4300259 – Termoestatística

Primeira Lista de Exercícios: Noções de Probabilidade

Conceitos: Antes de fazer a lista, esteja certo que entendeu os seguintes conceitos (defina-os com suas palavras):
Evento Simples e Evento Composto.
Eventos Disjuntos.
Espaço Amostral.
Frequência e Probabilidade.
Probabilidade Condicional.
Eventos Independentes.

Expresse com sua palavras o significado das seguintes expressões matemáticas, onde A e B denotam eventos compostos:
$P(A)$ e $P(B)$
$P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$
$P(A|B)$ e $P(B|A)$

Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando todas as respostas.

Q1) Em um dado espaço amostral:
( ) Eventos simples são necessariamente disjuntos.
( ) Eventos compostos são necessariamente disjuntos.
( ) Se i é um evento simples e A um evento composto, necessariamente $P(i \cap A) = 0$
( ) Se i é um evento simples e A um evento composto, necessariamente $P(i \cup A) = 0$

Q2) Seja A o evento de sortear uma carta preta em um baralho completo com 52 cartas, e B o evento de sortear um rei. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando todas as respostas.
( ) $P(A \cap B) = P(B)$
( ) $P(A \cup B) = P(A)$
( ) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
( ) $P(A|B) = P(B)$
( ) $P(A|B) = P(A)$
( ) A e B são eventos independentes.

Q3) No lançamento de dois dados, os eventos simples são indicados na forma (d_1, d_2), onde $d_1 = 1, \cdots, 6$ é o resultado do dado 1, enquanto $d_2 = 1, \cdots, 6$ o resultado do dado 2. Vamos definir eventos $s = d_1 + d_2$ como a soma dos resultados de cada dado. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando todas as respostas.
( ) Todos os eventos s são compostos.
( ) Todos os eventos s são equiprováveis.
( ) Todos os eventos s são disjuntos.

Q4) (i) A conhecida "regra da adição" afirma que a probabilidade de que um *ou* outro evento ocorra é dada pela soma das probabilidades dos dois eventos. Essa regra:
( ) Sempre vale para eventos simples.
( ) Sempre vale para eventos compostos.
( ) Sempre vale, seja para eventos simples ou compostos.

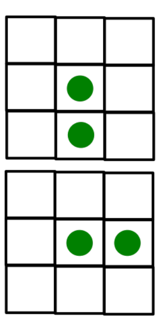
(ii) A conhecida "regra da multiplicação" afirma que a probabilidade de que um *e* outro evento ocorram é dada pelo produto das probabilidades dos dois eventos. Essa regra:
( ) Sempre vale para eventos simples.
( ) Sempre vale para eventos compostos.
( ) Sempre vale para eventos independentes.

P1) Considere o sorteio de uma carta em um baralho com 51 cartas, do qual foi retirado o dois de paus.
(a) Seja X o evento composto, "sortear uma carta de um naipe específico" ($X =$ copas, ouros, espadas, paus). Determine as probabilidades $P(X)$.
(b) Seja i o evento composto "sortear uma carta com um número específico" (isto é, "tirar" um ás, um dois, um rei, etc.). Determine as probabilidades $P(i)$.
(c) Determine os eventos i e X para os quais vale a condição $P(i \cap X) = P(i)P(X)$.
(d) Que conclusão podemos tirar da resposta do item (c)?

P2) Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 pretas. Duas bolas são sorteadas da urna sequencialmente sem reposição (a primeira bola retirada não é devolvida à urna).
(a) Indique todos os resultados possíveis para o sorteio de duas bolas (isto é, o espaço amostral). (b) Calcule as probabilidades associadas a cada um dos resultados.

P3) Refaça o probelma anterior considerando que o sorteio seja realizado com reposição (a primeira bola sorteada volta à urna).

P4) Possuo 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde.
(a) De quantas maneiras diferentes (distinguíveis) posso sequenciar essas bolas? Considere que permutações de bolas com a mesma cor são redundantes (levam a ordenamentos indistinguíveis). (b) Considere agora que as mesmas bolas tenham sido numeradas de 1 a 10, de forma que todas possam ser distinguidas. Quantas sequências distintas é possível formar?



