

5

MAGNETOSTÁTICA

5.1 INTRODUÇÃO

Talvez um dos dias mais importante da humanidade, foi aquele em que *Hans Christian Oersted*, professor da Universidade de Copenhague, descobriu em 1820, durante uma aula de laboratório de circuitos elétricos, a ligação entre o Magnetismo e a Eletricidade, contrariando as previsões, muito convincentes de Coulomb, que estas ciências não poderiam interagir.

A publicação de suas experiências, em latim clássico, provocou uma explosão de atividades científicas na ocasião.

Outros pesquisadores, como *Ampère* e *Henry* perceberam que esta descoberta colocava o Eletromagnetismo, nome dado a esta nova ciência, numa posição tal que poderia mudar o mundo de forma tão abrangente como aquela produzida pela máquina a vapor. Isto foi confirmado pouco tempo depois com a invenção do motor elétrico.

O grande passo para aquele objetivo foram os estudos subseqüentes envolvendo a produção de campos magnéticos em estruturas ferromagnéticas, as quais, devido à alta permeabilidade daqueles materiais, possibilitaram o estabelecimento de campos magnéticos elevados.

A primeira aplicação das estruturas ferromagnéticas foi à construção dos eletroímãs, cuja primeira demonstração de seu funcionamento ocorreu em 23 de Maio de 1825 na *Royal Society of Arts* por seu criador *William Sturgeon*.

Utilizando uma barra cilíndrica de ferro curvada e envernizada, *Sturgeon* a envolveu com uma bobina condutora de fios não isolados, conseguindo levantar uma massa de 3600 gramas. Foi um feito brilhante para o seu tempo.

Para sua infelicidade, *James Prescott Joule* estava entre seus alunos, o qual observando o trabalho do mestre, identificou alguns erros e reconstruiu o eletroímã, conseguindo levantar, com a mesma estrutura, uma massa de 20 kg. O erro de *Sturgeon* foi ter utilizado na confecção do eletroímã fios condutores não isolados, diminuindo em muito a eficiência da bobina.

Inconformado em ter sido superado por um discípulo, *Sturgeon* construiu em 1830 um eletroímã capaz de levantar 550 kg, corrigindo os defeitos do primeiro.

Mas nesta altura dos acontecimentos ele já tinha um rival do outro lado do Atlântico, *Joseph Henry* da Universidade de Yale. *Henry* construiu um eletroímã de apenas 30 kg capaz de levantar uma tonelada.

Em 1840, *Joule* novamente, construiu um novo tipo de eletroímã completamente diferente dos anteriores, o qual possuía mais de dois pólos, que aumentou em muito a capacidade de levantamento. Este eletroímã, de apenas 5,5 kg levantou 1200 kg. Ato contínuo, os eletroímãs apareceram em grande número nos laboratórios de pesquisas, em reuniões aristocráticas e até em cirurgias. Os eletroímãs tiveram participação decisiva no desenvolvimento industrial, sobretudo na siderurgia e nas minas extrativas.

Devido à importância para a engenharia elétrica, ver-se-á seguir técnicas de análise dos principais fenômenos eletromagnéticos presentes em dispositivos deste tipo, os quais serão úteis no entendimento do comportamento de todos os equipamentos eletromecânicos e atuará ainda como um elemento motivador para os estudos da Conversão Eletromecânica de Energia.

5.2 ALGUMAS PROPRIEDADES MAGNÉTICAS DA MATÉRIA

Todas as propriedades magnéticas da matéria são explicadas em termos de movimento de elétrons e das cargas positivas associadas aos átomos e moléculas.

Assim, um elétron descrevendo sua órbita se comporta como anel elementar de corrente elétrica sendo responsável pelo aparecimento de um campo magnético elementar associado.

Fenômeno semelhante é produzido pela própria rotação do elétron, para qual está também associado um campo magnético elementar ao spin.

A ação simultânea de todos estes campos elementares é traduzida num comportamento magnético e a caracterização das propriedades magnéticas, a partir destas análises, faz parte dos esforços da física da matéria, a qual extrapola os objetivos deste livro.

Resultado teórico e experimental: qualquer substância sob ação de um campo magnético se comporta de uma das três formas:

- **Substâncias Diamagnéticas:** tornam-se magnetizadas fracamente em oposição ao campo impresso. Este comportamento varia diretamente com a intensidade do campo, mas independe da temperatura. Exemplos de substâncias diamagnéticas: Cu, Ag, Zn, Bi, Au, etc.;

- Substâncias Paramagnéticas: tornam-se fracamente magnetizadas na direção do campo impresso. Este comportamento é proporcional ao campo impresso e varia inversamente com a temperatura absoluta. Exemplos de substâncias paramagnéticas: Pt, Mg, Al, Cr, etc.;
- Substâncias Ferromagnéticas: ficam fortemente magnetizadas na direção do campo impresso. Este comportamento, em geral, não é diretamente proporcional ao campo impresso e varia inversamente com a temperatura absoluta. Exemplos de substâncias ferromagnéticas: Fe, Co, Ni.

A propriedade física dos materiais que caracteriza o comportamento magnético de uma substância é a sua permeabilidade magnética, representada pela letra grega μ (mi), a qual no sistema internacional tem a dimensão Henry/metro. Na engenharia elétrica, a menor permeabilidade é aquela apresentada pelo ar (ou vácuo), cujo valor no SI é dado por $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} (H/m)$, evidenciando a dificuldade do estabelecimento de campos magnéticos no ar, como ver-se-á a seguir.

A permeabilidade μ dos materiais diamagnéticos e paramagnéticos difere muito pouco da permeabilidade do ar, de modo que para estes materiais podemos considerar $\mu = \mu_0$.

Por outro lado, a permeabilidade magnética nem sempre é uma grandeza escalar. Nos materiais ditos “anisotrópicos”, nos quais o campo magnético \vec{B} não está alinhado com o vetor intensidade magnética \vec{H} esta grandeza é representada por um tensor.

Materiais sólidos sob esforços, ferro ou aço que sofreram processos mecânicos e também os cristais, apresentam esta propriedade.

Num material ferromagnético, embora \vec{B} e \vec{H} tenham a mesma direção, não são grandezas diretamente proporcionais, visto que a permeabilidade μ deste material é função do campo magnético \vec{B} . Acrescenta-se ainda o fato de que nos materiais ferromagnéticos os valores da permeabilidade relativa $\mu_R = \mu / \mu_0$ podem, dependendo do material, ser elevados. A relação entre \vec{B} e \vec{H} para um material ferromagnético é conhecida como curva de magnetização.

