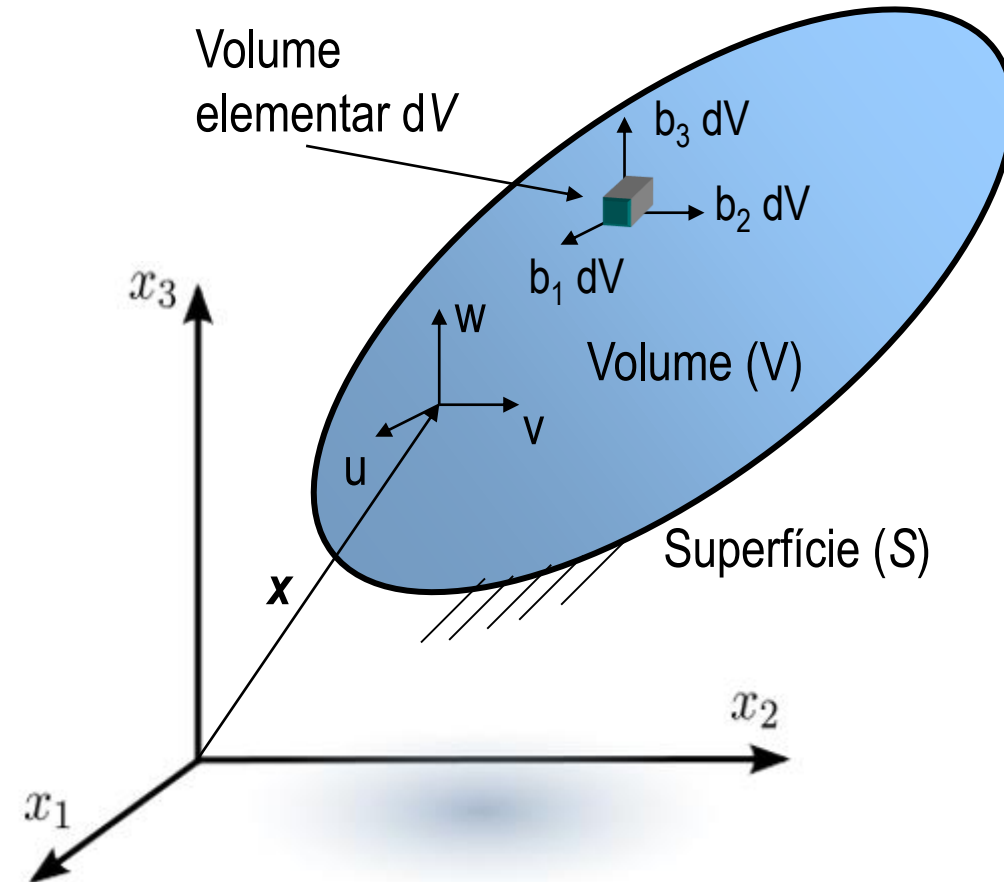
- Um bom modelo deve:
  - Considerar os aspectos essenciais do problema;
  - Desprezar os fatores secundários;
  - Fornecer resultados próximos o **suficiente** das respostas reais.
- Habilidade em modelamento é baseada na visualização do problema físico e relacionamento com o que queremos analisar:
  - Distribuição de temperatura?
  - Campo de tensões?
  - Campo de deformações?
- Se as previsões do modelo não estão de acordo com as respostas reais ou esperadas é necessário refinar o modelo:
  - Incluir aspectos inicialmente desprezados.



# MODELO MATEMÁTICO

As forças de volume são descritas sempre por unidade de massa ou de volume e **não** necessitam de contato para transmissão. São exemplos:

- Gravidade;
- Forças eletromagnéticas;
- Forças de inércia;
- Coriolis, centrífuga, etc.



Forças de volume:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Se o corpo é acelerado, então as forças de inércia,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \rho \ddot{u} \\ \rho \ddot{v} \\ \rho \ddot{w} \end{Bmatrix}$$

Forças totais de volume:

$$\mathbf{X} = \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$$



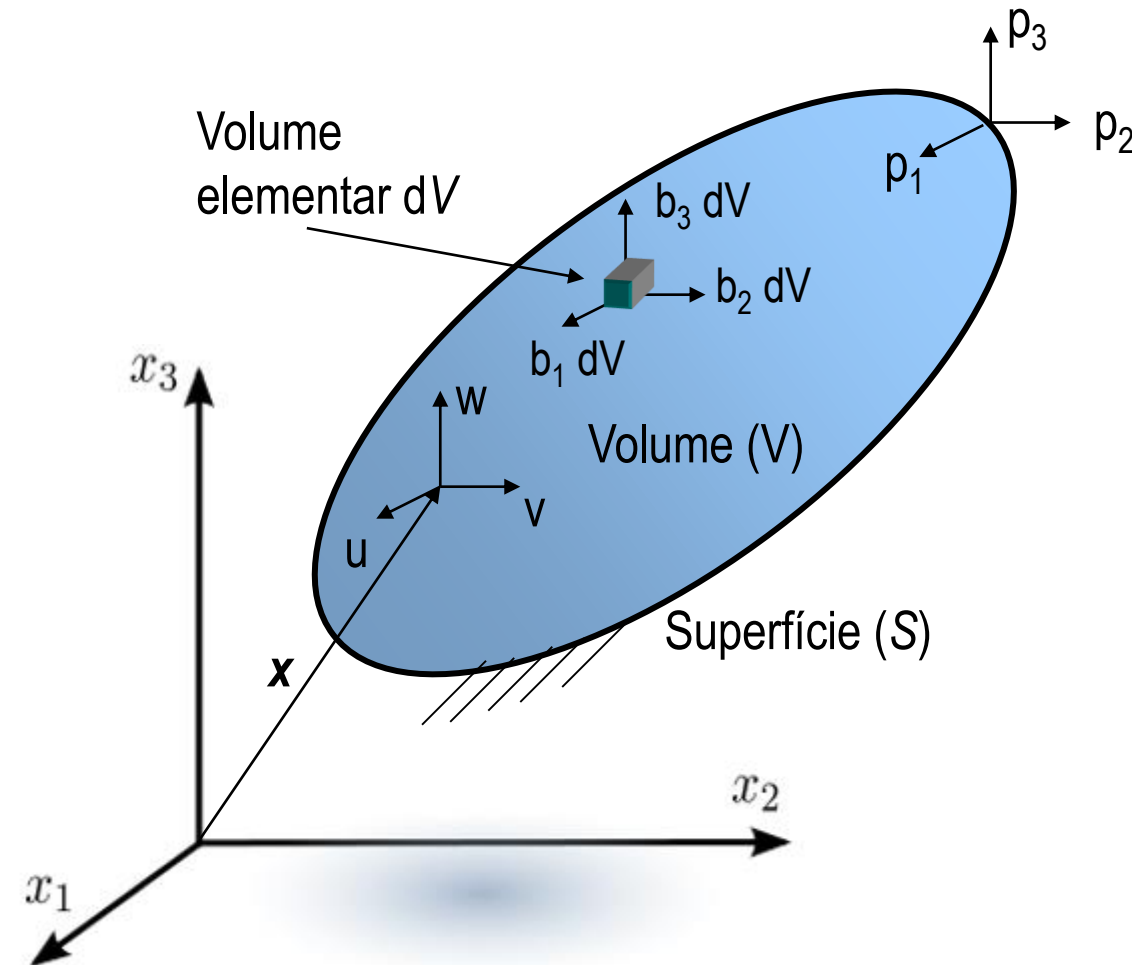
As forças de superfície são descritas sempre por unidade área e necessitam de contato para transmissão.

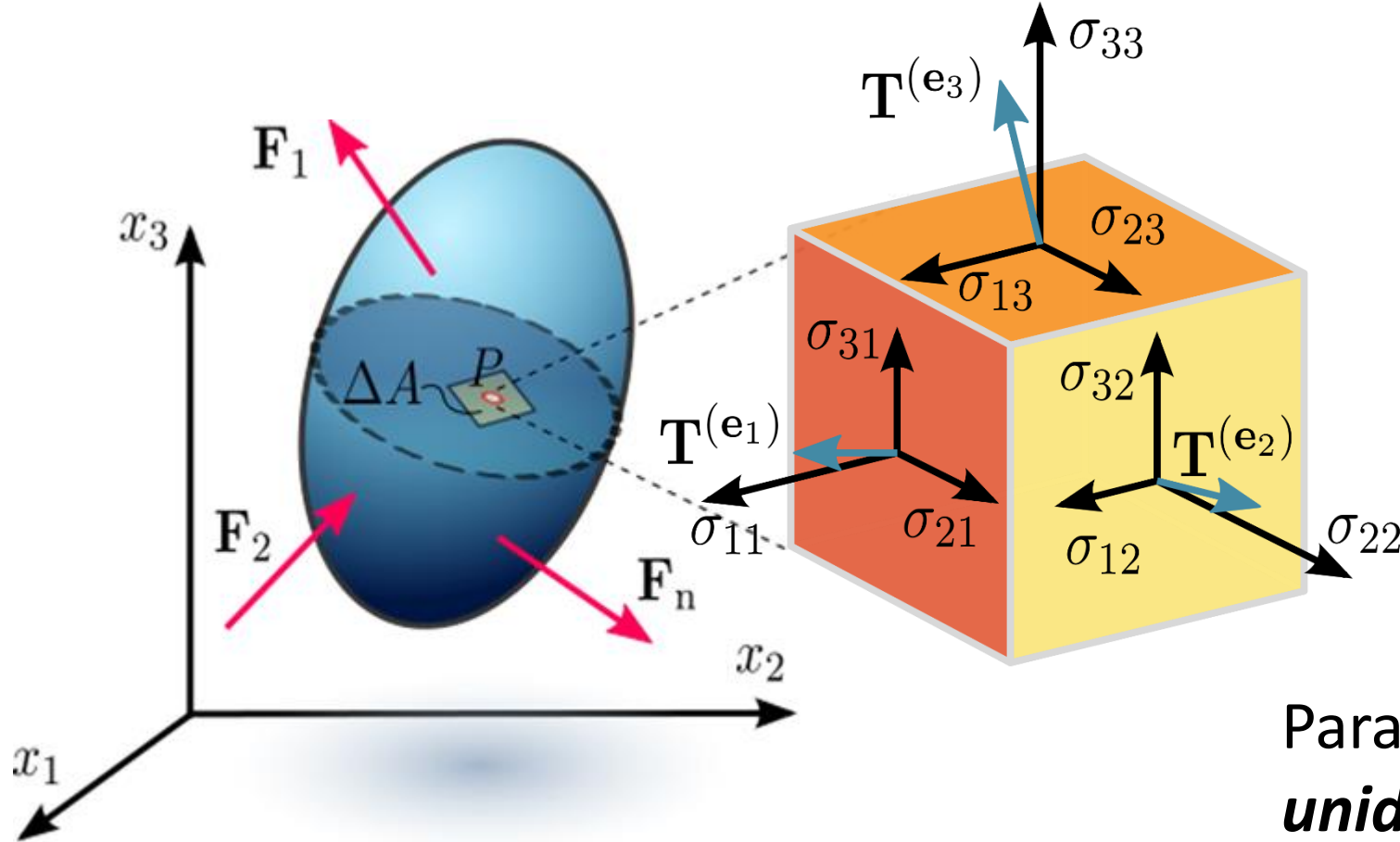
São exemplos:

- Atrito;
- Força normal;
- Força cisalhante;
- Pressão, etc.

Força distribuída por unidade de superfície

$$\mathbf{T}_S = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$





Se extrairmos um *volume elementar* do corpo vamos ver que, devido às forças externas aplicadas, há forças de reação.

Para o cubo, as **forças internas por unidade de área** (setas azuis), em cada face, podem ser decompostas em três componentes ortogonais.