P5) Suponha que representemos um gás utilizando N partículas idênticas distribuídas em V células ($V > N$), admitindo o modelo com repulsão de curto alcance, de forma que duas ou mais partículas não possam ocupar a mesma célula. (a) De quantas maneiras é possível distribuir as partículas? (b) Se as partículas não forem idênticas, de quantas maneiras será possível distribuí-las?

Respostas

Q1) (V) Cada evento simples é um elemento do espaço amostral. Portanto, entendendo os eventos simples como subconjuntos unitários do espaço amostral, sempre teremos $P(i \cap j) = 0$, onde i e j são eventos simples.

(F) Eventos compostos podem (quando não têm eventos simples em comum) ou não (quando têm eventos simples em comum) ser disjuntos. Não há uma propriedade geral.

(F) A condição $P(i \cap A) = 0$ não se verifica necessariamente. Apenas se i não for um elemento de A a condição se torna verdadeira.

(F) Sendo $P(i) \neq 0$ e $P(A) \neq 0$, em geral $P(i \cup A) \neq 0$, pois $P(i \cup A) = P(i) + P(A) - P(i \cap A)$.

Q2) (F) O evento composto $A \cap B$ contém dois eventos simples (sorteio dos reis de paus ou espadas), enquanto B contém quatro eventos simples (sorteio de qualquer rei).

(F) O evento composto $A \cup B$ contém 28 eventos simples (sorteio de qualquer carta preta, do rei de copas ou do rei de ouros), enquanto A contém 26 eventos simples (sorteio de qualquer carta preta).

(V) $P(A \cap B) = 2/52 = 1/26$, enquanto $P(A)P(B) = (26/52)(4/52) = 1/26$.

(F) $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A)$.

(V) Ver justificativa anterior.

(V) Por definição, A e B são independentes se $P(A|B) = P(A)$.

Q3) (F) Os eventos $s = 2$ e $s = 12$ são simples (conjuntos unitários no espaço amostral), correspondendo a $(d_1 = 1, d_2 = 1)$ e $(d_1 = 6, d_2 = 6)$, respectivamente.

(F) Por exemplo $P(s = 2) = 1/36$ (probabilidade do evento simples $(d_1 = 1, d_2 = 1)$) e $P(s = 3) = 2/36$ (probabilidade do evento composto $(d_1 = 1, d_2 = 2)$ ou $(d_1 = 2, d_2 = 1)$). Os eventos simples (d_1, d_2) são equiprováveis $(P = 1/36)$, mas os eventos compostos $s = d_1 + d_2$ não o são.

(V) Cada evento simples (d_1, d_2) pertence a apenas um evento composto $s = d_1 + d_2$ (a negação desta afirmação equivale a afirmar que a soma $d_1 + d_2$ tem mais de um resultado s possível).

Q4) (i) (V) Por definição, $P(i \cap j) = 0$ para eventos simples, portanto $P(i \cup j) = P(i) + P(j)$.

(F) Apenas no caso de eventos compostos disjuntos, $P(A \cap B) = 0$, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(F) A regra vale para eventos simples e para eventos compostos disjuntos. Em geral, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(ii) (F) Uma vez que $P(i \cap j) = 0$, necessariamente $P(i \cap j) \neq P(i)P(j)$ (admitindo que as probabilidades $P(i)$ e $P(j)$ sejam não nulas).

(F) Só é garantida para eventos compostos independentes.

(V) As duas definições equivalentes de eventos independentes são $P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

P1) (a) Para $X =$ copas, ouros e espadas, há 13 eventos simples possíveis, donde $P(X) = 13/51$. Para $X =$ paus, $P(X) = 12/51$.

(b) Para $i =$ ás, três, quatro,..., rei, teremos $P(i) = 4/51$. Para $i = 2$, $P(i) = 3/51$.

(c) Para $i =$ ás, três, quatro,..., rei e $X =$ copas, ouros e espadas, $P(i \cap X) = 1/51$, e $P(i)P(X) = (4/51)(13/51) = (52/51)(1/51) \neq 1/51$.