5.3 CIRCUITO MAGNÉTICO

De volta ao século XIX, a geração de pesquisadores que surgiu com o trabalho de *Ampère* continuou investindo na obtenção das leis da nova ciência do eletromagnetismo, e a

principal delas, obtida ainda na primeira metade do século, foi denominada Lei Circuital de *Ampère*, em homenagem ao mestre.

As experiências realizadas por estes pesquisadores mostraram que a circuitação (integral de linha num contorno fechado) do vetor campo magnético é diretamente proporcional à quantidade de corrente concatenada com o contorno sobre o qual foi efetuada a circuitação. A pergunta que agora se apresenta é: O que significa corrente concatenada com um contorno?

A Figura 5.1 mostra um contorno C , orientado sobre o qual se apóia uma superfície qualquer S .

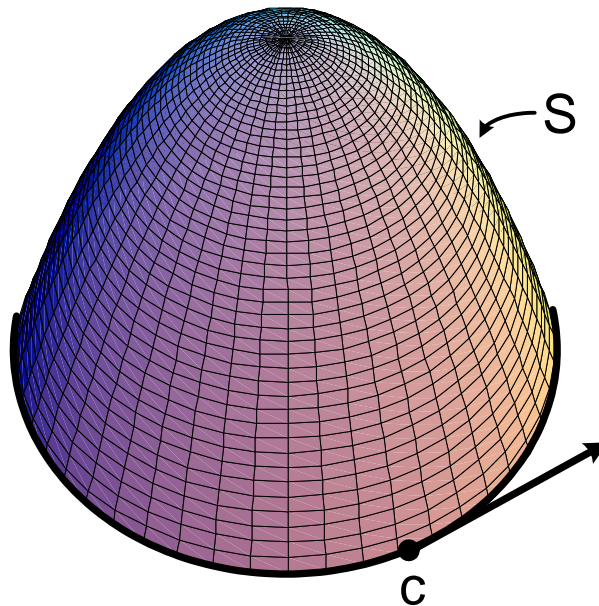


Figura 5.1 – Contorno fechado - Superfície

Entende-se por corrente concatenada com um contorno, a corrente elétrica que cruza uma superfície *qualquer* apoiada no contorno e é envolvida por este.

Assim, aplicando este conceito, as correntes concatenadas com o contorno da Figura 5.2 são i_1 , i_2 , i_4 (três vezes). Note que i_3 não é uma corrente concatenada por não cruzar uma superfície *qualquer* apoiada em C .

À corrente concatenada é também atribuído um sinal vinculado à orientação (arbitrária) do contorno C , como mostrado na Figura 5.2.

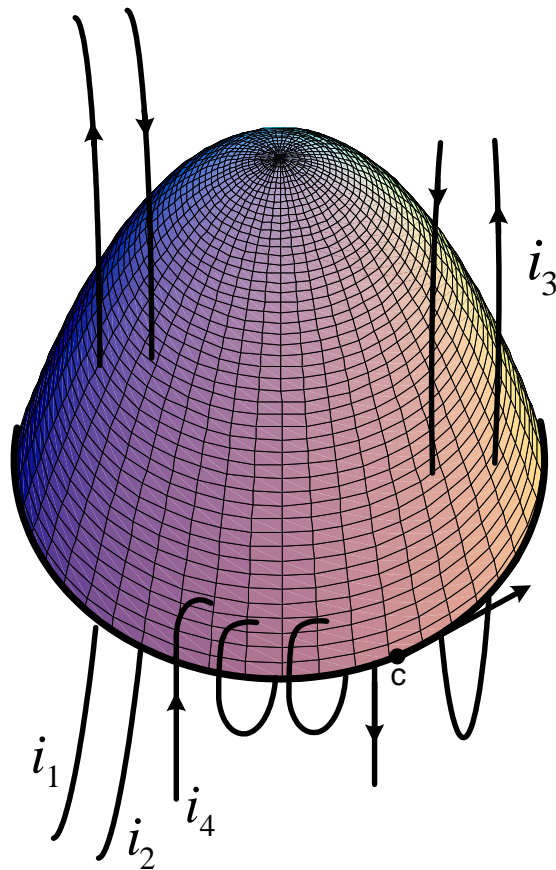


Figura 5.2 – Corrente concatenada – convenções

Com a orientação do contorno estabelecida, orienta-se a normal a um ponto qualquer na superfície nele apoiada aplicando-se a regra da mão direita, de modo que os dedos da mão, exceto o polegar, acompanham a orientação do contorno resultando um sentido para a normal concordante com o sentido do polegar. Na Figura 5.2 está indicada a orientação da normal em um ponto genérico daquela superfície; aproveite e identifique que está de acordo com o que foi convencionado anteriormente.

Uma vez estabelecida estas orientações, contabiliza-se como positiva a corrente concatenada com o contorno cujo sentido é concordante com o sentido da normal à superfície e negativa em caso contrário.

Assim sendo, para a distribuição de corrente mostrada na Figura 5.1, a totalidade das correntes concatenadas (i_l) com aquele contorno é dada por:

$$i_t = i_1 - i_2 - 3i_4$$

Voltando à pergunta, os esforços se concentraram na obtenção da circuitação do campo sobre um contorno para identificar se o vetor campo magnético era ou não conservativo, cuja circuitação é nula, como é o caso do campo elétrico constante no tempo. Isto posto, a representação matemática da Lei Circuital de *Ampère* é dada por:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_t \quad (5.1)$$

À constante de proporcionalidade μ_0 deu-se o nome de permeabilidade magnética do ar (ou vácuo), na medida em que todas as experiências foram realizadas tendo o ar como o meio envolvente das correntes elétricas.

Com a evolução dos estudos do eletromagnetismo envolvendo a presença da matéria, mais precisamente com a utilização dos materiais ferromagnéticos como condutores de campo magnético, para os quais a permeabilidade magnética é dependente do campo magnético, a expressão (5.1) foi reescrita da seguinte forma:

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = i_t \quad (5.2)$$

A versão atual da Lei Circuital de *Ampère* é obtida substituindo-se simplesmente $\frac{B}{\mu}$ por H em (5.2), resultando, finalmente:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_t \quad (5.3)$$

Ao vetor $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ dá-se o nome de vetor intensidade magnética, uma analogia ao vetor campo elétrico o qual também era conhecido por vetor intensidade elétrica.