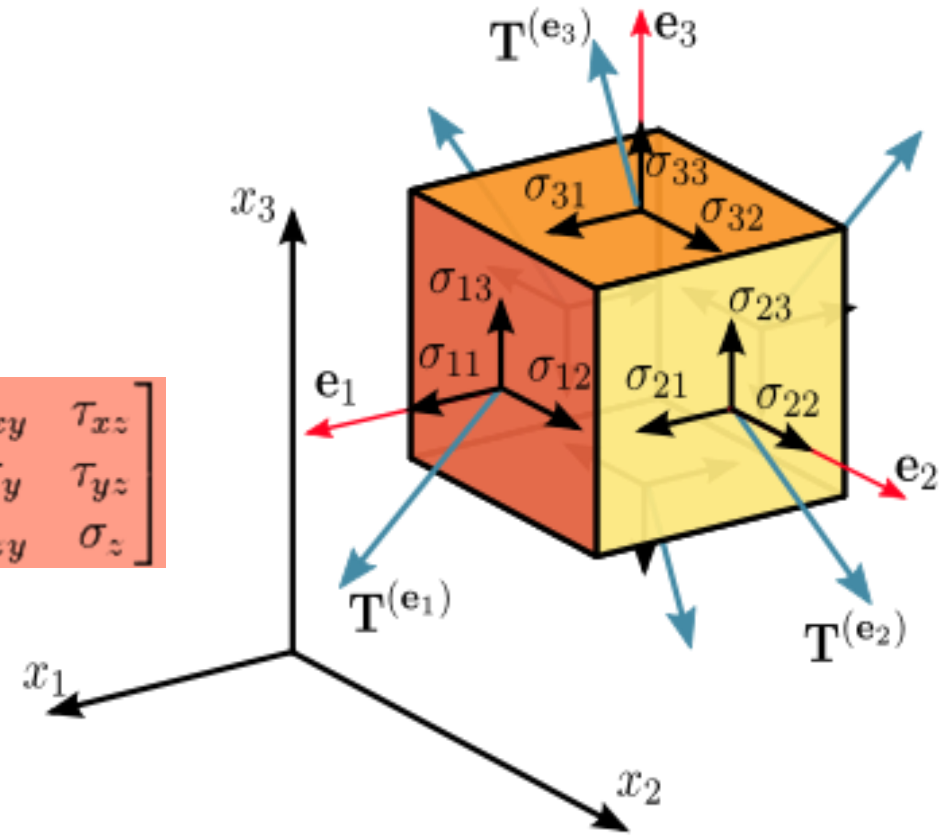
Pode-se decompor os vetores de tensão em componentes normais e cisalhantes

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(e_1)} &= T_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}^{(e_2)} &= T_1^{(e_2)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_2)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_2)} \mathbf{e}_3 = \sigma_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}^{(e_3)} &= T_1^{(e_3)} \mathbf{e}_1 + T_2^{(e_3)} \mathbf{e}_2 + T_3^{(e_3)} \mathbf{e}_3 = \sigma_{31} \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{(e_i)} = T_j^{(e_i)} \mathbf{e}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(e_1)} \\ \mathbf{T}^{(e_2)} \\ \mathbf{T}^{(e_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

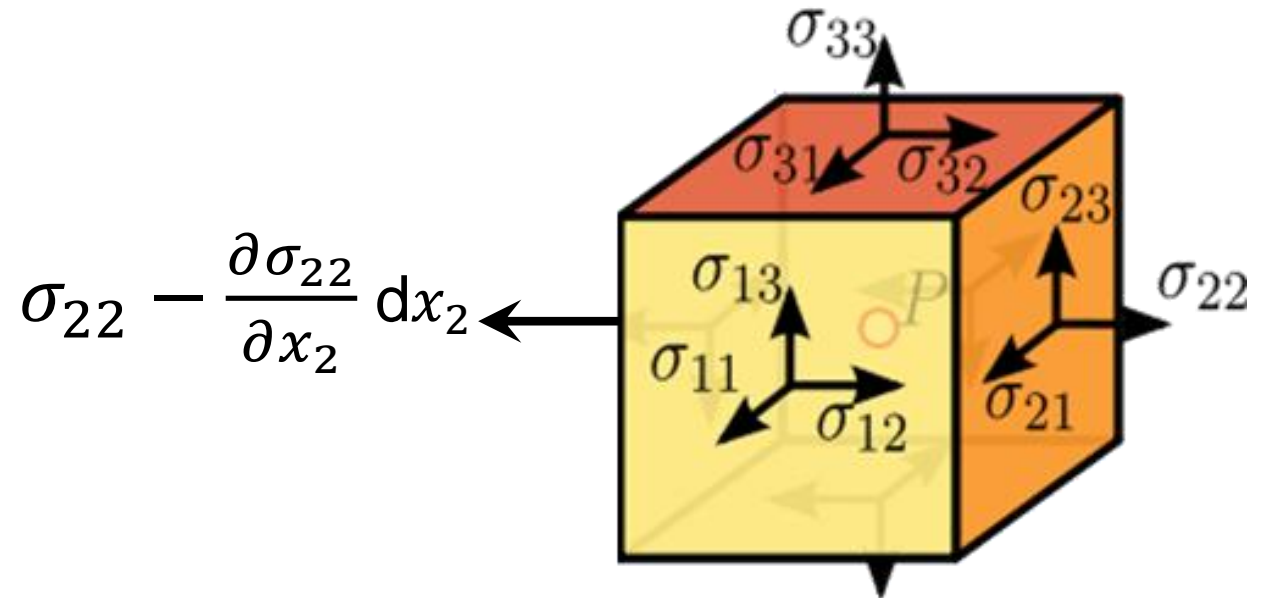
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy\\_stress\\_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor)

Considere o equilíbrio de um volume diferencial para obter as 3 equações de equilíbrio,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$



De forma compacta, temos:

Forma forte de equilíbrio

## EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Equilíbrio Estático

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

Equilíbrio Dinâmico

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{t^2}$$



Onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

e

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

***“Dado o carregamento externo aplicado (em  $S^T$  e em  $V$ ) e os deslocamentos prescritos (em  $S^u$ ) queremos encontrar deslocamentos, deformações e tensões, que mantêm o corpo em equilíbrio.”***

## Equações de equilíbrio

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{em } V$$

## Condições de contorno

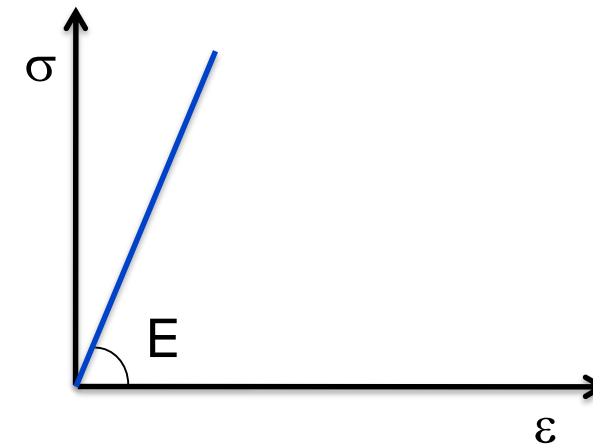
**1. Deslocamentos no contorno:** Deslocamentos são prescritos na parte  $S^u$  do contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{presc} \quad \text{em } S^u$$

**2. Forças no contorno:** Forças são especificadas na parte  $S^T$  do contorno.

- A lei constitutiva relaciona tensões e deformações.
- A lei constitutiva elástica linear é a mais simples lei constitutiva!
- Por definição, o material elástico apresenta as seguintes características,
  - i. Relação tensão deformação é linear;
  - ii. O comportamento do material é completamente reversível;
  - iii. A tensão em um ponto depende apenas da medida de deformação total naquele ponto;
  - iv. Deformações são pequenas.

Caso unidimensional:



$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Material elástico linear isotrópico:

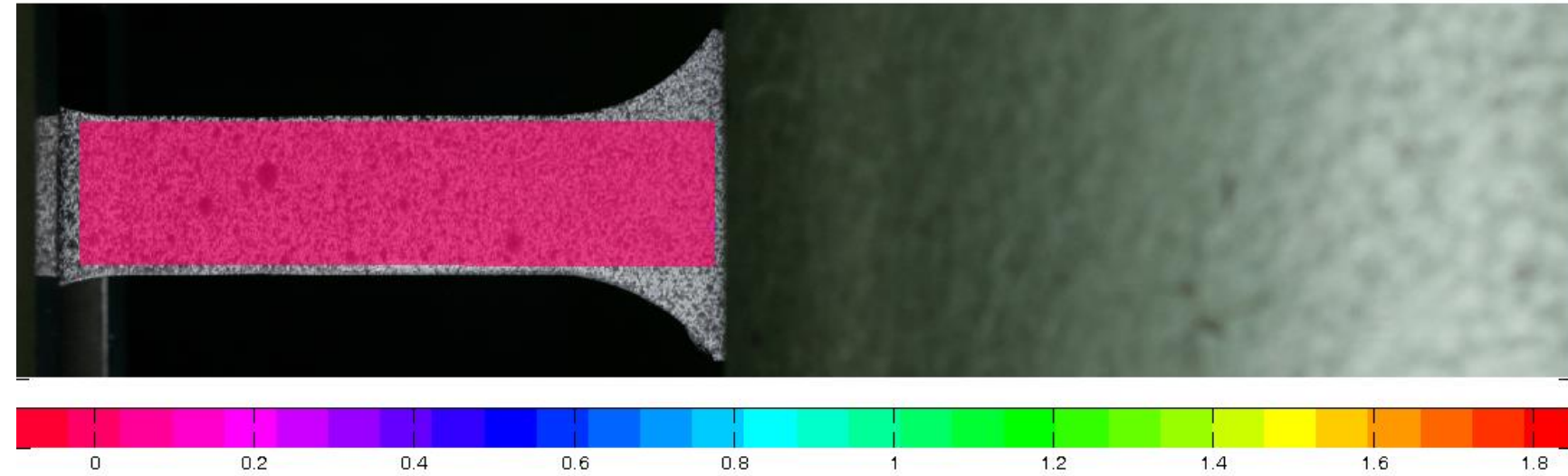
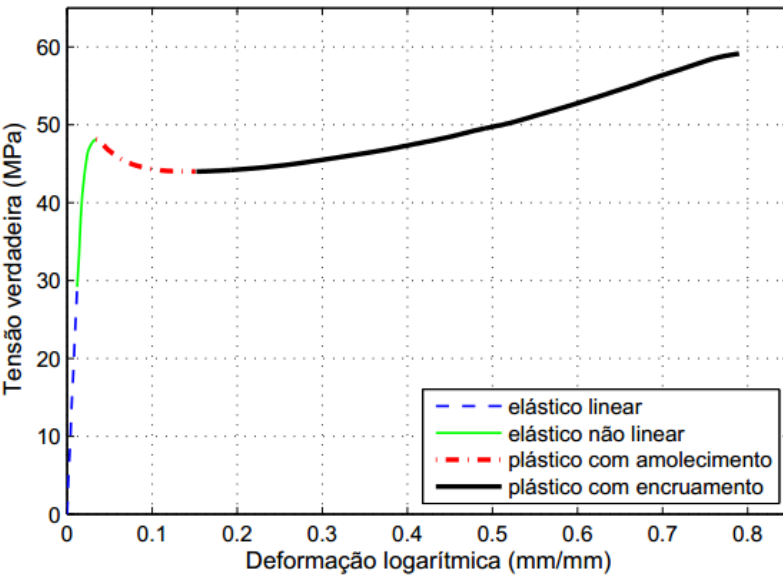
$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Rigidez:  $\mathbf{D}$

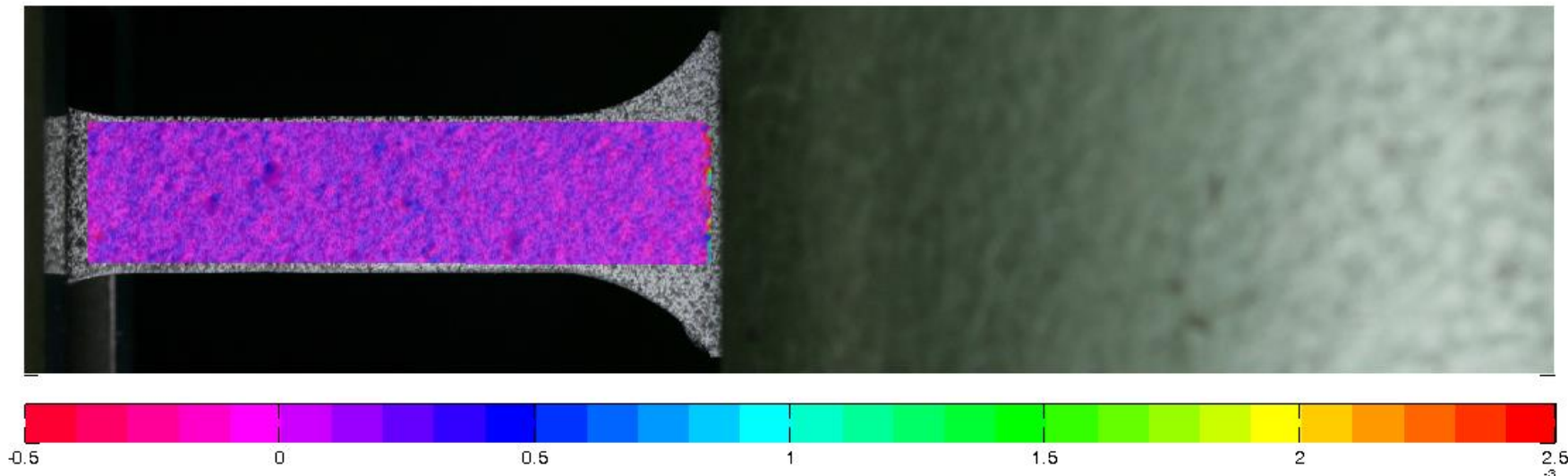
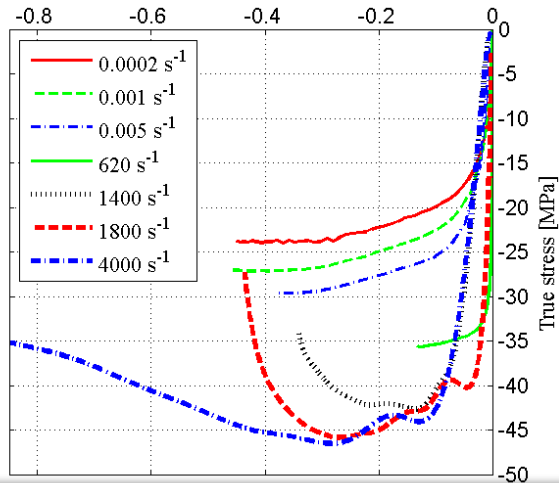
Flexibilidade =  $\mathbf{D}^{-1}$



Curva tensão deformação de um polímero termoplástico

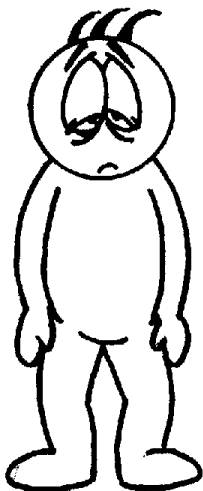


True stress - strain curves for PEHD  
 Different strain rates  
 True strain [mm/mm]

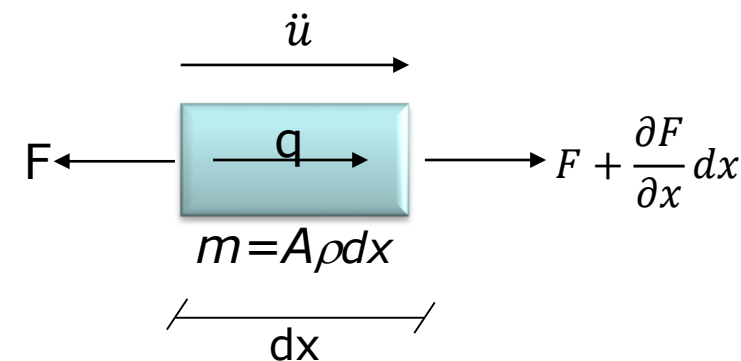


The background of the slide features a dark blue gradient with numerous out-of-focus, glowing blue circles of varying sizes, creating a bokeh effect. The text is centered horizontally and vertically within this area.

