3 CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

3.1 INTRODUÇÃO

O estudo de circuitos de corrente alternada (C.A.) é sobremodo importante dado que a grande maioria das instalações elétricas utiliza este tipo de circuitos.

Inicia-se o desenvolvimento do estudo dos circuitos em C.A. pela definição de grandezas periódicas senoidais, que são as bases para tais estudos. Define-se, a seguir, a representação fasorial de grandezas senoidais, que facilita sobremodo sua manipulação.

Mostra-se, através de um esquema ilustrativo de um gerador C.A , que a geração de uma f.e.m. senoidal é relativamente simples. Verifica-se que o conceito de potência elétrica em C.A. exige que sejam definidas outras grandezas auxiliares e mostra-se a relação existente entre potência em circuitos C.A. e C.C..

Apresentam-se então os circuitos elementares com excitação senoidal, isto é, um gerador C.A. alimentando uma resistência, uma indutância e uma capacitância, bem como a associação série destes elementos.

Analisam-se então os procedimentos para a resolução de circuitos C.A. a partir da analogia com os métodos de resolução de circuitos C.C., vistos anteriormente. Dá-se destaque para o cálculo da queda de tensão e da potência para os circuitos monofásicos, em circuitos correntemente utilizados em instalações elétricas..

3.2 GRANDEZAS ALTERNADAS SENOIDAIS

3.2.1 Definições

Uma função senoidal, Figura. 3.1, é dada por:

$$y = Y_M \,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) \tag{3.1}$$

ou

$$y = Y_M \,\mathrm{sen}\,(2\pi f t + \alpha) = Y_M \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) \tag{3.2}$$

onde:

- Y_M = valor máximo da grandeza senoidal, medido numa unidade qualquer;
- y = valor da grandeza senoidal no instante t, medido na mesma unidade de que Y_M;
- T = período da grandeza senoidal, medido em segundos (s);
- f = 1/T = freqüência da grandeza senoidal medida em Hertz (Hz);
- t = instante genérico em que se quer determinar a grandeza senoidal expressa em segundos (s);
- α = fase inicial, ou simplesmente, fase da grandeza senoidal expressa em radianos (rad)

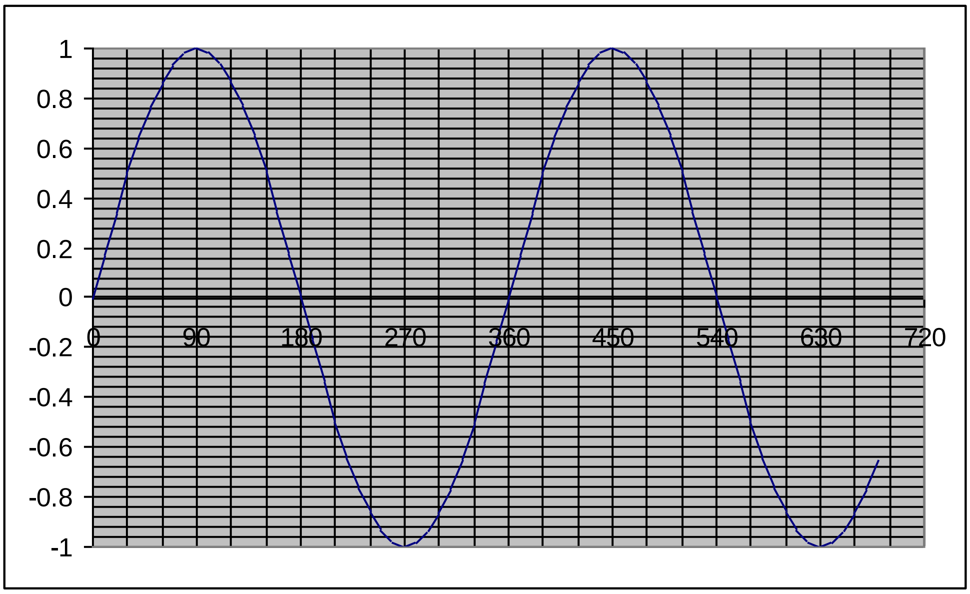


Figura 3.1 – Função senoidal

O termo $2\pi f$, que representa o número de radianos descritos na unidade de tempo, é designado por pulsação angular (rad/s) sendo, usualmente, representado pelo símbolo ω, isto é:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

A função senoidal é periódica e alternada no tempo, pois em intervalos de tempo iguais correspondem valores iguais da função e seu valor médio num período, Y_m, é nulo, ou seja:

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = 0 \qquad (3.3)$$

Dada uma segunda grandeza senoidal:

$$y' = Y'_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

diz-se que entre as grandezas y e y' há uma diferença de fase de $\psi = \alpha - \beta$ rad, que é independente do instante inicial considerado.