Observa-se neste caso também que a circuitação do vetor intensidade magnética num determinado contorno é igual as correntes com este concatenada podendo, muito bem, substituí-las nos cálculos. Note que a Lei Circuital de *Ampère*, expressa em termos do vetor intensidade magnética \vec{H} , não depende do meio, sendo dependente única e exclusivamente da totalidade das correntes concatenadas com o contorno. Convém, no entanto, destacar que apenas a circuitação de \vec{H} no contorno não depende do meio e não

o vetor intensidade magnética \vec{H} isoladamente, o qual é fortemente dependente do meio envolvente das correntes.

Para o entendimento do conceito de circuito magnético, calcula-se o fluxo magnético produzido no interior de um toróide por uma bobina de N espiras percorridas por uma corrente contínua I , como mostrado na Figura 5.3.

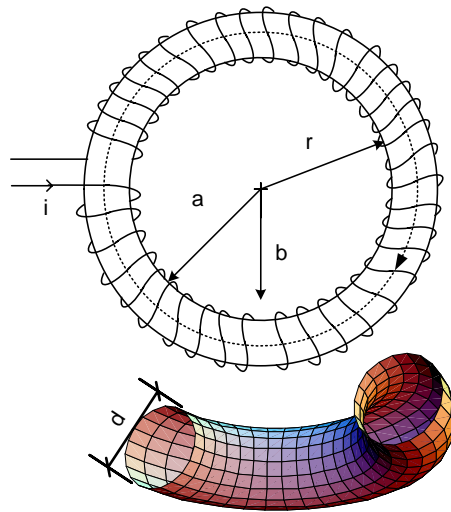


Figura 5.3– Campo produzido no toróide

Na mesma figura, está mostrada também a geometria das linhas de campo magnético, com seu respectivo sentido obtido a partir da aplicação da regra da mão direita ao sentido da corrente elétrica.

A própria geometria do problema permite concluir que a amplitude do vetor intensidade magnética (\vec{H}), sobre qualquer linha de campo no interior do toróide é constante, apenas sua direção é diferente ao longo da linha de campo, na medida em que este vetor, em cada ponto desta linha de campo, é tangente a ela.

A determinação da amplitude do vetor intensidade magnética é obtida a partir da Lei Circuital de Ampère, isto é:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_t \quad (5.4)$$

Escolhendo uma linha de campo de raio $a < r < b$ como sendo o contorno C da do primeiro membro da Equação 5.4, o segundo membro da mesma equação, correspondente

a corrente concatenada com o referido contorno, será igual ao produto Ni , denominado força magneto-motriz (Fmm) da bobina. Assim podemos escrever:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni \quad (5.5)$$

Como discutido anteriormente, a amplitude de (\vec{H}) é constante sobre C , de modo que a Equação (5.5) pode ser reescrita como segue:

$$H \oint_C dl = Ni \quad (5.6)$$

A integral de linha do primeiro membro é igual ao perímetro do contorno C , resultando, finalmente:

$$H 2\pi r = Ni \quad (5.7)$$

ou ainda:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad (5.8)$$

Este resultado só é válido para $a < r < b$, pois fora desse domínio ($r < a$ e $r > b$), o campo magnético é nulo.

A partir da relação constitutiva $\vec{B} = \mu \vec{H}$ obtemos o campo magnético no interior do toróide, que resulta:

$$B = \frac{\mu Ni}{2\pi r} \quad (5.9)$$

A Figura 5.4 mostra o comportamento do campo magnético no interior do toróide em função da sua distância em relação ao centro.

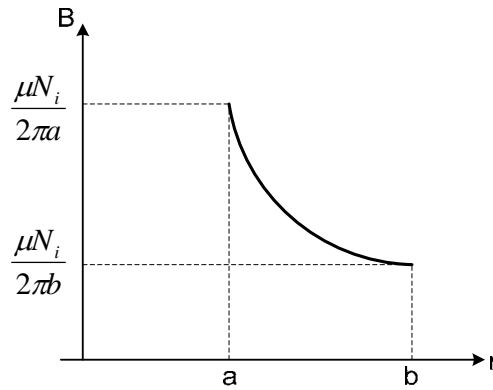


Figura 5.4 – Comportamento de B em função de r

Suponha-se agora que as dimensões do toróide são tais que $d \ll a$, ou seja, as dimensões da seção de passagem do fluxo magnético são bem menores que as dimensões do dispositivo. Esta característica é comum na maioria dos dispositivos elétricos, tais como: os transformadores, os geradores e motores elétricos, etc.

Nestas condições, a variação do campo magnético no interior do toróide não é sensível, e por esta razão o campo magnético pode ser considerado “*praticamente*” constante no seu interior.

Pode-se então tomar as seguintes decisões:

1. Considerar o campo magnético no interior do toróide constante e igual ao seu valor máximo obtido em $r = a$, isto é: $B = \frac{\mu Ni}{2\pi a}$,
2. Considerar o campo magnético no interior do toróide constante e igual ao seu valor mínimo obtido em $r = b$, isto é: $B = \frac{\mu Ni}{2\pi b}$ ou,
3. Considerar o campo magnético no interior do toróide constante e igual a um valor intermediário entre seus valores máximo e mínimo.

Não resta dúvida que a última decisão é a mais razoável, na medida em que é aquela que levará a um menor erro de aproximação.

É razoável também, escolher como constante o valor do campo magnético no interior do toróide aquele obtido no raio médio do dispositivo, isto é, $B = B(r_{MED})$, no qual $r_{MED} = (a + b)/2$.

Assim sendo, para todos os efeitos, o campo magnético na seção transversal do toróide será constante e igual a:

$$B = \frac{\mu Ni}{2\pi r_{MED}} \quad (5.10)$$

O fluxo magnético ϕ através da seção transversal do dispositivo é dado por:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.11)$$

Como as linhas de campo magnético são perpendiculares à seção transversal e o seu valor é constante nesta mesma seção, a Equação (5.11) pode ser escrita como segue:

$$\phi = B.S \quad (5.12)$$

Substituindo-se B pelo seu valor indicado em (5.10), resulta:

$$\phi = \frac{\mu Ni S}{2\pi r_{MED}}$$

Ou ainda,

$$\phi = \frac{Ni}{\frac{1}{\mu} \frac{l}{S}} \quad (5.13)$$

Na qual $l = 2\pi r_{MED}$, representa o comprimento médio das linhas de campo magnético e coincide com o comprimento médio do toróide.

Neste ponto, é conveniente compararmos o resultado obtido em (5.13), com aquele obtido no cálculo da corrente elétrica do circuito da Figura 5.5.