# MÊCANICA DOS SÓLIDOS

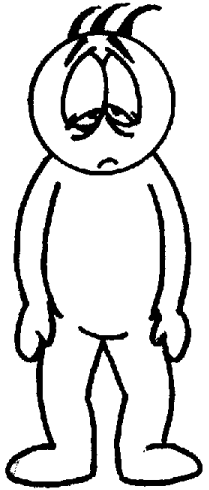


- Fazer somatório de forças igual a massa vezes aceleração!



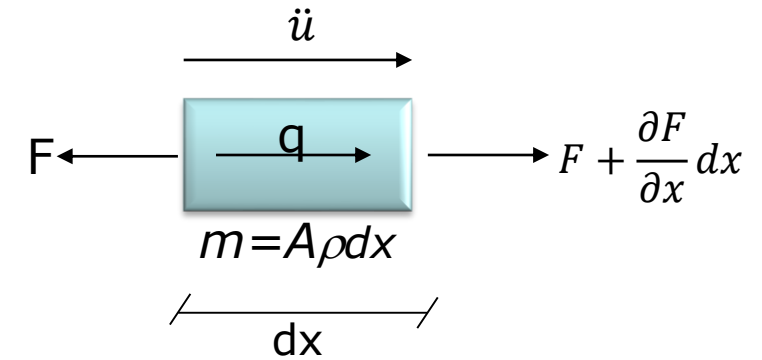
$$qdx + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F = A(x)\rho dx \ddot{u}$$

$$A\rho \ddot{u} = q + \frac{\partial F}{\partial x}$$



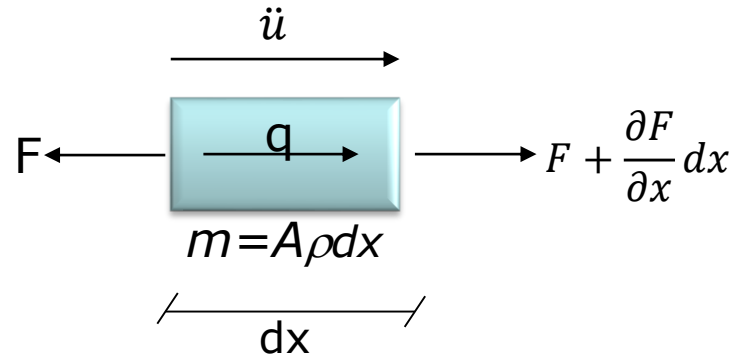
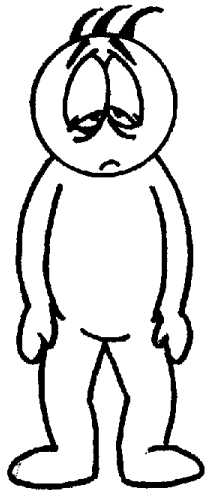
- Utilizando a lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, encontre a equação governante do sistema.

Dica: utilizar a definição de força e lei de Hooke, depois a definição de deformação e por último a resultante do equilíbrio de forças!



$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ \sigma &= E\varepsilon \end{aligned} \right\} F = AE\varepsilon \left\} \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ F &= AE \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left( AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q = A\rho\ddot{u}$$

$$A\rho\ddot{u} = q + \frac{\partial F}{\partial x}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q = A\rho\ddot{u}$$

Precisamos de:

- Duas condições de contorno;

$$u(x_q, t) = u_{x_q} \quad \text{ou} \quad A(x_q)E(x_q) \frac{\partial u(x_q, t)}{\partial x} = P_{x_q}(t)$$

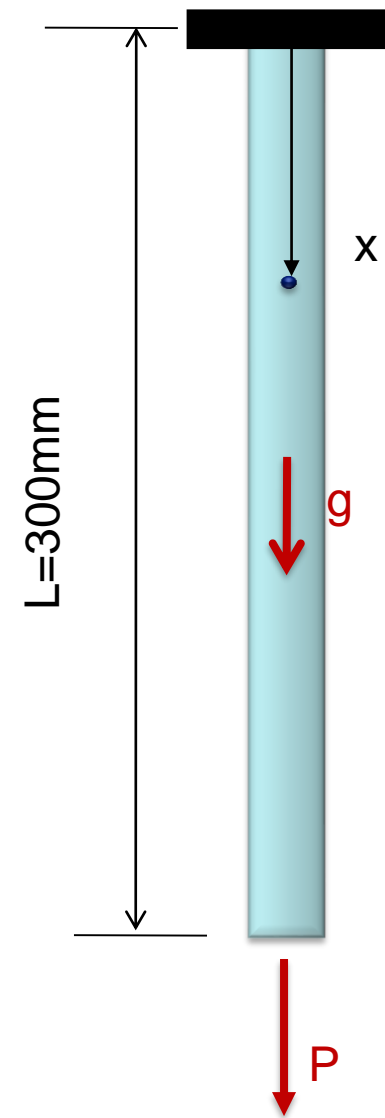
- Duas condições iniciais.

$$u(x, 0) = u_0 \quad \dot{u}(x, 0) = v_0$$



A barra de alumínio ( $E=72\text{GPa}$ ) ao lado tem 300mm de comprimento e *seção transversal constante*  $A=120\text{ mm}^2$ . Calcule os deslocamentos da barra, considerando:

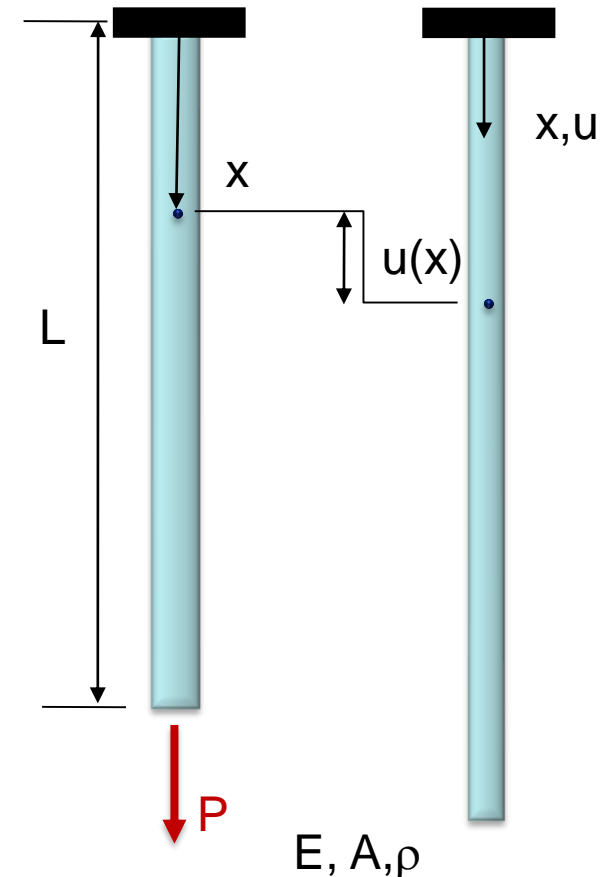
1. Força  $P$ ;
2. Peso próprio;
3. Peso próprio + força  $P$ .



Equilíbrio estático: 
$$\frac{d\sigma}{dx} = 0$$

Lei constitutiva:  
Elástica linear 
$$\sigma = E\varepsilon$$

Cinemática: 
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$



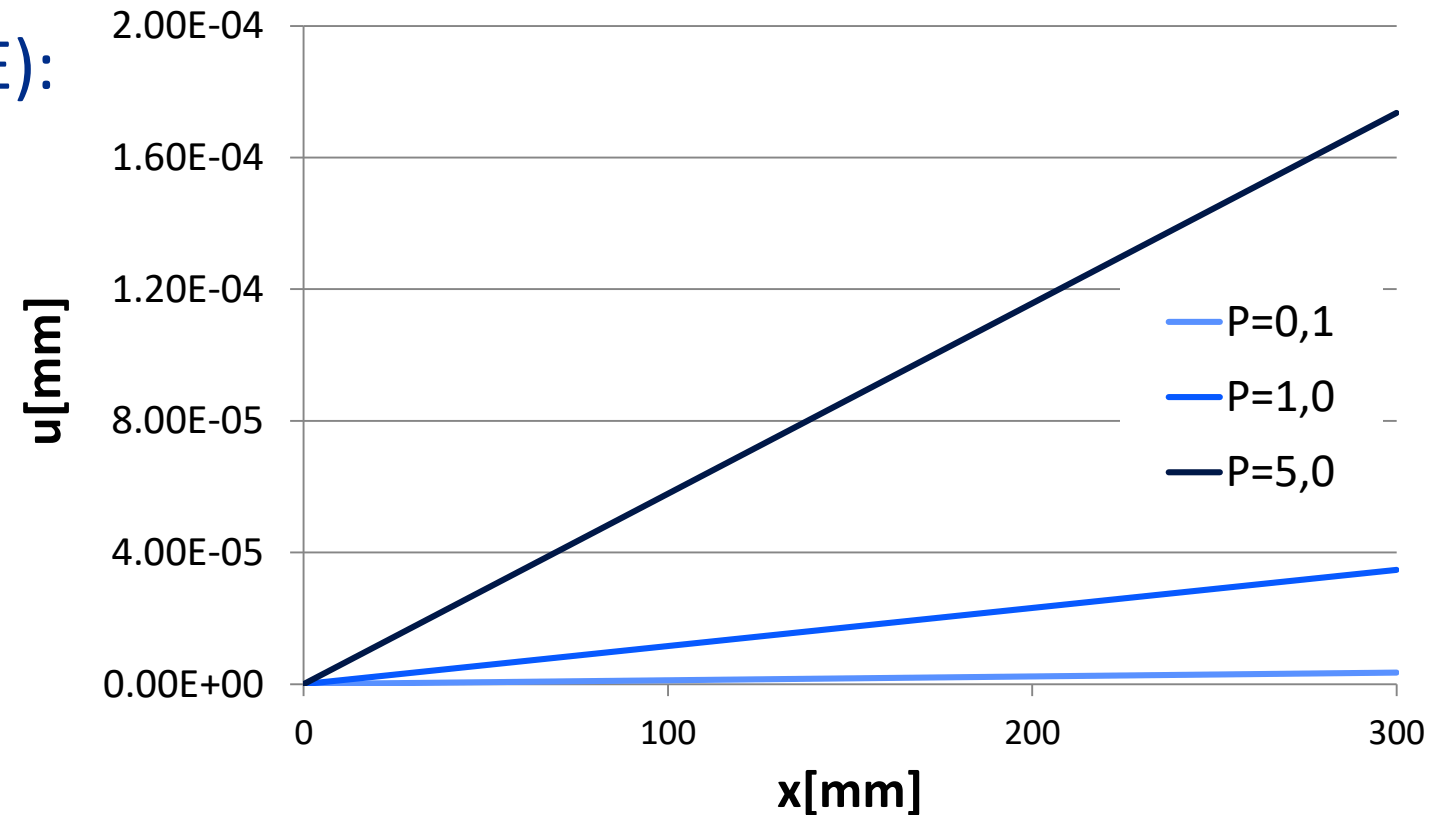
Equação diferencial (ODE):

$$\frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} \right) = 0$$

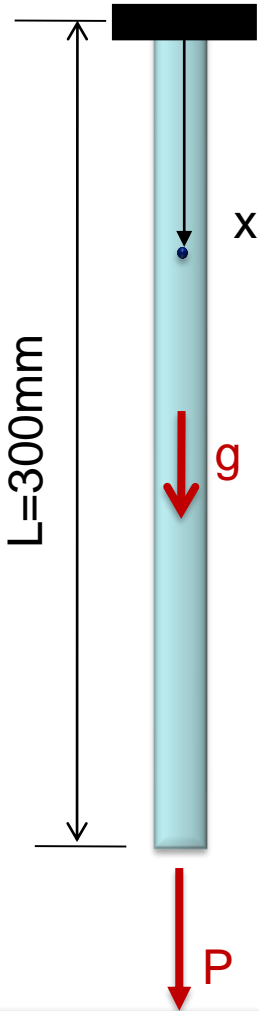
Condições de contorno:

$$u(0) = 0$$

$$F_{x=L} = P = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \Rightarrow \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{P}{EA}$$