Fixa-se o sentido anti-horário como o positivo na medida dos ângulos de fase. Deste modo, quando $\psi > 0$, diz-se que a grandeza y está adiantada de ângulo ψ sobre a y'; e vice-versa, quando $\psi < 0$, diz-se que a grandeza y está atrasada de ângulo ψ em relação a y'. Finalmente, quando $\psi = 0$, diz-se que as duas grandezas estão em fase.

3.2.2 Representação Fasorial

A execução de operações algébricas com as grandezas senoidais é muito laboriosa. Lembrando a definição de grandezas senoidais, ver-se-á que é possível representá-las por meio de um *vetor girante* tornando as operações sobremodo simplificadas.

Isto é, uma grandeza senoidal está perfeitamente definida por um vetor OA que tem módulo igual ao valor máximo da função, e que gira em torno de seu extremo O com velocidade angular ω no sentido anti-horário e sua posição no instante $t = 0$ é tal a formar, com a reta que define a origem dos tempos, um ângulo igual à fase inicial da grandeza considerada, Figura. 3.2. É claro que a projeção do extremo A do vetor sobre uma reta perpendicular à origem dos tempos, descreverá a função senoidal:

$$y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Observa-se que o vetor OA está representando uma grandeza escalar; portanto, a fim de se evitar confusão o designamos por vetor girante.

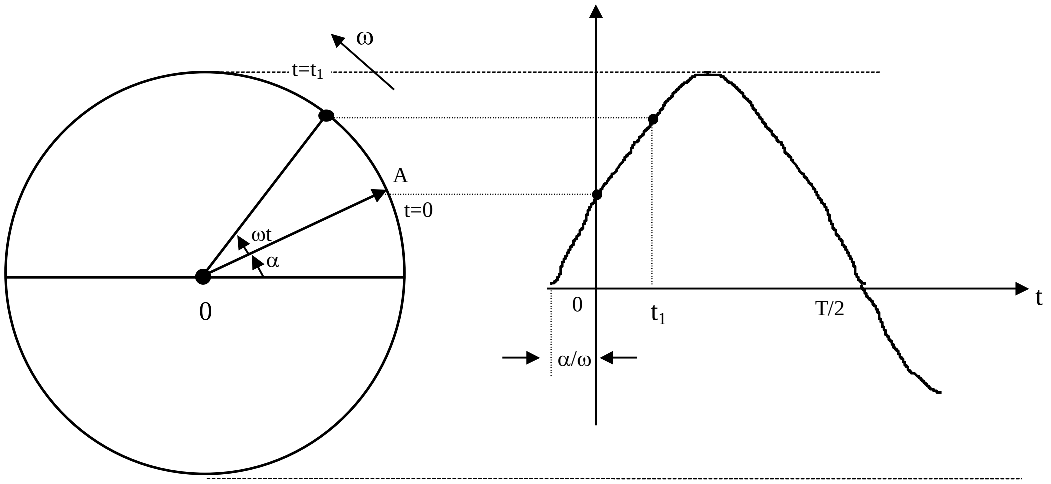


Figura 3.2 - Representação de uma grandeza senoidal

A seguir será analisada a representação por vetores girantes de duas grandezas senoidais, y e y' de mesma freqüência, f , ângulos iniciais, α e β, e módulos Y_M e Y'_M . Essas duas grandezas serão representadas por dois vetores girantes de módulos Y_M e Y'_M, defasados de ângulo $\psi = \alpha - \beta$. Observa-se que ambos giram com mesma velocidade angular; portanto, sua posição relativa permanece imutável e a soma dos dois vetores girantes, que também é representada por um vetor girante, é equivalente à soma de Y e Y'.

A representação das grandezas senoidais por vetores girantes simplifica enormemente o procedimento de cálculo, porém, apresenta o inconveniente de se incorrer em erro quando se realizam todas as operações graficamente, devido à imprecisão gráfica. Assim, através da "*representação simbólica*" ou "*fasorial*" aplica-se aos vetores girantes um procedimento de cálculo sobremodo interessante que permite efetuar as operações analiticamente eliminando-se a necessidade de se recorrer somente a construções gráficas.

Da teoria dos números complexos, sabe-se que $e^{j\omega t} = \operatorname{sen}\omega t + j\cos\omega t$.

Então uma grandeza senoidal $y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ pode ser obtida por $y = \operatorname{Re}\left[Y_M e^{j\omega t}\right]$.

O vetor girante, da Figura. 3.2, pode ser representado por:

$$\vec{I}_{(t)} = Y_M (\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha)\, e^{j\omega t} \tag{3.4}$$

O termo $Y_M(\cos\alpha + j\operatorname{sen}\alpha)$ representa o vetor girante no instante t = 0, e o termo $e^{j\omega t}$ exprime a rotação do vetor de um ângulo ωt .