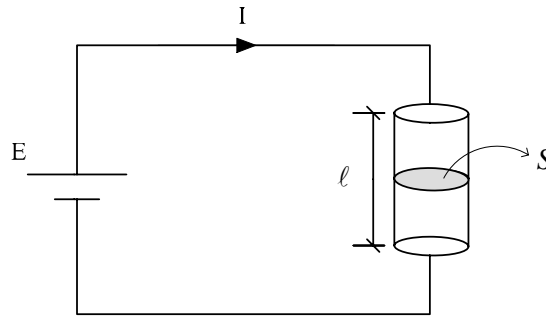


Figura. 5.5 – Circuito Elétrico

No circuito da Figura 5.5, obtemos, a partir da Lei de Ohm:

$$I = \frac{E}{\frac{l}{\sigma S}} \tag{5.14}$$

Comparando (5.13) com (5.14), identificamos as seguintes relações:

Tabela 5.1 – Identificação de grandezas.

<i>Circuito Elétrico</i>	<i>Circuito Magnético</i>
I :Corrente Elétrica (A)	ϕ : Fluxo Magnético (Wb)
E :Força eletromotriz (V)	$F = Ni$:Força magnetomotriz (Aesp)
σ :Condutividade (S/m)	μ :Permeabilidade (H/m)

Dessa forma, podemos associar ao problema do cálculo do campo magnético no interior do toróide, o seguinte circuito elétrico análogo:

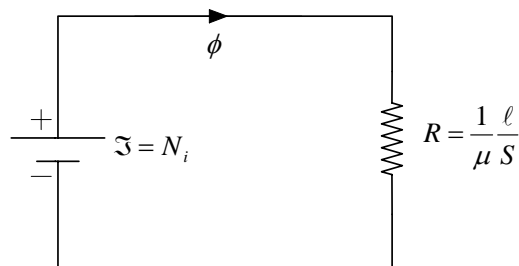


Figura 5.6 – Circuito Elétrico Análogo.

Outras grandezas podem ser associadas entre o circuito elétrico e o circuito magnético, são elas:

Tabela 5.2 – Identificação de grandezas.

<i>Circuito Elétrico</i>	<i>Circuito Magnético</i>
$J = \frac{I}{S}$: Densidade de Corrente Elétrica (A/m^2)	$B = \frac{\phi}{S}$: Densidade de Fluxo Magnético (Wb/m^2)
$R = \frac{l}{\sigma S}$: Resistência (Ω)	$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}$: Relutância ($Aesp/Wb$)
$G = \frac{1}{R}$: Condutância (S)	$P = \frac{1}{\mathfrak{R}}$: Permeância ($Wb/Aesp$)

Notemos que a associação entre o circuito elétrico e o circuito magnético levou a denominação *densidade de fluxo magnético* como sinônimo do campo magnético.

5.4 ESTRUTURAS MAGNÉTICAS LINEARES

As estruturas magnéticas reais apresentam geometrias muito diferentes da geometria toroidal discutida no item anterior, no entanto, com algum grau de aproximação, pode-se utilizar o recurso da associação de um circuito elétrico análogo ao problema magnético.

A estrutura magnética mais simples é a do reator, apresentada na Figura 5.7.

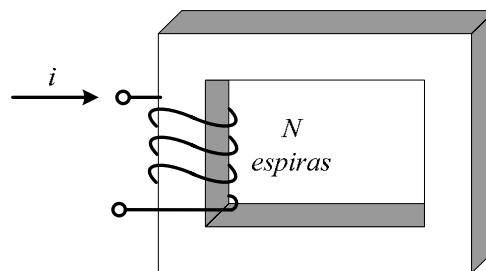


Figura 5.7 – Reator.

Este tipo construtivo é muito mais simples que o formato toroidal, no entanto, algumas diferenças importantes devem ser discutidas, são elas:

1. No toróide, como o enrolamento está envolvendo toda a estrutura magnética, o fluxo magnético resultante está (na sua quase totalidade) confinado no interior desta estrutura;

2. Na construção mostrada na Figura 5.7, como o enrolamento está concentrado em apenas uma “perna” da estrutura magnética, nem todo o fluxo magnético está confinado em seu interior e, dependendo do valor da permeabilidade magnética do material do núcleo, uma parcela considerável deste fluxo pode se fechar pelo ar. Esta parcela do fluxo magnético produzido pela bobina é denominada “fluxo de dispersão”.

A Figura 5.8 mostra as linhas de campo magnético produzidos pela circulação de corrente contínua na bobina de excitação em duas situações: permeabilidade magnética baixa e alta.

Note que no caso de alta permeabilidade magnética, o fluxo magnético está preferencialmente confinado no interior da estrutura, implicando fluxo de dispersão virtualmente nulo.

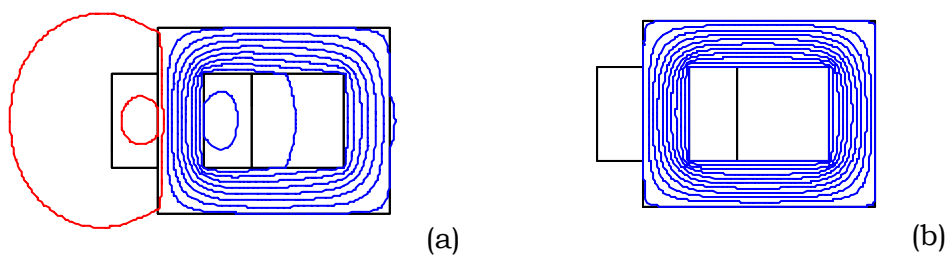


Figura 5.8 – Linhas de campo magnético num reator
 (a) Permeabilidade magnética do núcleo baixa
 (b) Permeabilidade magnética do núcleo elevada

Admiti-se, até manifestações contrárias, que a permeabilidade magnética dos núcleos é suficientemente elevada para que possamos desprezar os fluxos de dispersão.

Dessa forma, o circuito elétrico análogo para o reator mostrado na Figura 5.7 será idêntico àquele mostrado na Figura 5.6, sendo que para o cálculo da relutância são utilizadas as seguintes grandezas, como mostra a Figura 5.9:

- ℓ : Comprimento médio da estrutura;
 S : Área da seção transversal de passagem do fluxo.