L=300mm  
E=72GPa  
A=120 mm<sup>2</sup>



Solução analítica do problema:

$$u(x) = \frac{P}{EA} x$$

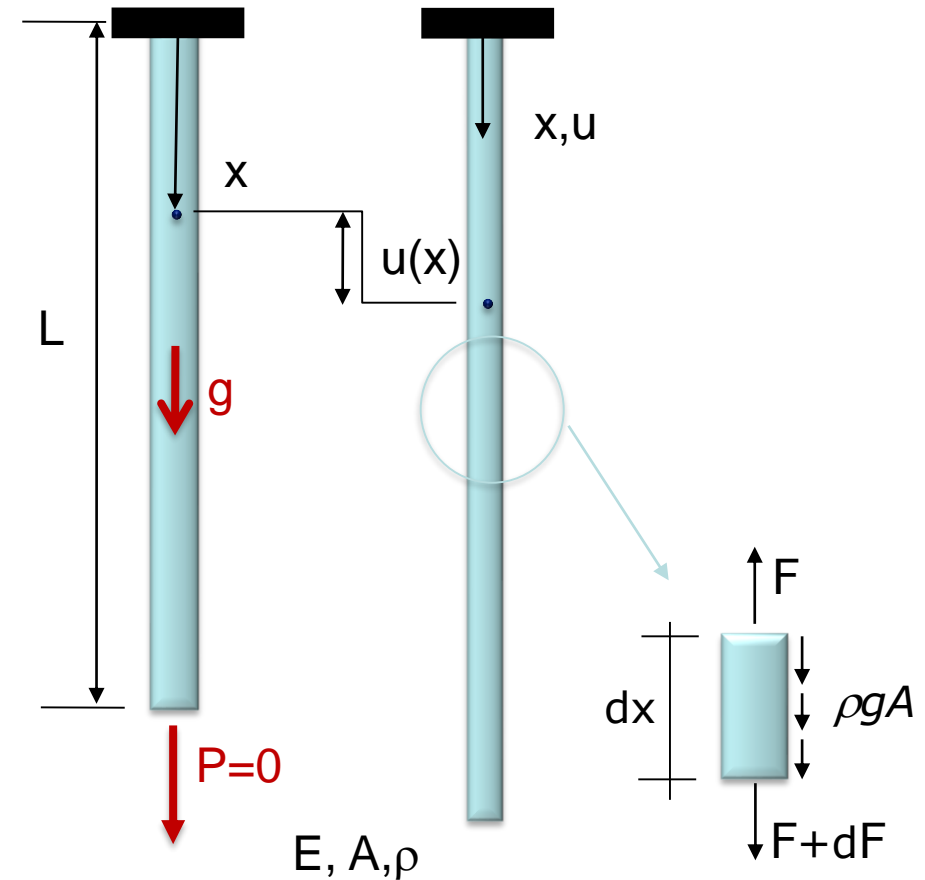
$$u(x) = \frac{P}{EA} x$$



Equilíbrio estático:  $\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$

Lei constitutiva:  
Elástica linear  $\sigma = E\varepsilon$

Cinemática:  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$



Equação diferencial (ODE):

$$\frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} \right) + \rho g = 0$$

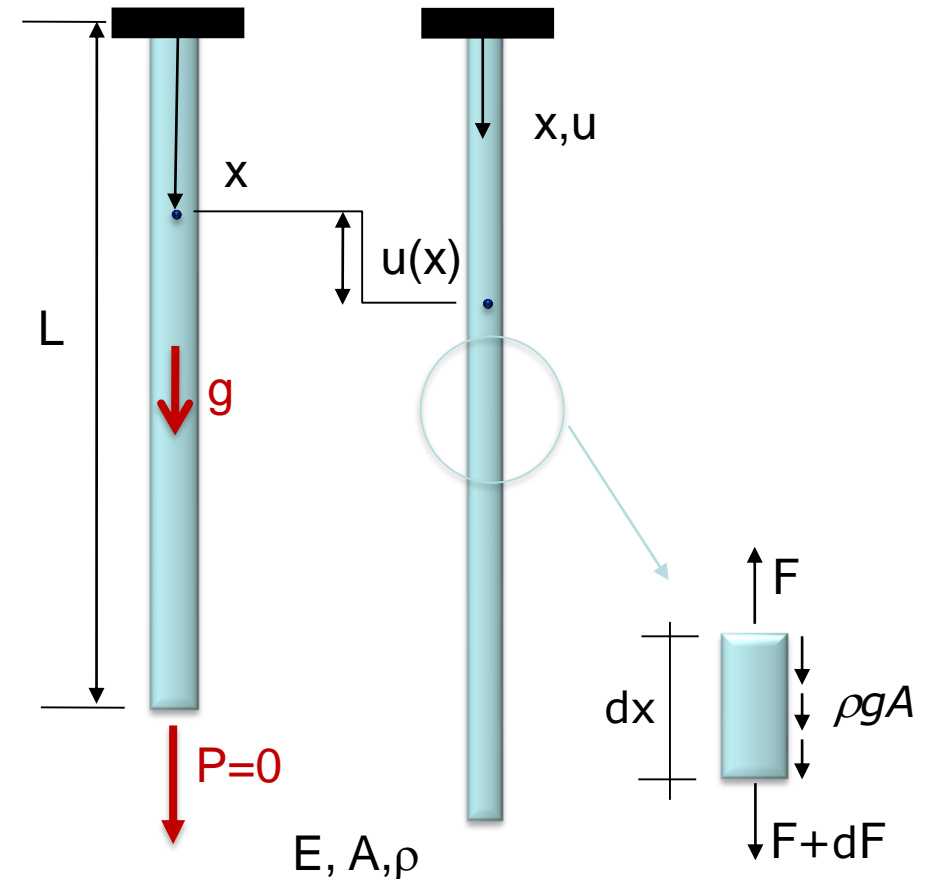
Condições de contorno:

$$u(0) = 0$$

$$P_{x=L} = 0 = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \Rightarrow \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

Solução analítica do problema:

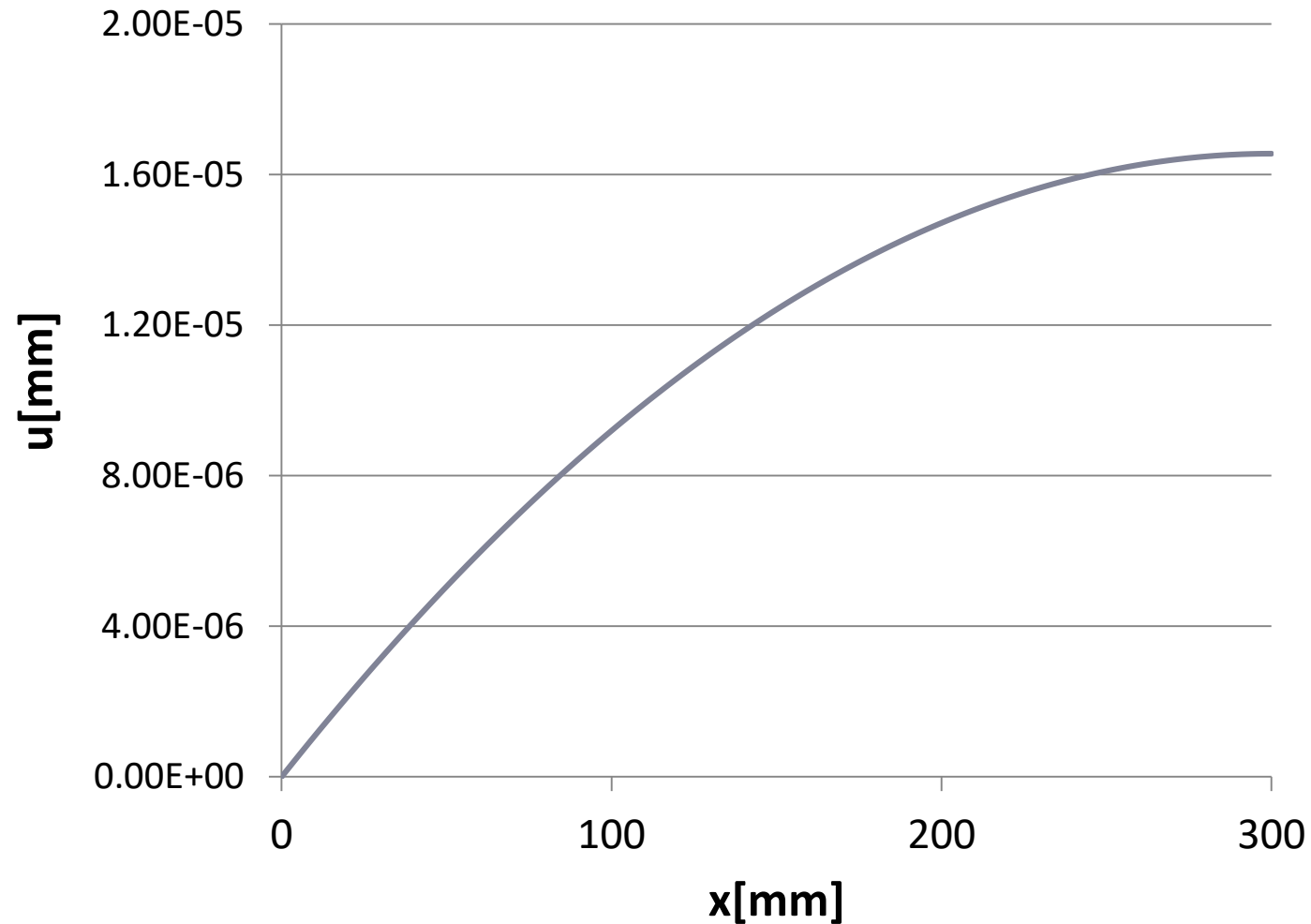
$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left( L - \frac{x}{2} \right) x$$



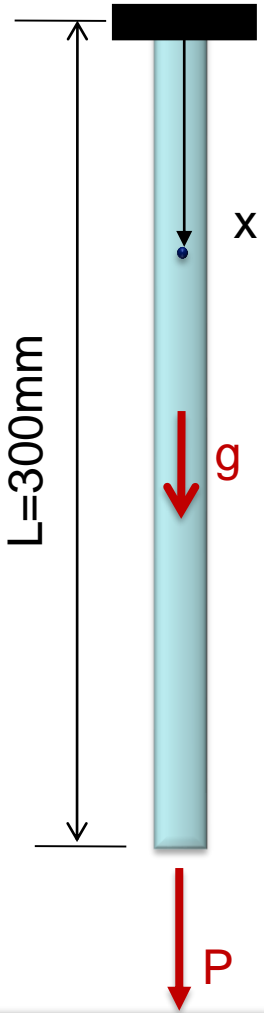
# 2. Peso Próprio

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left( L - \frac{x}{2} \right) x$$

$g=9,81 \text{ m/s}^2$   
 $L=300\text{mm}$   
 $E=72\text{GPa}$   
 $A=120 \text{ mm}^2$   
 $\rho= 2,7000\text{E-}06 \text{ kg/mm}^3$



$L=300\text{mm}$   
 $E=72\text{GPa}$   
 $A=120 \text{ mm}^2$

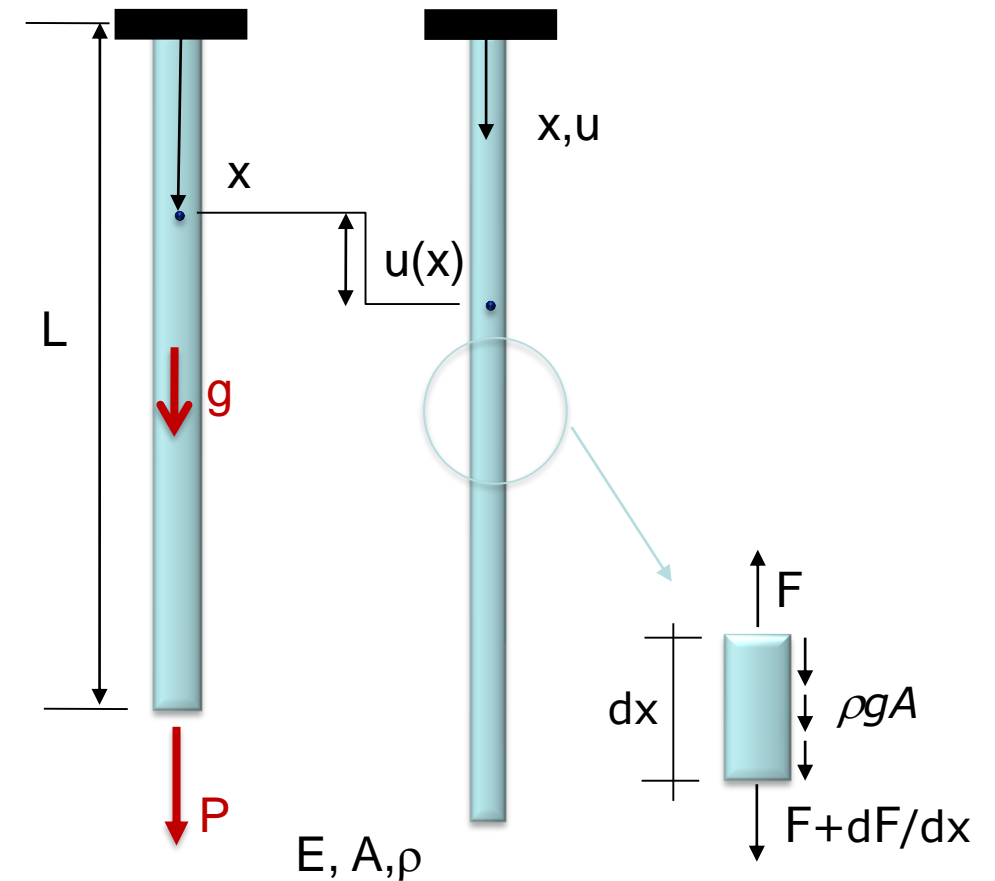


# 3. Peso próprio + Força P

Equilíbrio estático:  $\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g$

Lei constitutiva:  
Elástica linear  $\sigma = E\varepsilon$

Cinemática:  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$



Equação diferencial (ODE):

$$\frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} \right) + \rho g = 0$$