Para $i =$ ás, três, quatro,..., rei e $X =$ paus, $P(i \cap X) = 1/51$, e $P(i)P(X) = (4/51)(12/51) = (48/51)(1/51) \neq 1/51$.

Para $i =$ dois e $X =$ copas, ouros e espadas, $P(i \cap X) = 1/51$ e $P(i)P(X) = (3/51)(13/51) = (39/51)(1/51) \neq 1/51$.
(d) Como $P(i \cap X) \neq P(i)P(X)$ em todos os casos, nenhum dos eventos i é independente de nenhum dos eventos X.

P2) (a) Sendo v o evento "sortear uma bola vermelha" e p o evento "sortear uma bola preta", os resultados possíveis são: vv, vp, pv, pp.
(b) Resultado vv: havendo 10 bolas na urna, a probabilidade de que a primeira bola seja vermelha é $P(v_1) = 4/10$ (os sub-índices 1 e 2 apenas indicam a ordem do sorteio, por clareza). A probabilidade de que a segunda bola seja vermelha, dado que a primeira foi vermelha, é $P(v_2|v_1) = 3/9$. Portanto, $P(vv) = P(v_1)P(v_2|v_1) = (4/10)(3/9) = 2/15$.
Resultado pv: Probabilidade de que a segunda bola seja preta dado que a primeira foi vermelha é $P(p_2|v_1) = 6/9$, donde $P(pv) = P(v_1)P(p_2|v_1) = (4/10)(6/9) = 4/15$.
Resultado vp: Probabilidade de que a primeira bola seja preta: $P(p_1) = 6/10$. Probabilidade de que a segunda seja vermelha dado que a primeira foi preta, $P(v_2|p_1) = 4/9$. Portanto, $P(vp) = P(p_1)P(v_2|p_1) = (6/10)(4/9) = 4/15$.
Resultado pp: Probabilidade de que a segunda bola seja preta dado que primeira foi preta: $P(p_2|p_1) = 5/9$, donde $P(vv) = P(p_1)P(p_2|p_1) = (6/10)(5/9) = 5/15 = 1/3$.
OBS: É legítimo interpretar que vp e pv sejam o mesmo resultado ("uma bola vermelha e outra preta"). Nesse caso, a probabilidade do resultado seria $P(vp) + P(pv) = 8/15$.

P3) (a) Os resultados possíveis são os mesmos.
(b) $P(vv) = P(v_1)P(v_2|v_1) = (4/10)(4/10) = 4/25$
$P(pv) = P(v_1)P(p_2|v_1) = (4/10)(6/10) = 6/25$
$P(vp) = P(p_1)P(v_2|p_1) = (6/10)(4/10) = 6/25$
$P(pp) = P(p_1)P(p_2|p_1) = (6/10)(6/10) = 9/25$
OBS1: $P(pv) + P(vp) = 12/25$ (interpretação discutida acima).
OBS2: Note que, havendo reposição, o sorteio da segunda bola é independente do sorteio da primeira: $P(v_2|x_1) = P(v_1)$ e $P(p_2|x_1) = P(p_1)$, onde $x = p, v$.

P4) (a) Havendo 10 bolas, existem 10! permutações possíveis. No entanto, é necessário descontar as permutações de bolas da mesma cor:

$$\Omega = \frac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!} = 12.600$$

.
(b) Uma vez que não há mais redundância,, $\Omega = 10! = 3.628.800$

P5) (a) Há V maneiras de distribuir a primeira partícula, $(V-1)$ maneiras de distribuir a segunda, ..., e $[V-(N-1)]$ maneiras de distribuir a N-ésima partícula. Assim, haveria em princípio $V(V-1)\cdots(V-N+1) = V!/(V-N)!$ maneiras de distribuir as partículas. Porém, sendo idênticas, há $N!$ configurações redundantes, de forma que

$$\Omega = \frac{V!}{N!(V-N)!}\ .$$

(b) Nessa caso, não há configurações redundantes: $\Omega = \frac{V!}{(V-N)!}$.