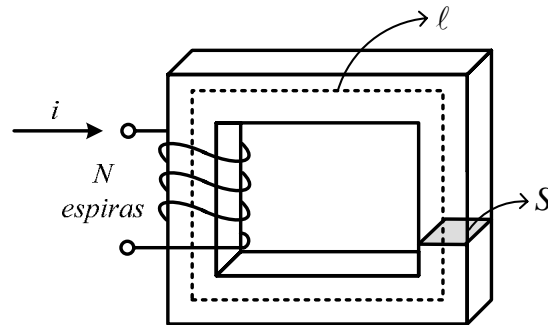


Figura 5.9 - Grandezas para cálculo da relutância

Exercício 5.1

O reator mostrado na Figura 5.10 foi construído com um material magnético de permeabilidade relativa $\mu_r = 3000$. A bobina de excitação possui 200 espiras. Calcular a corrente na bobina de excitação necessária para estabelecer uma densidade de fluxo magnético $1,2 \text{ Wb} / \text{m}^2$. É dada a permeabilidade do vácuo $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} (\text{H} / \text{m})$.

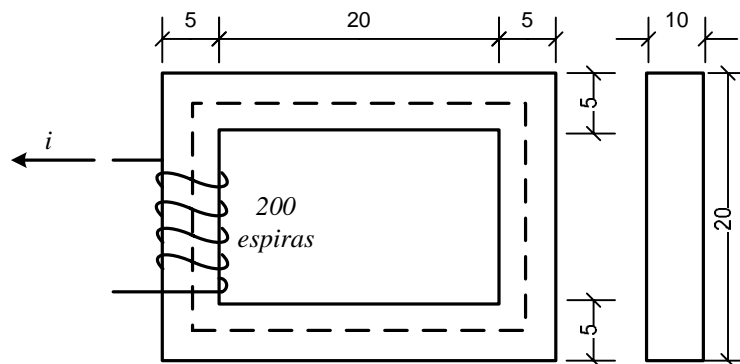


Figura 5.10 – Exercício 5.1 – Dimensões em cm

Solução:

A solução do problema se resume em montar o circuito elétrico análogo do problema magnético.

Assim, para este caso temos:

$$\ell = 2 \cdot (2,5 + 20 + 2,5) + 2 \cdot (20 - 2 \cdot 2,5) = 80 \text{ cm ou } 0,8 \text{ m}$$

$$S = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2 \text{ ou } 50 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Como consequência resulta:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu S} = \frac{1}{3000 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 42,44 \cdot 10^3 \text{ (Aesp/Wb)}$$

$$\text{Sendo } B = 1,2 \text{ Wb/m}^2, \text{ obtém-se } \phi = B \cdot S = 1,2 \cdot 50 \cdot 10^{-4} = 60 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}$$

Dessa forma, o circuito elétrico análogo é dado por:

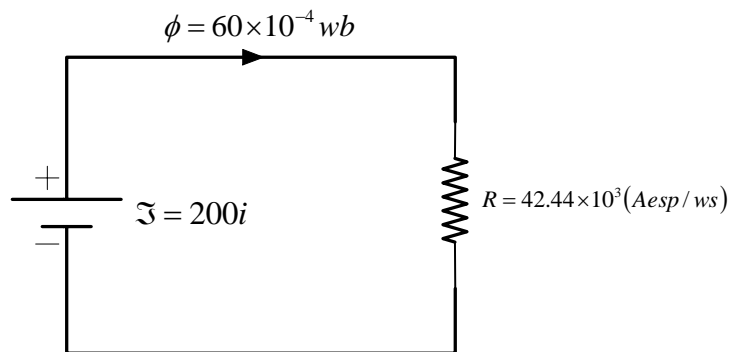


Figura 5.11 – Circuito elétrico análogo

Da análise do circuito da Figura 5.11, obtemos:

$$Ni = \mathfrak{R} \phi$$

Substituindo pelos seus valores, obtém-se:

$$200i = 42,44 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-4}$$

ou ainda:

$$i = 1,27 \text{ A}$$

As estruturas magnéticas reais, tais como aquelas utilizadas nos transformadores, nos motores e geradores elétricos, apresentam geometrias mais complexas que as apresentadas até o momento.

Como exemplo, a estrutura da Figura 5.12 mostra a geometria típica da estrutura magnética de um transformador monofásico.

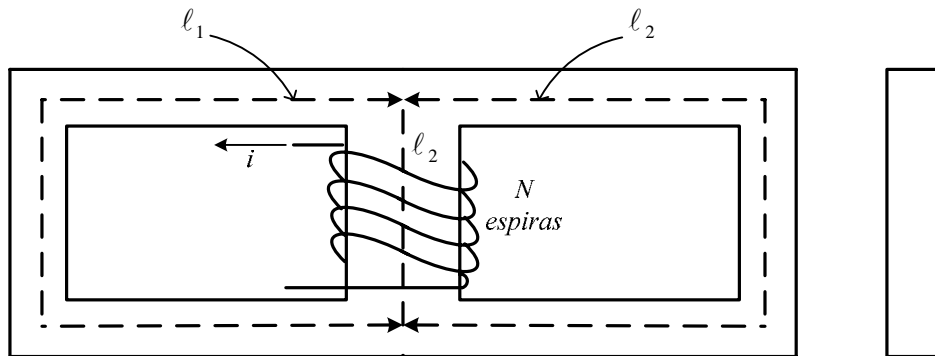


Figura 5.12 – Estrutura magnética de um transformador monofásico.

O circuito elétrico análogo para uma estrutura deste tipo, consistirá de um circuito elétrico com a mesma geometria, isto é, um circuito elétrico com duas malhas, com as seguintes características:

- a) No braço central do circuito deverá ser colocada uma fonte de f.m.m. Ni em série com uma relutância correspondente aquele braço calculada por:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (5.15)$$

na qual: $l = l_2$ e $S = W.T$.

- b) Nos braços laterais, as relutâncias correspondentes também serão calculadas segundo (6.12), fazendo: $l = l_1$ e $S = Z.T$.

Dessa forma, o circuito elétrico análogo da estrutura magnética da Figura 5.12 é dado por:

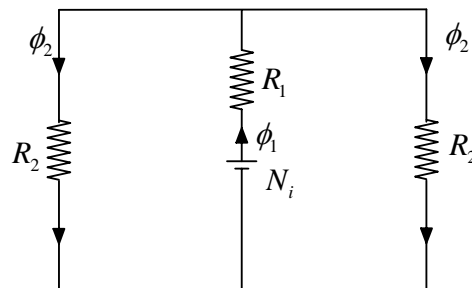


Figura 5.13 – Circuito elétrico análogo.

A solução do problema, isto é, a obtenção dos fluxos magnéticos em cada braço e a f.m.m. da bobina é obtida aplicando-se técnicas clássicas de resolução de circuitos elétricos.

Exercício 5.2

A estrutura magnética da Figura 5.14 é confeccionada de material magnético de permeabilidade relativa $\mu_R = 4000$. O número de espiras da bobina de excitação é 400 espiras. Determine a f.m.m. e a corrente da bobina para estabelecer uma densidade de fluxo magnético $0,5 \text{ Wb} / \text{m}^2$ no braço direito da estrutura.