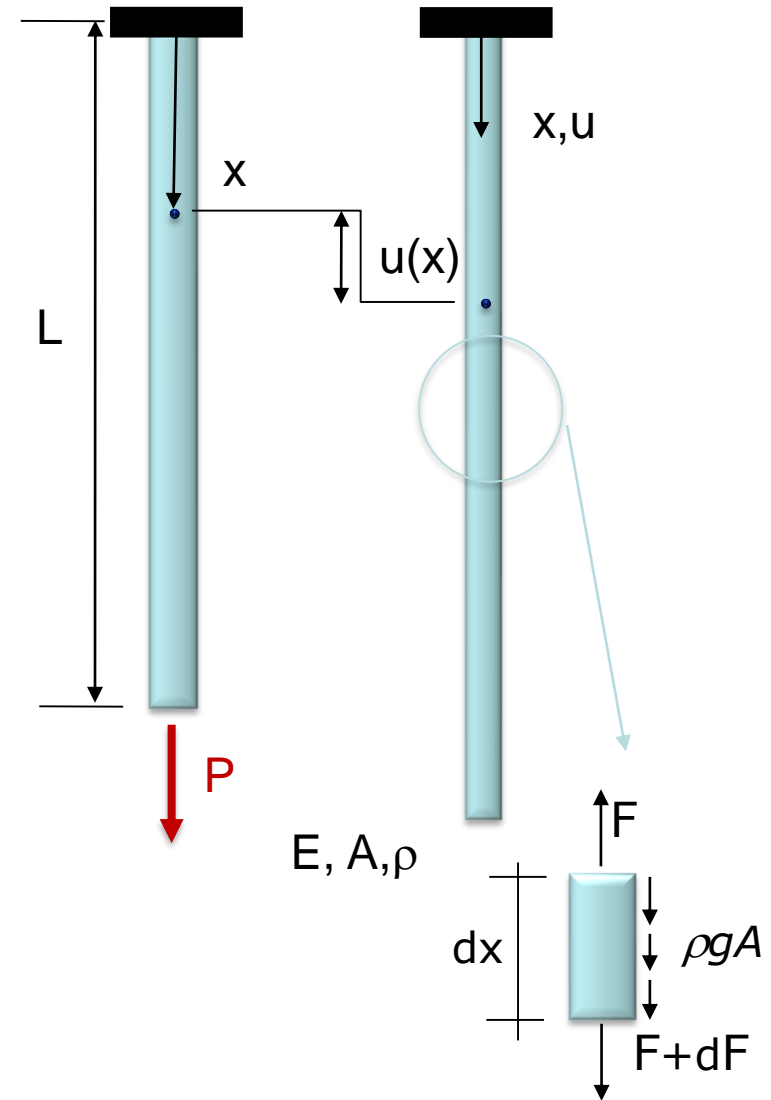
Condições de contorno:

$$u(0) = 0$$

$$F_{x=L} = P = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \Rightarrow \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{P}{EA}$$

Solução analítica do problema:

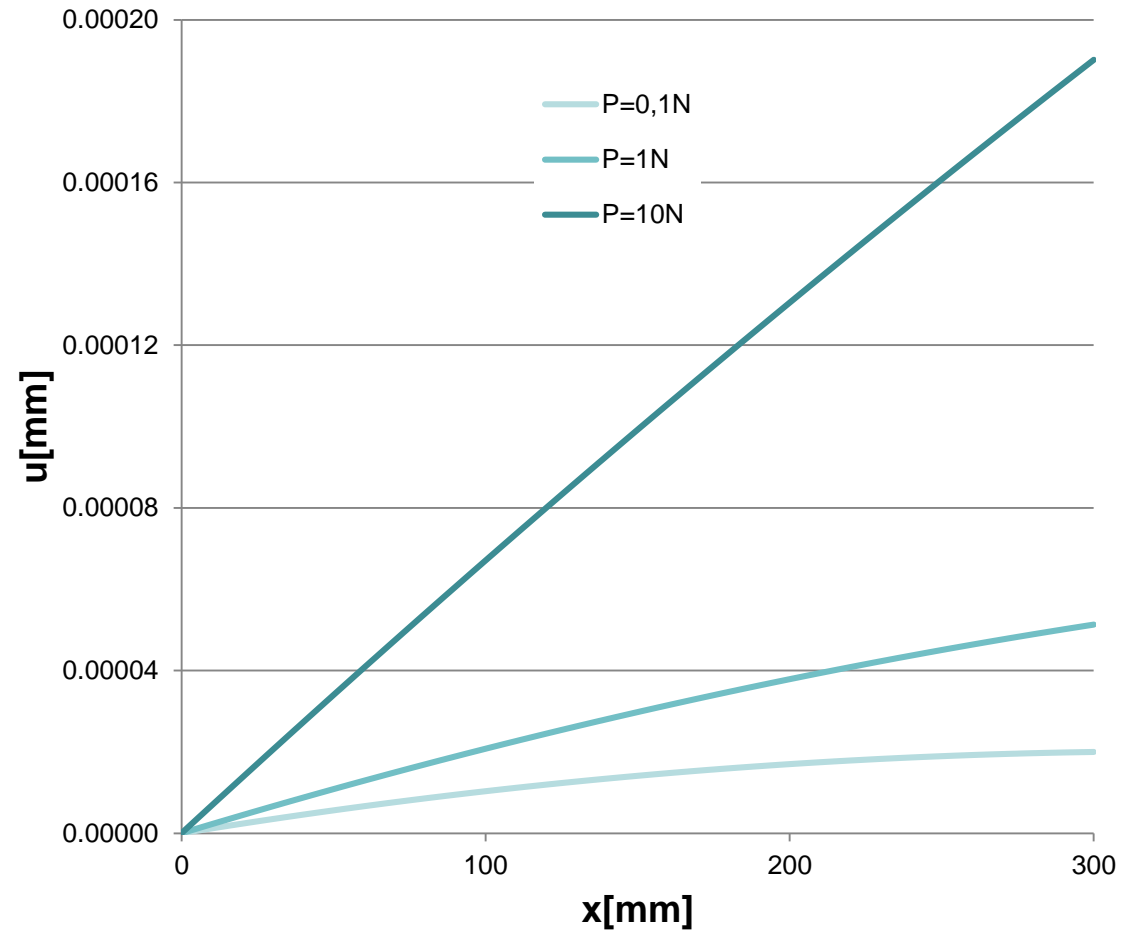
$$u(x) = \left[ \frac{\rho g}{E} \left( L - \frac{x}{2} \right) + \frac{P}{EA} \right] x$$



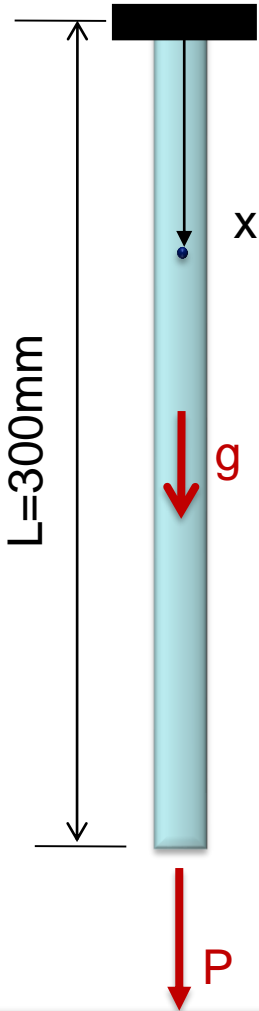
# 3. Peso próprio + Força P

$$u(x) = \left[ \frac{\rho g}{E} \left( L - \frac{x}{2} \right) + \frac{F}{EA} \right] x$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$   
 $L = 300 \text{ mm}$   
 $E = 72 \text{ GPa}$   
 $A = 120 \text{ mm}^2$   
 $\rho = 2,7000 \text{ E-}06 \text{ kg/mm}^3$



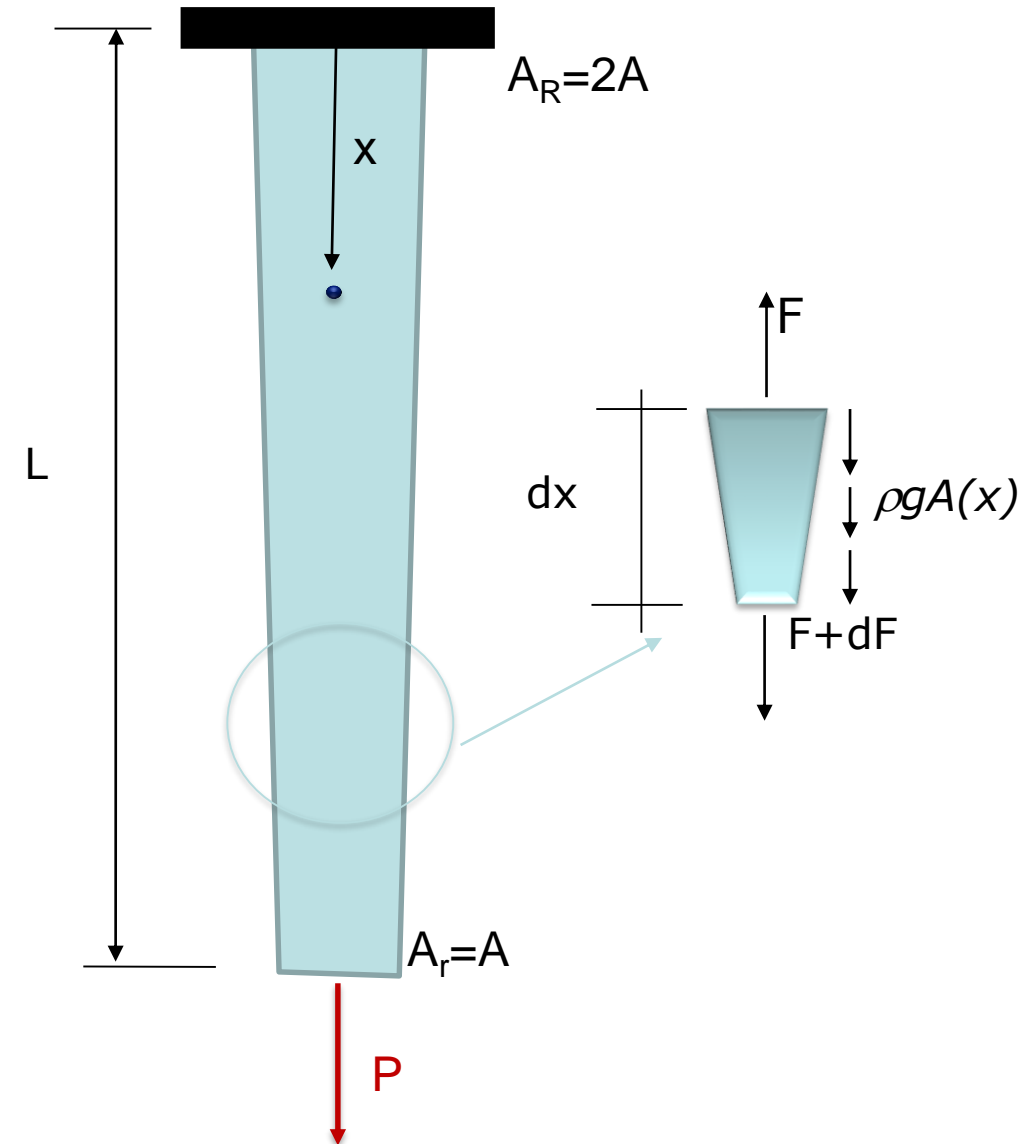
$L = 300 \text{ mm}$   
 $E = 72 \text{ GPa}$   
 $A = 120 \text{ mm}^2$



Supondo um problema mais complexo de uma barra de alumínio de comprimento  $L$ , com seção variável:  $A_R=2A$  e  $A_r=A$ .

Supondo que a barra esteja tracionada por uma força  $P$ , calcule analiticamente seus deslocamentos, desprezando o peso próprio.