Define-se o fasor que representa a grandeza senoidal *y* por:

$$\dot{Y} = a + jb = Y\cos\alpha + jY\,\text{sen}\,\alpha = Y\underline{|\alpha°} \tag{3.5}$$

em que $Y = Y_M \big/ \sqrt{2}$ representa o valor eficaz da grandeza senoidal.

Exemplo 3.1

Dada a grandeza senoidal $i(t) = 100\,\text{sen}\,(377\,t + 0{,}5236)$, pede-se determinar o vetor girante e o fasor que a representa.

Inicialmente determina-se o vetor que representa a grandeza no instante t = 0, isto é, um vetor cujo módulo vale 100 é cujo ângulo inicial vale 0,5236 rad = 30°. Suas componentes valem:

$$100\cos 30° = 86{,}60$$
$$100\,\text{sen}\,30° = 50{,}00$$

Então o vetor girante é dado por:

$$\vec{I}_{(t)} = (86{,}60 + j50{,}00)\,e^{377\,t}$$

e o fasor que representa esta grandeza é:

$$\dot{I} = \frac{100}{\sqrt{2}}\cos 30° + j\frac{100}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,30° = \frac{100}{\sqrt{2}}\underline{|30°}$$

3.2.3 Números Complexos

A seguir serão lembradas algumas propriedades dos números complexos que serão úteis nas operações com o método simbólico. Sejam dois números complexos A_1 e A_2, que podem ser expressos na forma retangular por:

$$\overline{A}_1 = a_1 + jb_1 \qquad \text{e} \qquad \overline{A}_2 = a_2 + jb_2$$

ou,ainda, podem ser expressos na forma polar por:

$$\overline{A}_1 = M_1 \underline{|F_1} \qquad e \qquad \overline{A}_2 = M_2 \underline{|F_2}$$

Lembra-se que para passar da forma retangular para a polar empregam-se as relações:

$$M_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad e \quad F_1 = \tan^{-1}\frac{b_1}{b_2} \quad ou \quad a_1 = M_1 \cos F_1 \quad e \quad b_1 = M_1 \,\text{sen}\, F_1$$

As operações básicas entre esses números são:

- Soma ou Subtração: na forma retangular, basta respectivamente somar ou subtrair entre si as partes reais e as imaginárias, isto é:

$$\begin{aligned} \overline{A}_3 &= \overline{A}_1 + \overline{A}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a_3 + jb_3 \\ \overline{A}_4 &= \overline{A}_1 - \overline{A}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) = a_4 + jb_4 \end{aligned} \tag{3.6}$$

- Multiplicação ou Divisão: na forma polar, basta respectivamente multiplicar ou dividir os módulos e somar ou subtrair os argumentos, isto é:

$$\begin{aligned} \overline{A}_3 &= \overline{A}_1.\overline{A}_2 = M_1.M_2 \underline{|F_1 + F_2} = M_3 \underline{|F_3} \\ \overline{A}_4 &= \frac{\overline{A}_1}{\overline{A}_2} = \frac{M_1}{M_2} \underline{|F_1 - F_2} = M_4 \underline{|F_4} \end{aligned} \tag{3.7}$$

É importante ressaltar que $A^* = M\underline{|-F}$ é o complexo conjugado de $\overline{A} = M\underline{|F}$

Exemplo 3.2

Dados os números complexos: $10\underline{|30^o}$ e $20\underline{|-45^o}$ pede-se sua soma e sua diferença.

Tem-se:

$$\overline{C}_1 = 10\underline{|30^o} = 10(\cos 30 + j\,\text{sen}\,30) = 8{,}660 + j5{,}000$$

$$\overline{C}_2 = 20\underline{|-45^o} = 20(\cos 45 + j\,\text{sen}\,45) = 14{,}142 - j14{,}142$$

$$\overline{C}_1 + \overline{C}_2 = 22{,}802 - j9{,}142 = 24{,}566\underline{|-21{,}85^o}$$

$$\overline{C}_1 - \overline{C}_2 = 5{,}482 + j19{,}142 = 19{,}912\underline{|105{,}98^o}$$

Exemplo 3.3

Dados os números complexos 3 + j 4 e -7 + *j*12, pede-se seu produto e seu quociente.