Obs.: todas as dimensões são expressas em *cm*.

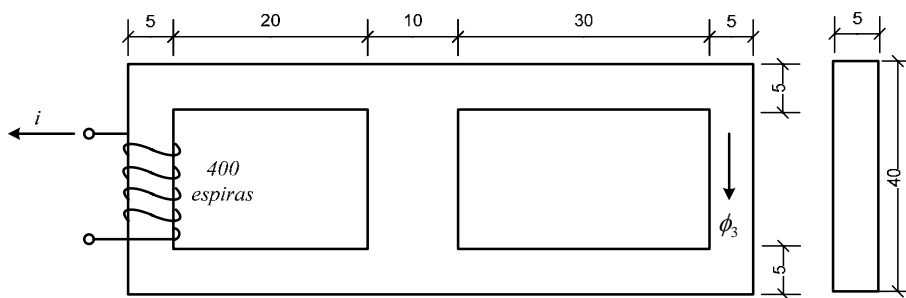


Figura 5.14 – Estrutura magnética.

Solução:

O primeiro passo na resolução do problema, consiste em montar o circuito elétrico análogo, o qual possui a mesma geometria que a estrutura magnética. Assim, para o problema em questão, o circuito elétrico análogo é dado por:

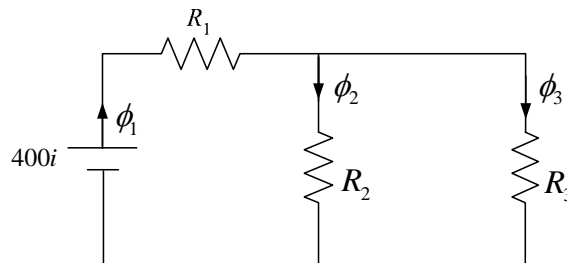


Figura 5.15 – Circuito elétrico análogo.

Em seguida calculamos as relutâncias de cada trecho utilizando a expressão (5.15). Para o problema em questão resultam:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu} \frac{l_1}{S_1} = \frac{1}{4000.4\pi 10^{-7}} \cdot \frac{[2.(2,5 + 20 + 5) + (40 - 2.2,5)].10^{-2}}{5.5.10^{-4}} = 71,6.10^3 \text{ (Aesp/Wb)}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu} \frac{l_2}{S_2} = \frac{1}{4000.4\pi 10^{-7}} \cdot \frac{[(40 - 2.2,5)].10^{-2}}{10.5.10^{-4}} = 13,9.10^3 \text{ (Aesp/Wb)}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{1}{\mu} \frac{l_3}{S_3} = \frac{1}{4000.4\pi 10^{-7}} \cdot \frac{[2.(5 + 30 + 2,5) + (40 - 2.2,5)].10^{-2}}{5.5.10^{-4}} = 87,5.10^3 \text{ (Aesp/Wb)}$$

No braço direito da estrutura é dado $B_3 = 0,5 \text{ Wb/m}^2$, de modo que:

$$\phi_3 = B_3 \cdot S_3 = 0,5.25.10^{-4} = 12,5.10^{-4} \text{ Wb}$$

Da malha direita do circuito obtemos:

$$\mathfrak{R}_2 \phi_2 = \mathfrak{R}_3 \phi_3$$

De modo que:

$$\phi_2 = \frac{87,5.10^3 \cdot 12,5.10^{-4}}{13,9.10^3} = 78,7.10^{-4} \text{ Wb}$$

Aplicando-se a lei de *Kirchoff* para as correntes obtém-se:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 = 91,2.10^{-4} \text{ Wb}$$

Aplicando-se agora a lei de *Kirchoff* das tensões para a malha da esquerda, podemos escrever:

$$Ni = \mathfrak{R}_1 \phi_1 + \mathfrak{R}_2 \phi_2$$

Resultando:

$$fmm = Ni = 71,6.10^3 \cdot 91,2.10^{-4} + 13,9.10^3 \cdot 78,7.10^{-4} = 762 \text{ Aesp}$$

e também:

$$i = \frac{fmm}{N} = \frac{762}{400} = 1,9 \text{ A}$$

5.5 ENTREFERROS EM ESTRUTURAS MAGNÉTICAS

Todas as estruturas magnéticas apresentam um entreferro (espaço de ar inserido entre duas porções magnéticas) em seu circuito magnético. Este entreferro pode ser inserido propositalmente, como ocorre nos motores e geradores elétricos como mostrado na Figura 5.16, ou involuntariamente devido ao processo construtivo, como indicado na Figura 5.17.

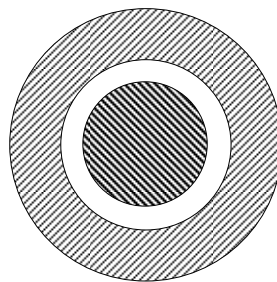


Figura 5.16 – Entreferro de um motor elétrico.

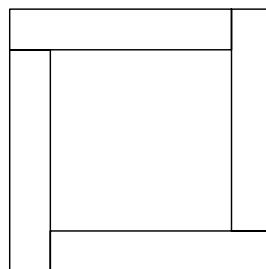


Figura 5.17 – Entreferro involuntário.

Obs: A colocação de chapas lado a lado introduz um pequeno entreferro involuntário entre elas.

Qualquer que seja sua origem e tamanho, o entreferro é parte importante da estrutura magnética e deve sempre ser considerado no circuito magnético.

A Figura 5.18 mostra as linhas de campo magnético em uma estrutura com a presença de um entreferro, destacando o fenômeno do espraio das linhas de campo na região do entreferro

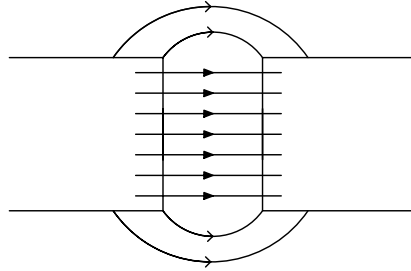


Figura 5.18 - Espraio das linhas de campo.

O efeito do espraio das linhas de campo equivale a um acréscimo da área de passagem do fluxo magnético no entreferro e como tal deve ser corrigida. Algumas fórmulas empíricas ajudam-nos a resolver, são elas:

A. Entreferro com faces paralelas e iguais

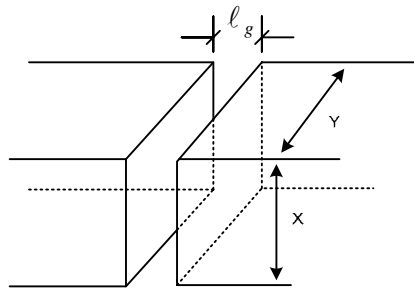


Figura 5.19 – Entreferro com faces paralelas e iguais.