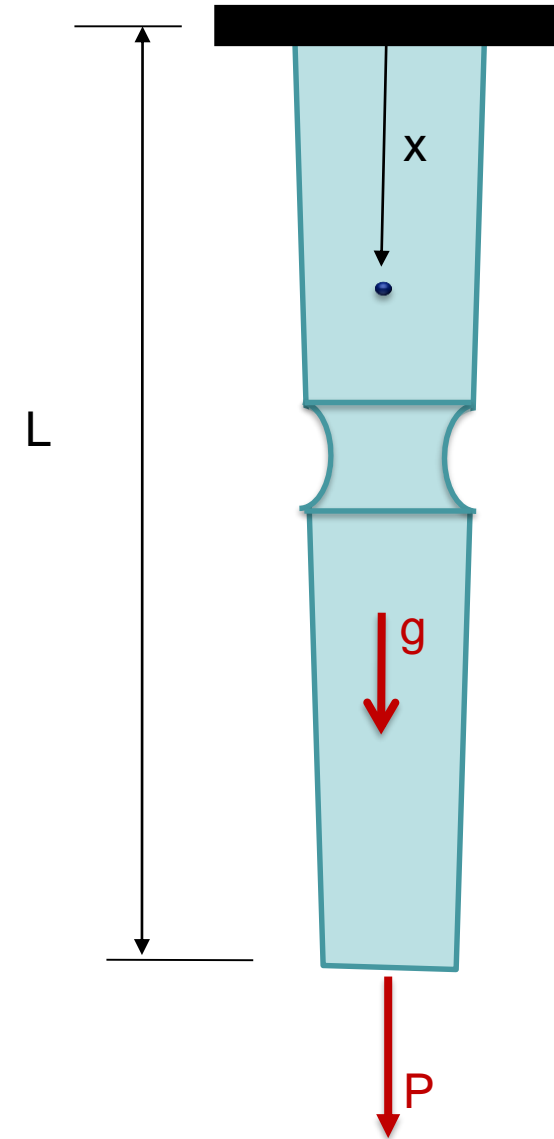
$$u(x) = \frac{PL}{E(A_R - A_r)} \ln \left( \frac{A_R}{A_R - \frac{A_R - A_r}{L} x} \right)$$



A medida que nos distanciamos dos problemas acadêmicos e nos aproximamos dos problemas reais de engenharia, estes vão se tornando mais complexos!

Dessa forma, encontrar a solução da equação diferencial, quando esta existir, é um trabalho árduo...

Além disso, os casos foram unidimensionais...





# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Conceito

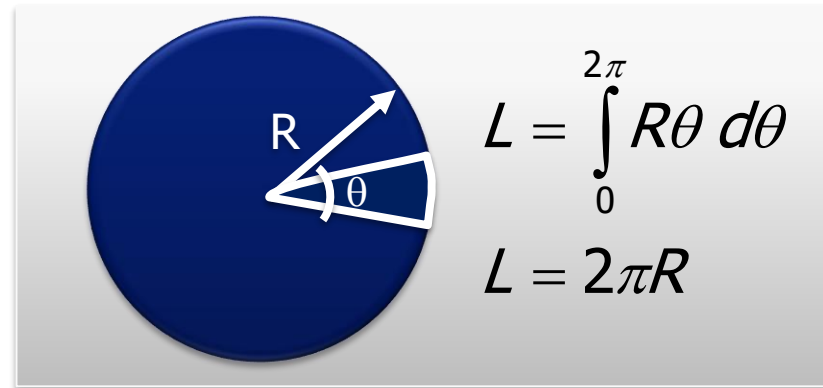
- A análise de estruturas envolve a solução de equações diferenciais parciais.
- Soluções analíticas exatas (fechadas) só existem em casos especiais:
  - Geometria e condições de contorno simples.
  - Certos tipos de carregamento.
  - Material homogêneo.
- A solução de problemas reais requer a utilização de métodos numéricos (aproximados):
  - Método das Diferenças Finitas.
  - **Método dos Elementos Finitos.**
  - Método dos Elementos de Contorno
  - Método espectral...

- Encontrar a solução exata da equação diferencial é, geralmente, um trabalho árduo...



... mas ao invés de desistir, nos contentamos em obter uma **solução aproximada, com um erro mínimo!**

Determinação do perímetro de um círculo.



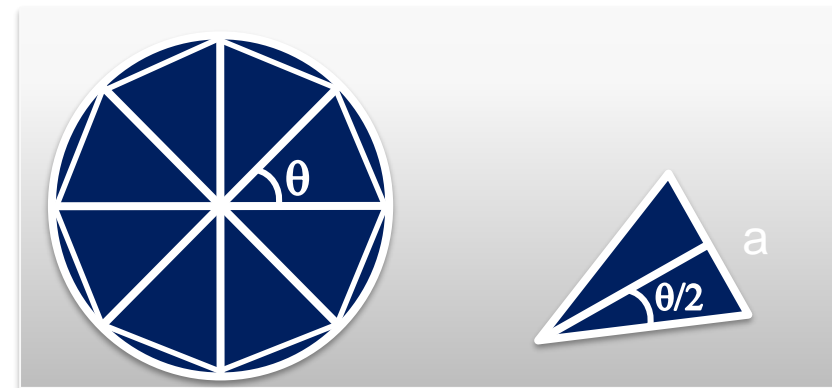
Discretizando o círculo em  $n$  partes:

$$L = na \quad \text{tal que} \quad a = 2R \text{sen}(\theta/2)$$

$$\theta = 2\pi/n \quad \therefore n = 2\pi/\theta$$

$$L = 2\pi R \frac{\text{sen}(\theta/2)}{(\theta/2)}$$

A medida que  $\theta$  tende a zero,  
 $\text{sen}\theta$  tende a  $\theta$



$$L = 2\pi R$$

$$L = 2\pi R \frac{\text{sen}(\theta/2)}{(\theta/2)}$$

A medida que  $\theta$   
tende a zero,  
 $\text{sen}\theta$  tende a  $\theta$



Um método numérico é confiável se ele **converge** para a solução exata do modelo matemático, com o *refinamento*.

Para  $n=360$ :  
Erro (%)=0,00127

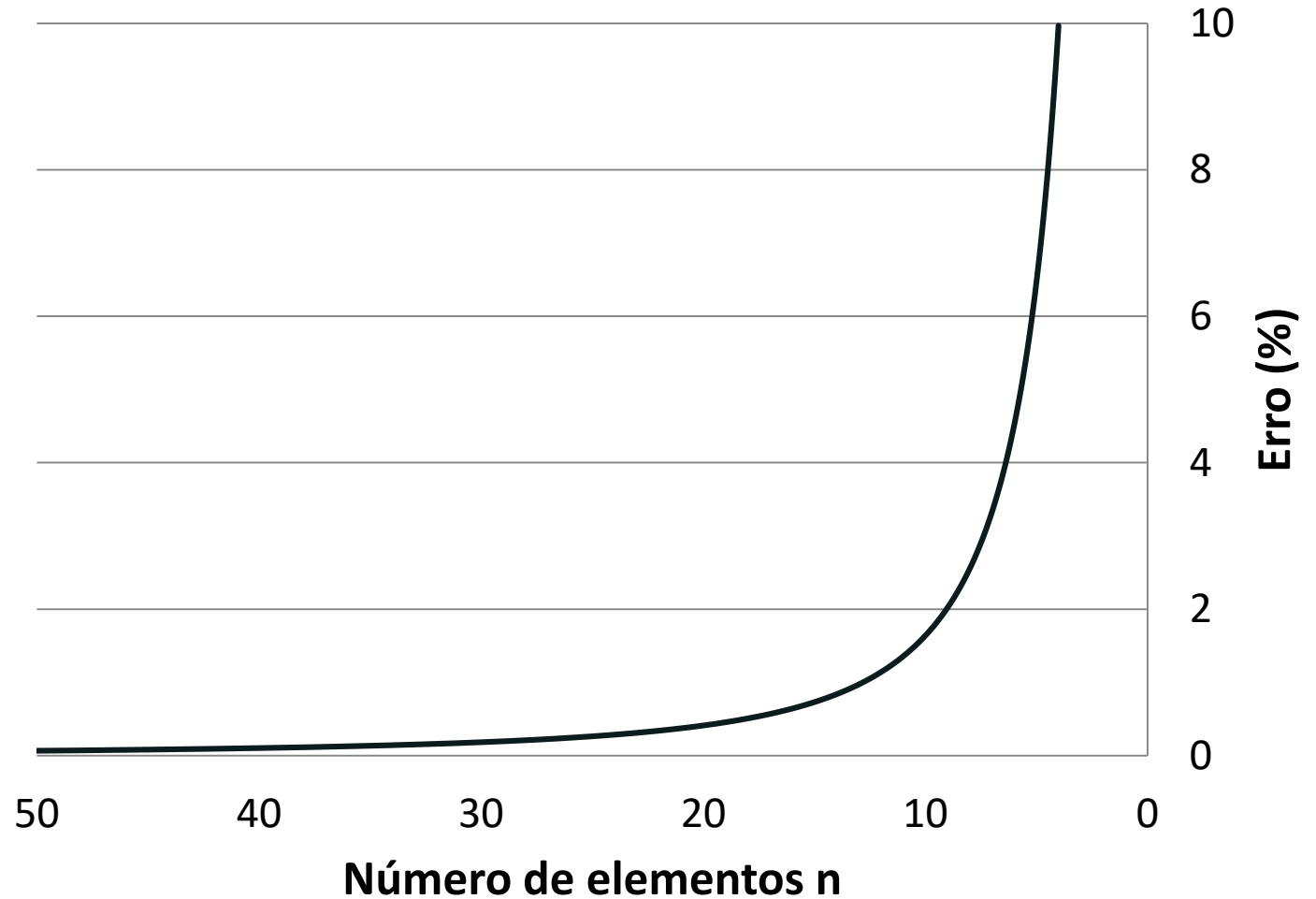


A solução numérica de um problema **não é melhor** do que o modelo matemático utilizado.

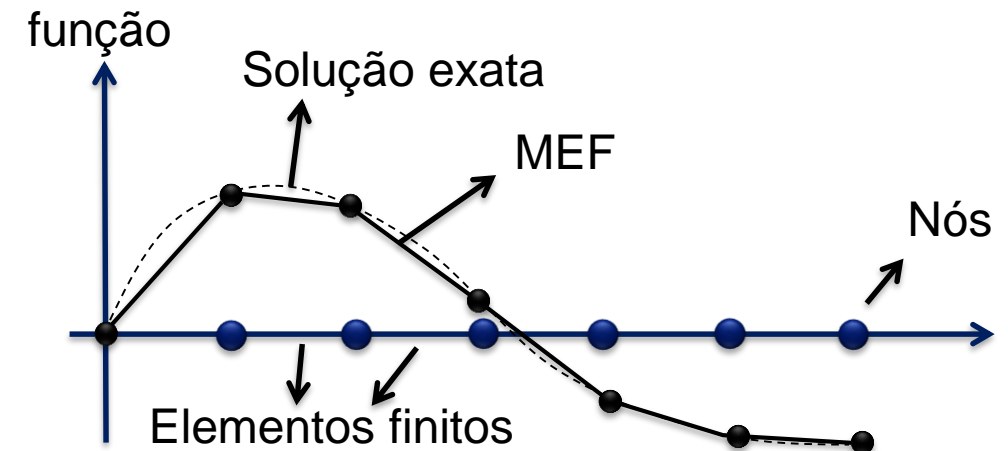
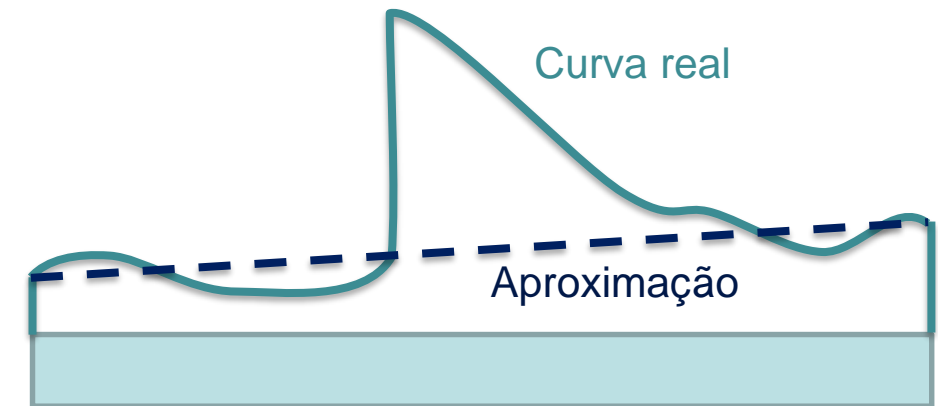
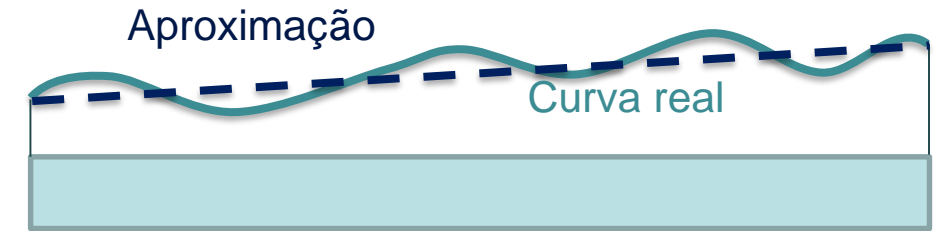
Esse é um exemplo clássico da literatura, para retratar que a *idéia* do método dos elementos finitos pode ser considerada dos matemáticos egípcios (aprox. 1800 a.C.) ou de *Archimedes* em seus famosos estudos sobre aproximação de círculo (aprox. 250 a.C.).

Os modelos numéricos devem ser implementados e utilizados com facilidade, além de serem eficientes computacionalmente.