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_1 &= 3+4j = 5\underline{|53{,}13^o} \\
\overline{C}_2 &= -7+12j = 13{,}89\underline{|120{,}26^o} \\
\overline{C} &= \overline{C}_1.\overline{C}_2 = 69{,}45\underline{|173{,}39^o} \\
\overline{C}' &= \overline{C}_1 / \overline{C}_2 = 0{,}36\underline{|-67{,}13^o}
\end{aligned}$$

E na forma retangular, tem-se:

$$\begin{aligned}
C_r &= C\cos\alpha = 69{,}45\ \cos 173{,}39 = -68{,}988 \\
C_i &= C\,\mathrm{sen}\,\alpha = 69{,}45\ \mathrm{sen}\,173{,}39 = 7{,}994 \\
C'_r &= C'\cos\alpha' = 0{,}36\ \cos 67{,}13 = 0{,}140 \\
C_i &= C'\,\mathrm{sen}\,\alpha' = -0{,}36\ \cos 67{,}13 = -0{,}332
\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
\overline{C} &= -68{,}988 + j\,7{,}994 \\
\overline{C}' &= 0{,}140 - j\,0{,}332
\end{aligned}$$

3.3 POTÊNCIA EM CIRCUITOS COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

Seja o caso de ter-se um gerador C.A., cuja tensão em seus terminais varia com lei senoidal, alimentando carga que absorve corrente variável senoidalmente e que esteja atrasada de ângulo φ em relação à tensão. Isto é, sejam:

$$\begin{aligned}
v &= V_M\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_1) \\
i &= I_M\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_1 - \varphi)
\end{aligned}$$

a tensão e a corrente nos terminais do gerador.

É claro que, em cada instante, a potência fornecida pelo gerador à carga, p, é dada pelo produto dos valores instantâneos da tensão e da corrente, isto é:

$$p = vi = V_M I_M\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_1)\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_1 - \varphi) \qquad (3.8)$$

Lembrando que:

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

resulta

$$p = \frac{V_M I_M}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi + 2\theta_1)\right] \tag{3.9}$$

ou ainda, sendo $V_M = \sqrt{2}V$ e $I_M = \sqrt{2}I$, resulta:

$$p = VI\cos\varphi + VI\,\mathrm{sen}(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} + 2\theta_1) \tag{3.10}$$

Da Equação. (3.10) verifica-se que a potência instantânea é composta por duas parcelas: uma constante $VI\cos\varphi$ que representa a potência fornecida à carga e outra variável senoidalmente com freqüência dupla da tensão aplicada, que representa à energia que ora é fornecida pelo gerador à carga e ora é devolvida da carga ao gerador. Esta última parcela recebe a designação de *potência flutuante*.

O valor médio da potência num ciclo é dado por:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = VI\cos\varphi \tag{3.11}$$

e recebe o nome de "potência ativa" ou mais simplesmente "potência". Ao co-seno do ângulo de rotação de fase, $\cos\varphi$, dá-se o nome de "fator de potência".

Observa-se que para fator de potência unitário ($\varphi = 0$), a potência ativa será expressa pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente. Para fator de potência nulo ($\varphi = \pm\pi/2$) a potência ativa será nula.

Definem-se ainda as grandezas potência aparente, potência reativa e potência complexa, que são apresentadas abaixo.

A <u>potência aparente</u>, S, é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e da corrente, isto é:

$$S = V.\,I \tag{3.12}$$

sendo medida em Volt × Ampère (VA).

A <u>potência reativa</u>, Q, é dada pelo produto dos valores eficazes da tensão e corrente pelo seno do ângulo de rotação de fase entre ambas, isto é:

$$Q = V.I.\mathrm{sen}\,\varphi \tag{3.13}$$

sendo medida em Volt Ampère reativo (VAr).

Convencionou-se adotar como positiva a potência reativa fornecida a uma carga na qual a corrente está atrasada em relação à tensão. Decorre que uma carga na qual a corrente está adiantada em relação à tensão (φ negativo) a potência reativa será negativa.

Das expressões anteriores, resulta:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A potência complexa, $\bar{S}$, é expressa por um número complexo cuja parte real é a potência ativa e cuja parte imaginária é a potência reativa, isto é:

$$\bar{S} = P + jQ = VI\cos\varphi + jVI\,\mathrm{sen}\,\varphi = VI\,\underline{|\varphi} = S\,\underline{|\varphi} \qquad (3.14)$$

Observando-se que a tensão e a corrente consideradas são expressas pelos fasores:

$$\dot{V} = V\underline{|\theta_1} \qquad \text{e} \qquad \dot{I} = I\underline{|\theta_1 - \varphi}$$

observa-se que a potência complexa é dada pelo produto:

$$\dot{V}\,\dot{I}^*$$

em que $\dot{I}^*$ é o complexo conjugado da corrente, isto é:

$$\bar{S} = \dot{V}\,\dot{I}^* = V\underline{|\theta_1}\;\; I\underline{|-\theta_1 + \varphi} \; = \; V\,I\,\underline{|\varphi} \qquad (3.15)$$

3.4 CIRCUITOS ELEMENTARES COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

3.4.1 Resistência Pura

Aplicando-se a uma resistência constante, R, uma tensão alternada senoidal dada por:

$$v(t) = V_M\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

pela lei de Ohm em cada instante ter-se-á:

$$v(t) = R\,i(t)$$

ou seja:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_M}{R}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

Conclui-se que: a corrente que percorre a resistência está em fase com a tensão de alimentação e seu valor máximo é dado pela relação entre o valor máximo da tensão e o da resistência.