Neste caso, a área efetiva de passagem do fluxo magnético no entreferro é dada por:

$$S_g = (X + l_g).(Y + l_g) \quad (5.16)$$

B. Entreferro com faces paralelas e diferentes

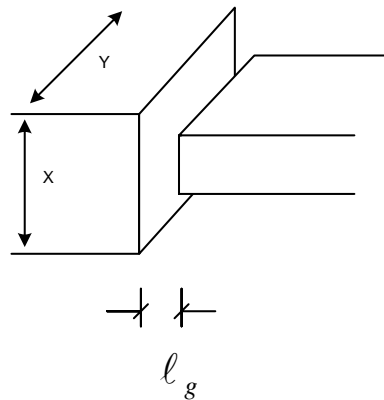


Fig. 5.20 –Entreferro com faces paralelas e diferentes.

Nesta condição, a área efetiva de passagem do fluxo magnético é estimada a partir da expressão:

$$S_g = (X + 2l_g).(Y + 2l_g) \tag{5.17}$$

Exercício 5.3

A Figura 5.21 mostra uma estrutura magnética confeccionada com material magnético de permeabilidade relativa $\mu_R = 2000$, na qual foi introduzido um entreferro de comprimento 1 mm. Todas as demais dimensões estão em cm. Vamos calcular a corrente na bobina de excitação, a qual possui 500 espiras, necessária para estabelecer um fluxo magnético no entreferro de $5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$.

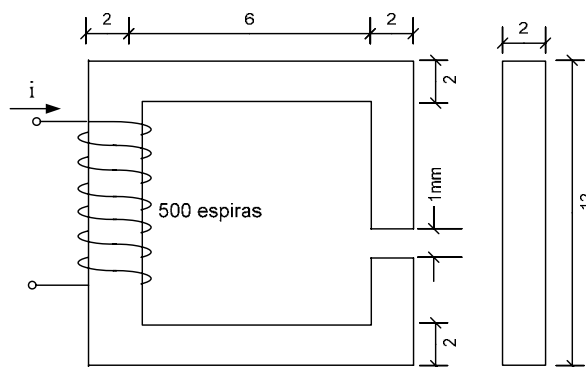


Figura 5.21 – Estrutura magnética.

Solução:

No circuito elétrico análogo desta estrutura, além da fonte de f.m.m. que produz o campo magnético devemos inserir duas relutâncias em série; uma relativa à porção do núcleo magnético e outra devido ao entreferro, como mostra a Figura 5.22.

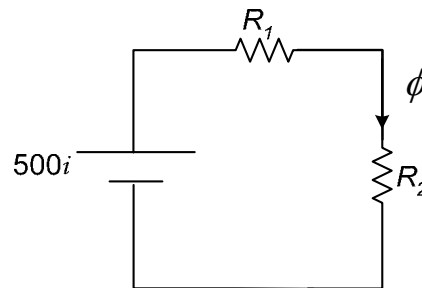


Figura 5.22 – Circuito elétrico análogo.

A partir da análise de malhas obtém-se:

$$Ni = (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)\phi \quad (5.18)$$

Na qual:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l_1}{S_1} = \frac{1}{2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{[2(1+6+1) + 2(12-2 \cdot 1)] \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 35,8 \cdot 10^4 \text{ Aesp/Wb}$$

é a relutância do núcleo e:

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_2}{S_2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{(2+0,1)(2+0,1) \cdot 10^{-4}} = 180 \cdot 10^4 \text{ Aesp/Wb}$$

é a relutância do entreferro.

Observe que apesar do entreferro ter apenas 1 mm , sua relutância, neste caso, é algo em torno de 5 vezes maior que a relutância do núcleo.

Sendo $\phi = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ obtemos, a partir de (5.18):

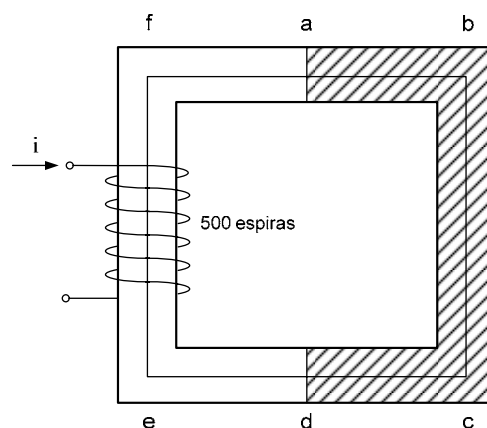
$$500i = (35,8 + 180)10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$$

Resultando:

$$i = 2,16 \text{ A} .$$

5.6 EXERCÍCIOS

- 1 - Um toróide de seção transversal 6 cm^2 e circunferência média de 50 cm é confeccionado com material magnético de permeabilidade relativa $\mu_R = 4000$. A bobina de excitação possui 1500 espiras e é percorrida por uma corrente de 20 mA . Determine:
- A relutância do toróide;
 - O fluxo magnético no seu interior;
 - O vetor intensidade magnética H ;
 - O campo magnético B ;
 - A corrente na bobina necessária para estabelecer um fluxo magnético de $0,25 \text{ mWb}$.
- 2 - A estrutura magnética da figura é simétrica e confeccionada com dois materiais magnéticos distintos. O material do trecho afed apresenta uma permeabilidade relativa $\mu_{R_1} = 500$ e o material do trecho abcd apresenta $\mu_{R_2} = 800$. O comprimento médio da estrutura é $1,0 \text{ m}$ e a seção transversal 25 cm^2 . Determine a partir do circuito elétrico análogo:
- A relutância de cada trecho da estrutura;
 - A relutância equivalente da estrutura;
 - A corrente na bobina de excitação para estabelecer um fluxo magnético de $25 \times 10^{-4} \text{ Wb}$;
 - O campo magnético B quando uma corrente de 800 mA percorre a bobina de excitação.