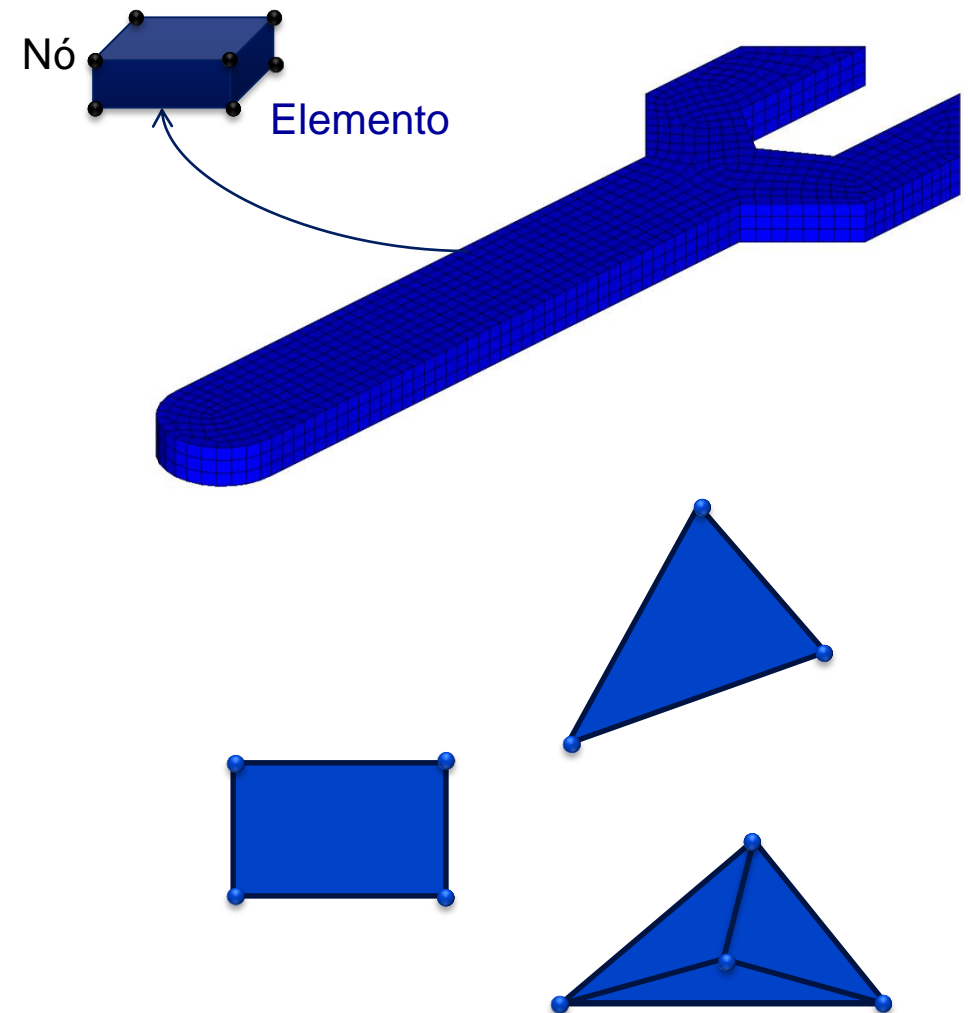
Analisar a velocidade de convergência!



- Quando a função aproximadora é única para todo o domínio no qual a equação está definida, o método é chamado Método de Ritz.
- O MEF discretiza o domínio em subdomínios chamados elementos finitos.



- Envolve a divisão do domínio (estrutura) em um número finito de **elementos** (elementos finitos) de geometria simples que juntos aproximam a forma do domínio
  - Triângulos, quadriláteros, tetraedros, hexaedros,...
  - Os elementos adjacentes são conectados através dos nós.
- Elementos estão conectados entre si através de seus nós dos vértices – chamados **pontos nodais** ou simplesmente nós.





- O equilíbrio é obtido em função dos deslocamentos nodais (graus de liberdade).



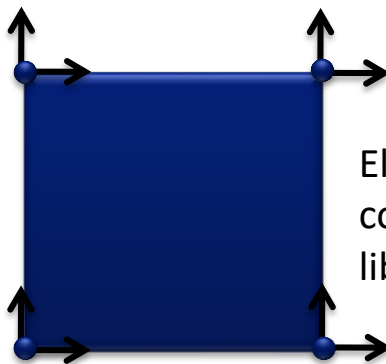
Elemento finito unidimensional com 1 grau de liberdade por nó



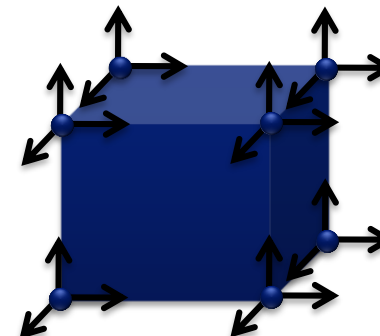
Elemento finito com 2 graus de liberdade por nó



Elemento finito com 3 graus de liberdade por nó



Elemento finito plano com 2 graus de liberdade por nó



Elemento finito tridimensional com 3 graus de liberdade por nó

- **Pré-Processamento**

- Criação da geometria;
- Atribuição da propriedade de material;
- Seleção do tipo de elemento;
- Discretização do modelo.

- **Análise**

- Aplicação das condições de contorno;
- Aplicação da carga;
- Submissão para solução.

- **Pós-Processamento**

- Seleção do tipo de variável de campo de interesse;
- Visualização da variável selecionada;
- Geração de Gráficos/Formas

## **Ansys**

- Ansys Workbench
- Ansys - LS Dyna

## **Abaqus**

- CAE
- Standard
- Explicit

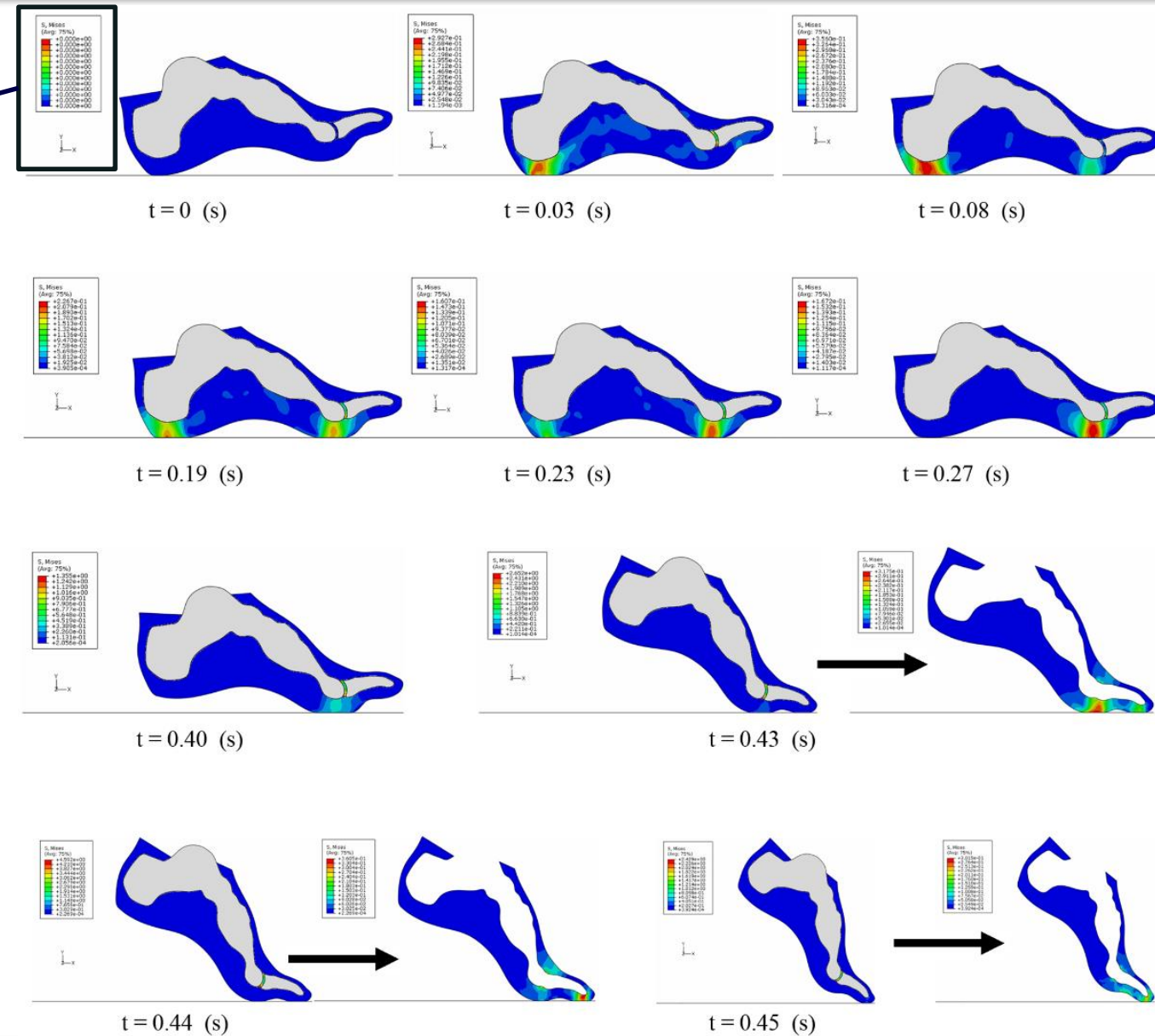
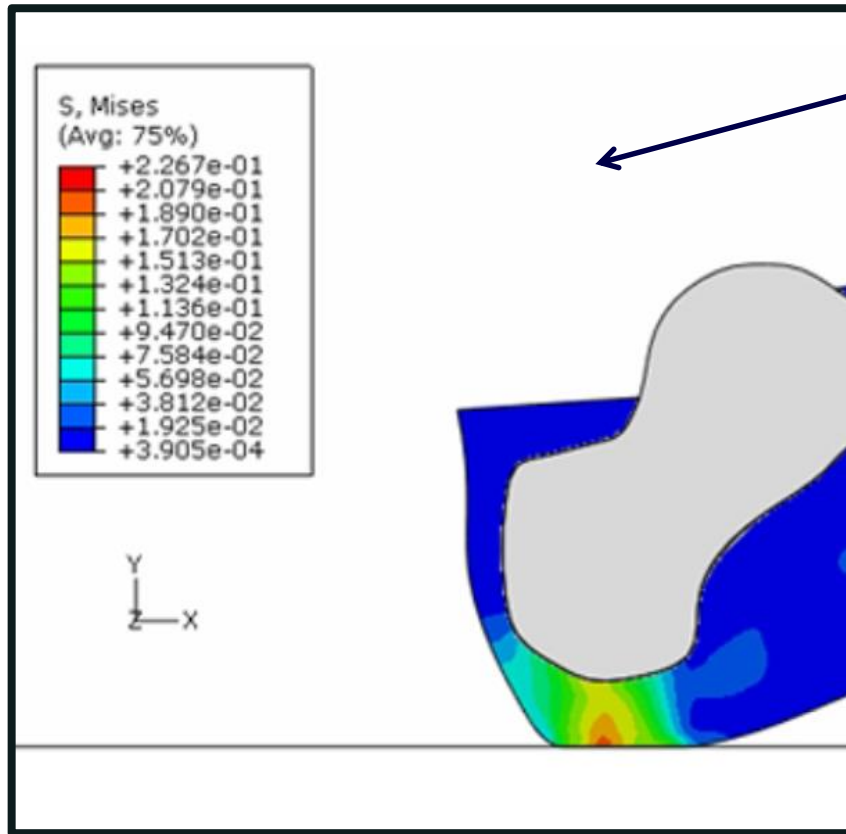
## **MSc Products**

- Patran
- Nastran
- Dytran


## **LS-Dyna**

**Hyper mesh, Ideas, Unigraphics,  
Pro-Mechanica, Adina, Cosmos,**

...



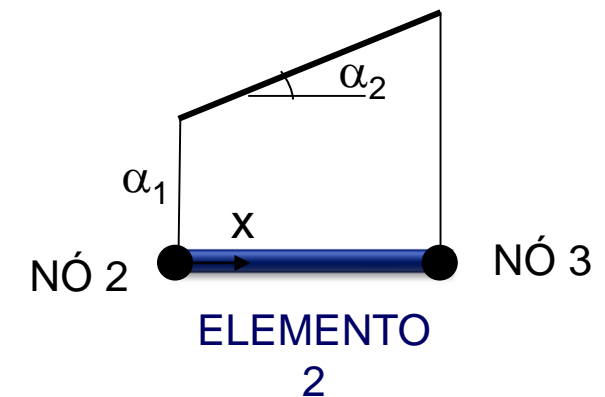
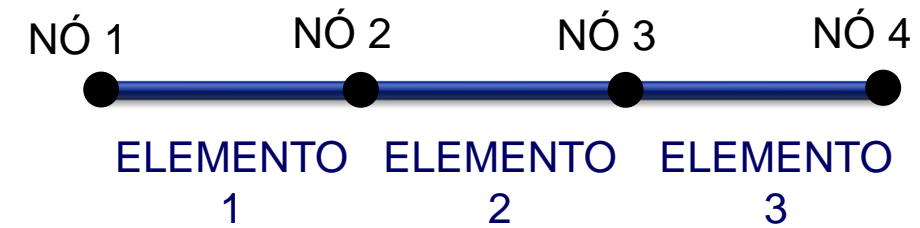
A Dynamic Finite Element Analysis of Human Foot Complex in the Sagittal Plane during Level Walking  
Zihui Qian Lei Ren Yun Ding John R. Hutchinson Luquan Ren  
November 11, 2013 <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0079424>



# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

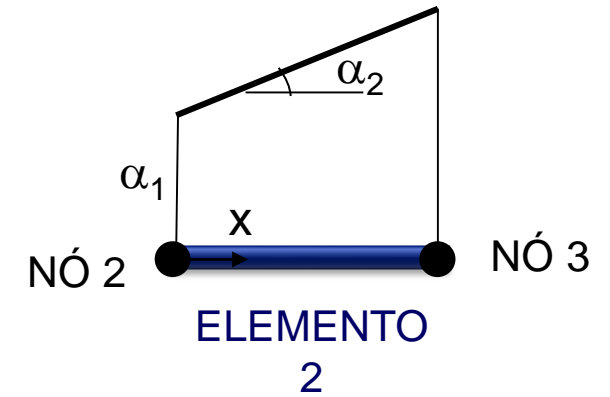
## Matemática

- Usa-se o sistema de coordenadas locais do elemento  $x, y, z$ ;
- Tem-se uma função  $G(\mathbf{x})$ , definida no sistema de coordenadas  $x-y-z$ , resultado da equação diferencial, que não sabemos explicitar;
- Assume-se uma **aproximação** dessa função na forma de polinômios em  $x, y, z$  com coeficientes constantes indeterminados  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  com  $i=1,2,\dots$  identificados como **coordenadas generalizadas**;
- A aproximação pode ser linear, conforme exemplo ao lado!