Na notação simbólica tem-se, empregando valores eficazes, e supondo a tensão com fase nula: $\dot{V} = V\underline{|0^o}$ resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{V}{R}\,\underline{|0} = I\underline{|0}$$

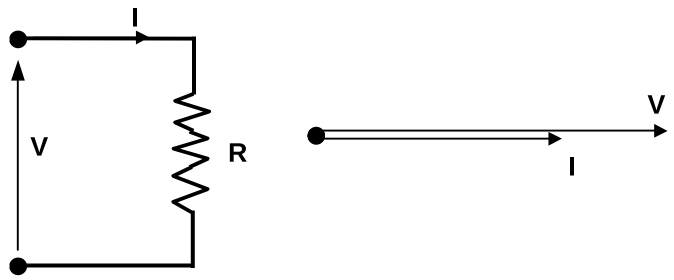
Na Figura. 3.3 apresenta-se um circuito resistivo e o correspondente diagrama de fasores.

A potência instantânea absorvida pela resistência é dada por:

$$p(t) = i(t)^2\,R = v(t)\;i(t) = \frac{v(t)^2}{R}$$

A potência ativa ou real é dada por:

$$P = VI = RI^2 = V^2 / R$$



a) Circuito b) Diagrama de fasores

Figura 3.3 - Circuito resistivo e seu diagrama fasorial

O fator de potência, $\cos\varphi$, é unitário, a potência reativa, Q é nula e a potência aparente coincide com a ativa.

Verifica-se, pois, que todas as relações entre valores eficazes coincidem com os valores que seriam obtidos alimentando-se a resistência *R* com tensão contínua de valor V. A expressão da lei de Joule permite, portanto, que se interprete o valor eficaz de uma corrente como sendo:

"O valor eficaz de uma corrente alternada é igual ao valor de uma corrente contínua que atravessando a mesma resistência produz igual quantidade de calor no mesmo intervalo de tempo".

Salienta-se que esta conclusão obtida para grandezas senoidais é válida para grandezas alternativas quaisquer.

Exemplo 3.4

Aplica-se a uma resistência de 20Ω tensão senoidal de valor eficaz 100V e freqüência de 60 Hz. Pede-se:

a) O valor eficaz da intensidade de corrente na resistência.
b) A potência dissipada na resistência.
c) O valor instantâneo da corrente e da tensão.

Adotando-se tensão com fase inicial nula resulta:

$$\dot{V} = V\underline{|0^o} = V + 0j = 100\ \underline{|0^o} = 100 + 0j$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} = \frac{100}{50} = 5 + 0j$$

donde:

$$I = \left|\dot{I}\right| = 5A$$

A potência dissipada na resistência vale

$$P = R\,I^2 = 20 \times 5^2 = 500\ \ W\,.$$

O valor instantâneo da corrente é dado por:

$$i = I_M \operatorname{sen} \omega t$$

em que:

$$\omega = 2\,\pi\,f = 2\,\pi \times 60 \cong 377 \quad rad/seg$$

$$V_M = \sqrt{2}\ \ V = \sqrt{2} \times 100 = 141{,}42\ \ V$$

$$I_M = \sqrt{2}\ \ I = \sqrt{2} \times 5 = 7{,}071\ \ A$$

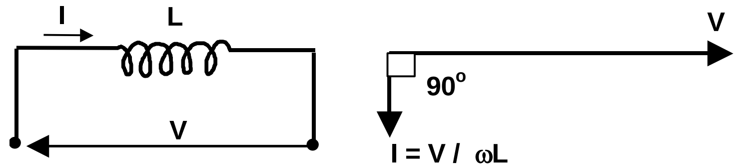
logo:

$$i = 7{,}071\ \operatorname{sen}\ 377t \qquad e \qquad v = 141{,}42\ \operatorname{sen}\ 377t$$

3.4.2 Indutância Pura

Aplicando-se uma tensão senoidal de freqüência f e de valor eficaz V a uma bobina de indutância L e resistência ôhmica nula ter-se-á a circulação, pela indutância, de uma corrente de valor instantâneo i (t) que irá criar uma f.e.m. dada por:

$$e(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$



a) Circuito b) Diagrama de fasores

Figura 3.4 - Circuito indutivo com excitação senoidal

Por outro lado, deverá ser:

$$v(t) + e(t) = 0$$

isto é:

$$v(t) = -e(t) = L\frac{di(t)}{dt}.$$

Sendo:

$$v(t) = V_M \operatorname{sen} \omega t,$$

resulta, imediatamente:

$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L}\operatorname{sen}(\omega t - \pi/2) \qquad (3.16)$$

Esta equação mostra que a corrente numa indutância está atrasada de $\pi/2$ radianos (ou 90^o) em relação à tensão aplicada e seu valor máximo é obtido dividindo-se o valor máximo da tensão por ωL que é designado por “reatância indutiva”, sendo representada por X_L e tem a dimensão de uma resistência.