3 - As relutâncias dos trechos indicados na estrutura magnética da figura são dadas por:

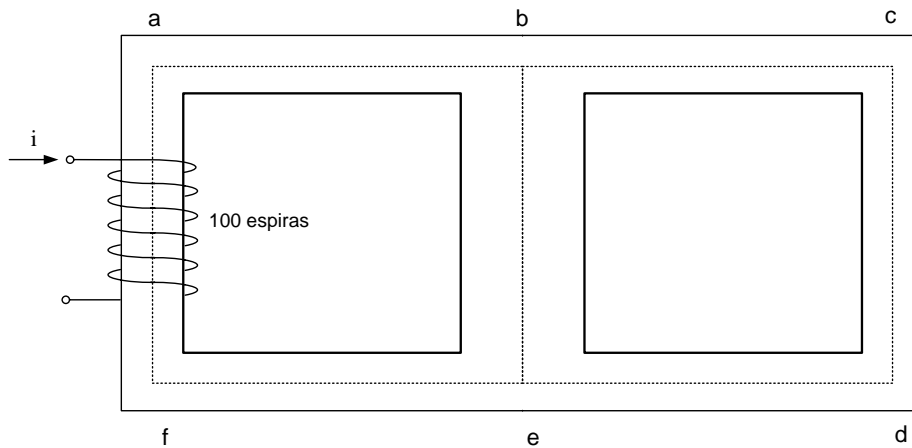
Segmento *bafe*: $4 \times 10^6 \text{ Aesp/Wb}$;

Segmento *bcde*: $4 \times 10^6 \text{ Aesp/Wb}$;

Segmento *be*: $2 \times 10^6 \text{ Aesp/Wb}$.

Determine:

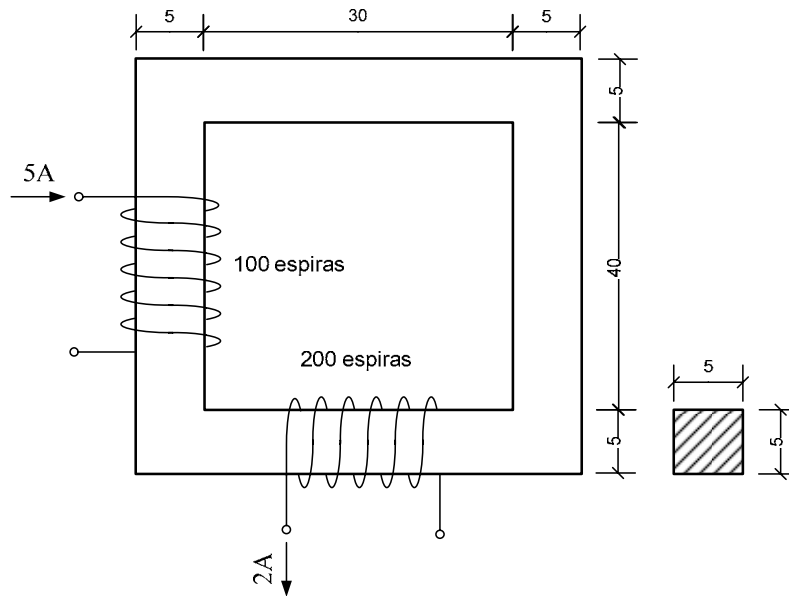
- Os fluxos nos braços da estrutura quando uma corrente de 10A percorre a bobina de excitação;
- A corrente na bobina de excitação quando um fluxo magnético de 0,8mWb é estabelecido no braço central.



4 - A estrutura magnética da figura é confeccionada com material magnético de permeabilidade magnética relativa $\mu_r = \frac{10^4}{4\pi}$. As correntes nas bobinas de 100 espiras e 200 espiras são 5A e 2A respectivamente.

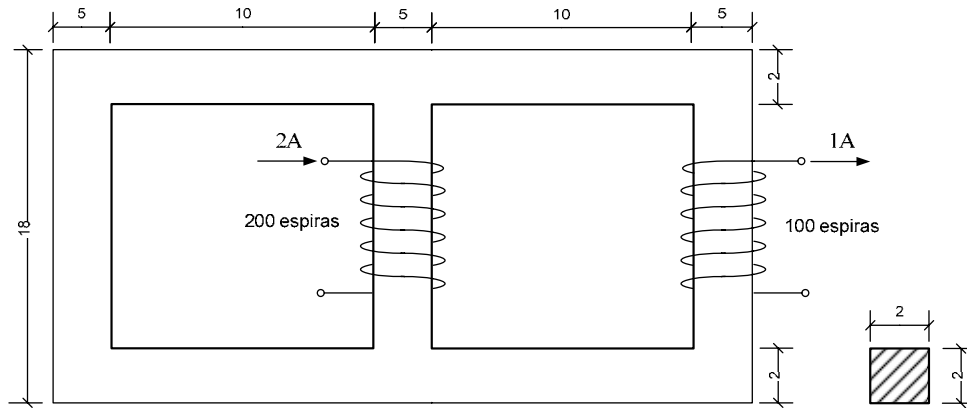
Determine:

- O fluxo magnético no núcleo;
- O campo magnético B no núcleo;
- Mantendo-se a corrente na bobina de 100 espiras inalterada, determine a corrente na bobina de 200 espiras quando o fluxo magnético na estrutura é igual a $1,2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$.



5 - A estrutura magnética da figura é confeccionada com material de permeabilidade magnética relativa $\mu_r = \frac{10^4}{4\pi}$. As bobinas de excitação de 200 espiras e 100 espiras são percorridas por correntes de 2A e 1A respectivamente nos sentidos indicados. Determine:

- As relutâncias dos três trechos da estrutura;
- Os fluxos magnéticos em cada trecho da estrutura com seus respectivos sentidos;
- A corrente que deve percorrer a bobina de 100 espiras de modo que o fluxo no seu interior seja nulo mantendo-se a corrente de 2A na bobina de 200 espiras;
- O fluxo magnético no braço central na condição anterior.

**RESPOSTAS:**

- 1) $16,58 \times 10^4$ Aesp/Wb ; 0,18mWb; 60 Aesp/m; $0,3 \text{ Wb/m}^2$; 28 mA.
- 2) 318310 Aesp/Wb e 198944 Aesp/Wb ; 517254 Aesp/Wb ; 2,586 A ; 0,3093 T.
- 3) 0,63 mWb; 1,25 mWb; 1,88 mWb; 6,4 A.
- 4) $1,56 \times 10^{-4}$ Wb; 62,5 mWb/m²; 2,1A.
- 5) Lateral esquerda e lateral direita: 1150000 Aesp/Wb , central: 400000 Aesp/Wb ; lateral esquerda: $2,229654 \times 10^{-4}$ Wb (descendo) , central: $3,589744 \times 10^{-4}$ Wb (subindo) , lateral direita: $1,360089 \times 10^{-4}$ (descendo) ; 2,9677 A no mesmo sentido da corrente anterior (1 A); central: $2,580645 \times 10^{-4}$ Wb (subindo).