4300259 – Termoestatística

Quinta Lista de Exercícios: Movimento Browniano

Q1) Considere que as moléculas de ar tenham massa molar $M = 30\,\mathrm{g/mol}$ e diâmetro de $2.0\,\text{Å}$. Em um dia frio, podemos admitir que o ar seja um gás ideal em equilíbrio a $10^{\mathrm{o}}\,\mathrm{C}$ e $1\,\mathrm{atm}$, enquanto em um dia quente, um gás em equlíbrio a $30^{\mathrm{o}}\,\mathrm{C}$ e $1\,\mathrm{atm}$.

Seja L_f o livre caminho médio das moléculas de ar no dia frio, e L_Q o livre caminho médio no dia quente. A relação correta, com base no modelo discutido na disciplina, é:

(a) $L_F = 3L_Q$
(b) $L_F = \frac{1}{3}L_Q$
(c) $L_F = \sqrt{3}L_Q$
(d) $L_F = \frac{1}{\sqrt{3}}L_Q$
(e) $L_F = 0.94L_Q$
(f) $L_F = 1.07L_Q$

Q2) Considere passeios aleatórios unidimensionais, nos quais a probabilidade de um passo para frente é p, enquanto a probabilidade de um passo para trás é q.

(i) Após um grande número de passos, N, o valor médio das posições, para $p = q = 0.5$ será

(a) $\langle x_N \rangle = 0$
(b) $\langle x_N \rangle > 0$
(c) $\langle x_N \rangle < 0$

(ii) Após um grande número de passos, N, o valor médio das posições, para $p = 0.7$ e $q = 0.3$ será

(d) $\langle x_N \rangle = 0$
(e) $\langle x_N \rangle > 0$
(f) $\langle x_N \rangle < 0$

(iii) Após um grande número de passos, N, o valor médio das posições, para $p = 0.3$ e $q = 0.7$ será

(g) $\langle x_N \rangle = 0$
(h) $\langle x_N \rangle > 0$
(i) $\langle x_N \rangle < 0$

(iv) Nos itens anteriores, $\langle x_N \rangle$ representa
(j) Uma média sobre os N passos de um passeio aleatório.
(l) Uma média sobre os N-ésimos passos de uma coleção de caminhos aleatórios.

Q3) Considere uma Distribuição Binominal para a qual as probabilidades dos passos para frente e para trás são, respectivamente, $p = 0.6$ e $q = 0.4$.

(i) Em $N = 5$ passos, o valor médio do número de passos para frente (n) será:

(a) $\langle n \rangle = 0$
(b) $\langle n \rangle = 1$
(c) $\langle n \rangle = 2$
(d) $\langle n \rangle = 3$
(e) $\langle n \rangle = 4$
(f) $\langle n \rangle = 5$

(ii) Em $N = 5$ passos, o valor médio do número de passos para trás (m) será:

(g) $\langle m \rangle = 0$
(h) $\langle m \rangle = 1$
(i) $\langle m \rangle = 2$
(j) $\langle m \rangle = 3$
(l) $\langle m \rangle = 4$
(m) $\langle m \rangle = 5$

P1) Nas condições propostas na **Q1**, estime:

(a) Os livres caminhos médios L_F e L_Q
(b) Os livres tempos médios nos dias frio e quente, Δt_F e Δt_Q.
(c) Os coeficientes de difusão nos dias frio e quente, D_F e D_Q.

P2) Em classe, foi demonstrado que, para um passeio aleatório unidimensional, $\langle n \rangle = Np$, onde n é o número de passos para frente, p é a probabilidade de um passo para frente e N é o número de passos. Também é possível demonstrar que $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Npq$, onde q é a probabilidade de um passo para trás.

(a) Utilizando os resultados descritos no enunciado, mostre que $\langle x_N \rangle = 0$, quando $p = 1/2$. (Dica: lembre-se que a posição após N passos é $x_N = (n-m)l = (2n-N)l$, onde l é o comprimento de um passo dos passeios aleatórios e m é o número de passos para trás.
(b) Mostre também que $\sigma_x^2 = \langle x_N^2 \rangle - \langle x_N \rangle^2 = Nl^2$.

P3) Considere passeios aleatórios unidimensionais, ao longo da direção Ox, com um número total de passos $N = 6$, e $p = q = 1/2$, onde p e q representam as probabilidades de passos para frente e para trás, respectivamente.

(a) Construa um gráfico representando a função de distribuição binomial, $P_N(n)$, característica dos passeios descritos acima, onde n é o número de passos a frente.
(b) Construa outro gráfico para a distribuição binominal, mas dessa vez represente a probabilidade $P_N(x_N)$, onde $x_N = (n-m)\,l$ é a posição final, sendo m o número de passos para trás. Admita que o passo, em unidades arbitrárias, seja $l = 1$.
(c) Considere um modelo para os elétrons de condução em um fio metálico, descrevendo seu movimento por passeios aleatórios, apenas na direção x por simplicidade. Esse modelo seria razoável, pois os elétrons de condução podem colidir contra os átomos do metal (praticamente fixos) ou contra outros elétrons. No entanto, caso um campo elétrico seja aplicado ao longo do fio metálico, a probabilidade de um passo adiante (convencionado no sentido da força elétrica) torna-se maior que a probabilidade de um passo atrás (sentido contrário ao da força elétrica). Refaça o diagrama do item (a) para o caso $p = 0.7$ e $q = 0.3$. Compare os dois diagramas e discuta suas diferenças.

Respostas:

Q1) (e).

Q2) (a), (e), (i), (l).

Q3) (d), (i).

P1) (a) $L_F = 2.17 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ e $L_Q = 2.32 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. (b) $\Delta t_F = 4.47 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$ e $\Delta t_Q = 4.62 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$, utilizando $\langle v^2 \rangle^{1/2}$. (c) $D_F = 5.27 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ e $D_Q = 5.83 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

P2) Ver slides da Aula 16.

P3) A figura abaixo mostra as funções de distribuição $P_N(n)$ em função do número de passos para frente (n) para os casos $p = 0.5$ e $p = 0.7$. Você deverá ser capaz de reproduzir essa figura por si, e também de construir os gráficos para as distribuições $P_N(x_N)$ (em função de x_N). Explique também a(s) diferença(s) qualitativa(s) que resultam de $p = q$ e $p > q$.