No método simbólico, leva-se em conta a rotação de fase da corrente representando-se a indutância por uma “impedância” que é dada por um número complexo no qual a parte imaginária é a reatância da bobina. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = -j\frac{\dot{V}}{X_L}$$

sendo:

$$\dot{V} = V\underline{|0^o}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_L}\underline{|-\pi/2} \qquad (3.17)$$

Assim, numa indutância, a tensão e a corrente estão em quadratura e o fator de potência correspondente é dado por:

$$\cos\varphi = \cos\pi/2 = 0$$

A potência ativa é nula e a reativa que coincide com a aparente, é positiva e vale:

$$Q = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = S$$

Nota-se que a indutância, quando ligada a uma fonte de corrente alternada, é percorrida por uma corrente sem que haja uma dissipação de energia.

Exemplo 3.5

Uma indutância de 0,08 H é alimentada com tensão senoidal de valor eficaz 240 V e 60 Hz. Pede-se:
a) A intensidade de corrente na indutância.
b) A potência ativa, aparente e reativa fornecidas à indutância.
c) O valor instantâneo da corrente e tensão.

Solução:

a) Determinação da corrente
Tem-se:

$$\dot{V} = 240 + j0 \quad V \qquad \text{e} \qquad X_L = 2\,\pi\,f\,L = 30{,}16 \quad \Omega$$

logo:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{jX_L} = \frac{240 + 0\,j}{j30{,}16} = -j\,7.96 = 7.96\underline{|-\pi/2} \quad A$$

$$I = \left|\,\dot{I}\,\right| = 7{,}96A$$

b) Determinação da potência
Tem-se:

$$P = VI\cos\varphi = 240 \times 7{,}96 \times 0 = 0 \quad W$$
$$S = VI = 240 \times 7{,}96 = 1910{,}4 \quad VA$$
$$Q = VI\,\text{sen}\,\varphi = 240 \times 7{,}96 \times 1 = 1910{,}4 \quad VAr$$

c) Valores instantâneos
Tem-se:

$$V_M = \sqrt{2}\ V = \sqrt{2} \times 240 = 339{,}41 \quad V$$
$$I_M = \sqrt{2}\ I = \sqrt{2} \times 7{,}96 = 11{,}26 \quad A$$

logo:

$$v = 339{,}4\,\text{sen}\,337t \qquad V$$
$$i = 11{,}26\,\text{sen}\left(337t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad A$$

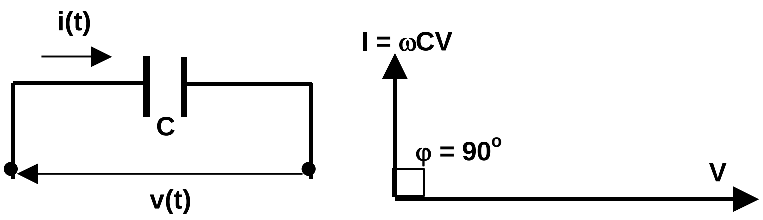
3.4.3 Capacitância Pura

Um capacitor, de capacidade C, alimentado por uma tensão senoidal, de valor eficaz V e freqüência f, terá, em regime, carga q, dada por:

$$q(t) = Cv(t) = CV_M\,\text{sen}\,\omega t$$

Portanto, será percorrido por corrente (por indução eletrostática) dada por:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} = \omega C V_M\,\text{sen}\,(\omega t + \pi/2) \tag{3.18}$$



a) Circuito b) Diagrama de fasores

Figura 3.5 - Circuito capacitivo com excitação senoidal

Verifica-se que a corrente num capacitor está adiantada de $\pi/2$ radianos em relação à tensão e seu valor eficaz é obtido multiplicando-se o valor correspondente da tensão por ωC. Analogamente, a quanto feito com uma indutância, o termo:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

é chamado de "reatância" do capacitor ou de reatância capacitiva. A unidade da reatância capacitiva também é "Ohm".