- Uma exemplo de função aproximada de  $G(x)$  é

$$\tilde{G}(x) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_i = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

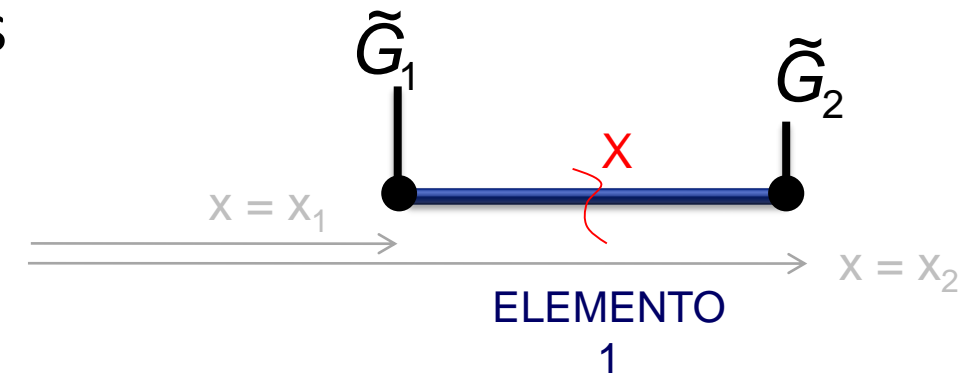


- Determinando os valores para as aproximações nodais da função aproximada de

$$\tilde{G}(x = x_1) = \tilde{G}_1$$

$$\tilde{G}(x = x_2) = \tilde{G}_2$$

| ...  
X=0



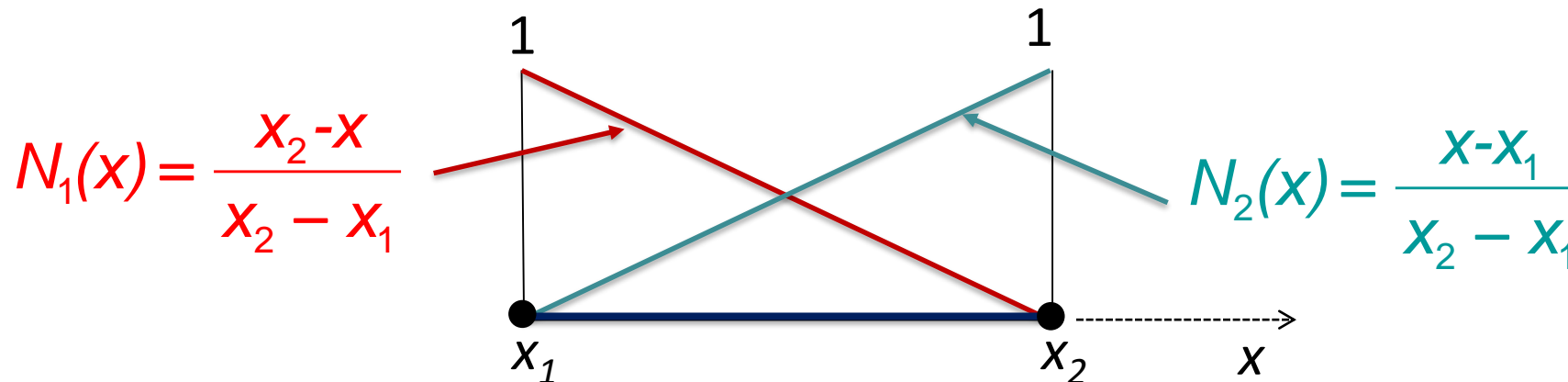
- Exercícios (sim, é para você fazer agora e acordar!):

1) A partir das definições acima, determine o sistema de duas equações e isole  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

2) Determine  $N_1$  e  $N_2$  para que tenhamos:  $\tilde{G}(x) = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$

- Do exercício anterior obtivemos:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x = x_1) &= \tilde{G}_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ \tilde{G}(x = x_2) &= \tilde{G}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\tilde{G}_2 - \tilde{G}_1}{x_2 - x_1}, \alpha_1 = \frac{x_2 \tilde{G}_1 - x_1 \tilde{G}_2}{x_2 - x_1}$$



- E, as funções  $N_1, N_2, N_i$  possuem um nome especial: **funções de forma**.

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

$G_i$  são incógnitas e  $N_i$  são as funções de interpolação ou de forma.



Existem vários métodos para se definir a forma de como o erro  $R$  será minimizado

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} + F(x) = 0 \qquad R = \frac{d^2 \tilde{G}}{dx^2} + F(x)$$

Utilizaremos aqui o **método de resíduos ponderados**,


$$\int_V \omega_i R dV = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

onde  $V$  é o domínio da solução, e  $\omega_i$  são pesos.

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

- Teoricamente, a função de peso  $\omega_i$  poderia ser uma função qualquer. Entretanto, nesta dedução estamos utilizando método de Galerkin;
- No método de Galerkin, as **funções de peso**  $\omega_i$  são as próprias **funções de forma** utilizadas na aproximação.

$$\int_V RN_i dV = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$


$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} + F(x) = 0$$

$$R = \frac{d^2 \tilde{G}}{dx^2} + F(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d^2 \tilde{G}}{dx^2} + F(x) \right] N_i dx = 0, \quad i = 1, 2$$

- Aplicando a distributiva em nossas duas equações (afinal, temos duas funções de forma), temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) N_1(x) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_2(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) N_2(x) dx = 0$$

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Mas, queremos que apareçam os termos corretos para colocarmos as **condições de contorno**, ou seja,  $\tilde{G}(x)$  e  $\partial\tilde{G}(x)/\partial x$  em  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . Um modo de conseguirmos usar estes valores é usando a formula da integral por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} (f(x)) \right] g(x) dx = f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} (g(x)) \right] f(x) dx$$

- Exercícios (para fazer agora):**

- 1) Aplique a regra da integral por partes acima nas primeiras parcelas das duas equações do slide anterior.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) N_1(x) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_2(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) N_2(x) dx = 0$$

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

No nosso caso, para a primeira parcela de cada equação, temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_1(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_1(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_1(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_2(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_2(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_2(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_2(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Agora precisamos resolver cada termo!!!

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right) N_1(x) dx = \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_1(x_2) - \frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_1(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx$$

• Exercícios (para fazer agora):

1) Determine o valor do termo ao lado.  $\frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} N_1(x_2)$

2) Determine o valor do termo ao lado.  $\frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} N_1(x_1)$

3) Resolva a integral e determine seu valor.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d(N_1(x)\tilde{G}_1 + N_2(x)\tilde{G}_2)}{dx} dx =$$

$$= \tilde{G}_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d}{dx} (N_1(x)) dx + \tilde{G}_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (N_1(x)) \frac{d}{dx} (N_2(x)) dx$$

$$\tilde{G}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \tilde{G}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tilde{G}_2 = N_1 \tilde{G}_1 + N_2 \tilde{G}_2$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

# Colocando a resposta em formato matricial!

Condições de contorno naturais      Função conhecida no domínio

$$\underbrace{\frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rigidez}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{bmatrix}}_{\text{Incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix}}_{\text{Condições de contorno naturais}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx \\ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx \end{bmatrix}}_{\text{Função conhecida no domínio}}$$

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{C} + \mathbf{F}$$

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

$$F_i + C_i = \frac{d\tilde{G}}{dx} \Big|_{x=x_1} N_i(x_1) - \frac{d\tilde{G}}{dx} \Big|_{x=x_2} N_i(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_i(x)dx$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g A = 0$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B = 0$$



Matriz de rigidez      Incógnitas

Condições de contorno naturais      Função conhecida no domínio

$$\frac{EA}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ EA \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f^B N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f^B N_2(x) dx \end{bmatrix}$$



- Exercícios (para fazer agora):

- 1) Resolva para

- a)  $F(x) = a$

- b)  $F(x) = ax + b$


considerando  $x_2 = 1$  e  $x_1 = 0$ .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx \\ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx \end{bmatrix}$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$-EA \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} = -EA\varepsilon \Big|_{x=x_1} = -\sigma A \Big|_{x=x_1} = F_{aplicada} \Big|_{x=x_1}$$


 equilíbrio!

- Portanto, o vetor **C** é sempre das forças nodais externas aplicadas!

$$\int_{x_1}^{x_2} f^B N_1(x) dx = A\rho g \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) dx \quad N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( x_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

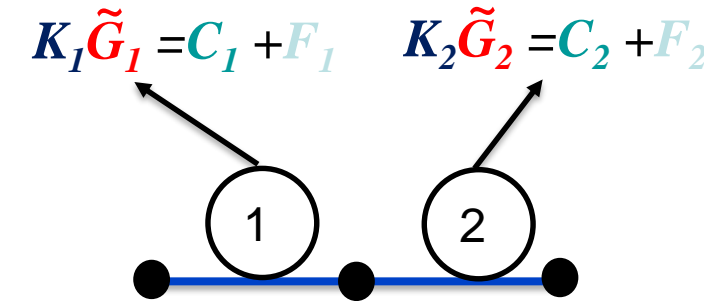
$$= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[ \left( x_2^2 - \frac{x_2^2}{2} \right) - \left( x_2 x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[ \frac{1}{2} (x_2 - x_1)^2 \right]$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{l_e}{2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f^B N_1(x) dx = \frac{A\rho g l_e}{2}$$

- No qual o vetor **F** é sempre das forças distribuídas no volume/superfície, que são transformadas em cargas concentradas nos nós através das funções de forma!

- Esses são ditos nós globais da estrutura. Podemos dizer que:
  - Os nós que compõe o elemento 1 são 1 e 2.
  - Os nós que compõe o elemento 2 são 2 e 3.
- O grau de liberdade local 2 do elemento 1 *deve ser somado ao grau de liberdade 1 do elemento 2.*
- Na hora de compor a matriz global, temos:



	1	2	3
1			
2		X	
3			

Elemento 1  
 Elemento 2

$$\begin{bmatrix} [K_{11}]_1 & [K_{12}]_1 & 0 \\ [K_{21}]_1 & [K_{22}]_1 + [K_{11}]_2 & [K_{12}]_2 \\ 0 & [K_{21}]_2 & [K_{22}]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \\ \tilde{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ -\frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} \right]_1 \\ \left[ \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} \right]_1 + \left[ -\frac{d\tilde{G}(x_1)}{dx} \right]_2 \\ \left[ \frac{d\tilde{G}(x_2)}{dx} \right]_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx \right]_1 \\ \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx \right]_1 + \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_1(x)dx \right]_2 \\ \left[ \int_{x_1}^{x_2} F(x)N_2(x)dx \right]_2 \end{bmatrix}$$

- Como no caso da matriz de rigidez local do elemento a matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  é *singular*. Alguns nós da estrutura devem ser restritos (i.e, deslocamento conhecido ou nulo) para tornar o problema estaticamente determinado ou hiperestático. Então os GL restantes podem ser determinados.
- Restringir alguns nós da estrutura significa ***aplicar condições de contorno***.

$$u_1 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

*Note: An arrow points from the text '0' above to the  $u_1$  element in the displacement vector.*

$F_1 = -K_1 u_2$  Força de reação desconhecida no nó 1

$F_2 = (K_1 + K_2) u_2 - K_2 u_3$

$F_3 = -K_2 u_2 + K_2 u_3$  Forças nodais desconhecidas

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Linha associada com  $u_1$

Coluna associada com  $u_1$

## PORTANTO:

1. Para condições de contorno **homogêneas delete as linhas e colunas apropriadas** da matriz de rigidez global e resolva o conjunto reduzido de equações para os deslocamentos nodais desconhecidos.
2. Deslocamentos e forças **NÃO PODEM** ser conhecidos no mesmo nó. Se o deslocamento é desconhecido, a força naquele nó é conhecida e vice-versa.

- Voltando para nossa conhecida barra de alumínio de comprimento  $L=300\text{mm}$ , com seção variável:  $A_0=160\text{mm}^2$  e  $A_L=80\text{mm}^2$ , sujeita ao peso próprio e tracionada pela força  $P=45\text{ N}$ .
- Calcular os deslocamentos da barra pelo método dos elementos finitos desenvolvido, utilizando 4 elementos.
- Fazer um gráfico contendo a solução analítica e a solução numérica.

$$u(x) = \frac{PL}{E(A_R - A_r)} \ln \left( \frac{A_R}{A_R - \frac{A_R - A_r}{L} x} \right)$$