Na notação simbólica, a "impedância" de um capacitor será representada por um número complexo no qual a parte real será nula e a parte imaginária será –j X_C. Isto é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{-jX_C} = j\,\frac{\dot{V}}{X_C}$$

sendo:

$$\dot{V} = V\underline{|0^o}$$

resulta:

$$\dot{I} = \frac{V}{X_C}\,\underline{|\pi/2}$$

Assim, o fator de potência de um capacitor é dado por:

$$\cos\varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

A potência ativa absorvida é nula enquanto que a aparente e a reativa coincidem em módulo e valem:

$$S = VI$$

$$Q = VI\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega C\,V^2$$

Exemplo 3.6

Determinar a intensidade de corrente num circuito formado por um capacitor de 10μF ligado a uma fonte de 120 V e 60 Hz.

$$X_C = \frac{1}{2\pi f\,C} = \frac{1}{2\pi\times 60\times 10\times 10^{-6}} = 265{,}26\ \ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\overline{Z}} = \frac{120}{-jX_C} = \frac{120}{265{,}26}\,j = j0{,}452\ \ A$$

3.4.4 Circuito com Elementos em Série

Dado o circuito da Figura. 3.6, constituído pela associação em série de uma indutância, uma capacidade e uma resistência, alimentado por uma tensão senoidal de valor eficaz V e freqüência f deseja-se calcular a corrente e as quedas de tensão nos três elementos.

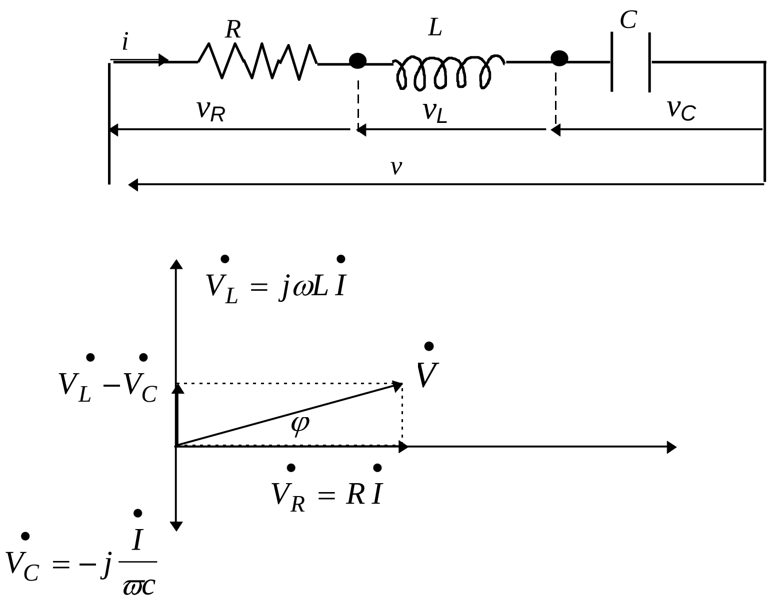


Figura 3.6 - Associação RLC série

Estando os três elementos em série, a corrente que circula, evidentemente, será a mesma para os três, portanto, pode-se adotar:

$$\dot{I} = I\underline{|0} = I(1+0j)$$

A queda de tensão em cada um dos elementos será dada por:

$$\dot{V}_R = \dot{I}\,R = IR\underline{|0}$$
$$\dot{V}_L = \dot{I}\,jX_L = IX_L\underline{|\pi/2}$$
$$\dot{V}_C = \dot{I}\,(-jX_C) = IX_C\underline{|-\pi/2}$$

É claro que, em cada instante, a tensão aplicada deverá igualar a soma das quedas de tensão. Portanto, essa relação também deve valer para os fasores correspondentes:

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{I}\left[R + j(X_L - X_C)\right]$$

Define-se o "operador impedância" ao número complexo que, multiplicado pelo fasor da corrente no ramo do circuito, fornece o fasor da tensão aplicada ao mesmo. A impedância do circuito, $\bar{Z}$, ora analisado, é:

$$\bar{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) \tag{3.19}$$

Em particular, para os elementos individuais, isto é, uma resistência, uma indutância e uma capacidade, a impedância é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_R &= R + 0j = R\underline{|0} \\ \bar{Z}_L &= 0 + jX_L = X_L\underline{|\pi/2} \\ \bar{Z}_C &= 0 - jX_C = X_C\underline{|-\pi/2} \end{aligned}$$

Passando-se a impedância $\bar{Z}$ para a forma trigonométrica (módulo Z e fase θ), ter-se-á:

$$\bar{Z} = Z(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta) = Z\underline{|\theta} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V\underline{|0}}{I\underline{|-\varphi}} = VI\underline{|\varphi} \tag{3.20}$$

Observa-se que o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, φ, coincide com o argumento da impedância, e o fator de potência pode ser avaliado por:

$$\cos\varphi = \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z} \tag{3.21}$$

Para a construção do diagrama de fasores, Figura.3.6, supõe-se conhecida a intensidade de corrente; portanto, a queda de tensão na resistência será representada por um fasor em fase com a corrente e de módulo igual a IR. Na indutância, o será por um fasor em quadratura e adiantado sobre a corrente e de módulo $IX_L = 2\pi fLI$. Finalmente, no capacitor, a queda de tensão será dada por um fasor em quadratura e atrasado sobre a corrente e de módulo $IX_C = I/(2\pi f\,C)$. A tensão aplicada será obtida somando-se vetorialmente os três fasores. Como $\dot{V}_L$ e $\dot{V}_C$ estão em posição de fase, sua soma equivalerá à soma algébrica de seus módulos, isto é:

$$\dot{V}_L - \dot{V}_C = \dot{I}\left(X_L - X_C\right)j$$

Para a determinação gráfica de todas as incógnitas, observa-se que os fasores $\dot{V}$, $\dot{V}_R$ e $(\dot{V}_L - \dot{V}_C)$ formam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é representada pelo fasor $\dot{V}$.

Quanto à potência ativa, tem-se:

$$P = VI\cos\varphi = (IZ) \times I \times \frac{R}{Z} = I^2 R$$

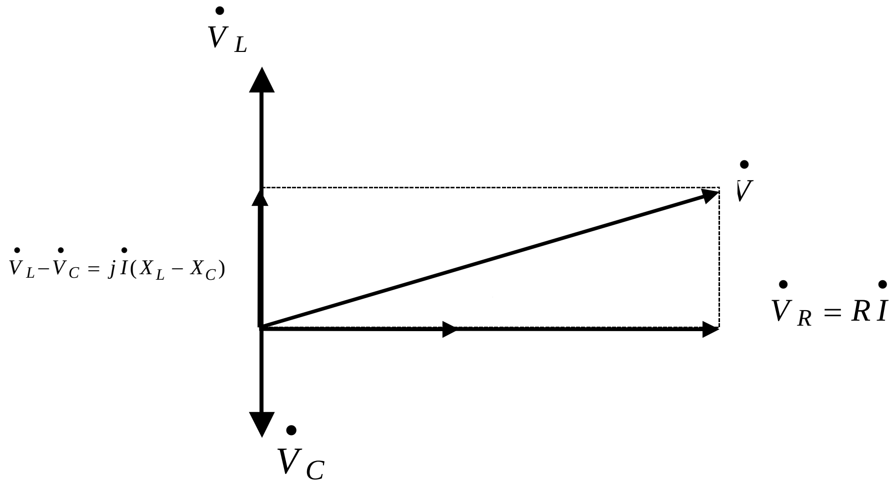


Figura 3.7 - Diagrama de fasores para circuito R-L-C série

Exemplo 3.7

Resolver o circuito da Figura. 3.8, sendo dados:

$$V = 220V \text{ (eficaz)},\ f = 60 \text{ Hz},\ R_1 = 4\,\Omega,\ R_2 = 8\ \Omega,\ L = 13{,}26\,\text{mH e } C = 294{,}7\ \mu F$$

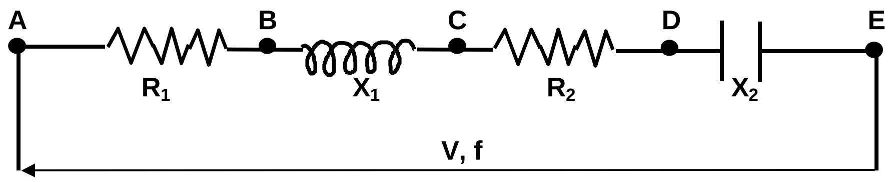


Figura 3.8 - Circuito para o exemplo 3.7

a) Cálculo da impedância

Sendo $\overline{Z} = \overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CD} + \overline{Z}_{DE}$, resulta:

$$\overline{Z}_{AB} = 4+0j \quad \Omega \qquad\qquad \overline{Z}_{CD} = 8+0j \quad \Omega$$

$$\overline{Z}_{BC} = 2\,\pi\times 60\times 0{,}013226 = 5\,j \quad \Omega$$

$$\overline{Z}_{DE} = -j\,\frac{1}{2\pi\times 60\times 294{,}7\times 10^{-6}} = -9 \quad j \quad \Omega$$

$$\overline{Z} = 12 - j4 \quad \Omega$$

b) Cálculo da corrente

Adotando-se $\dot{V} = 220 + 0j$, resulta:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\overline{Z}} = \frac{220}{12 - j4} = \frac{220}{12{,}65\underline{|-18{,}43^o}} = 17{,}39\underline{|18{,}43^o} \text{ A} = 16{,}5 + j5{,}5 \text{ A}$$

c) Cálculo das tensões

$$\dot{V}_{AB} = \overline{Z}_{AB}\dot{I} = 4\,(16{,}5 + j5{,}5) = 66 + j22 \qquad = 69{,}57\underline{|18{,}43^o} \quad \text{V}$$

$$\dot{V}_{BC} = \overline{Z}_{BC}\dot{I} = 5j\,(16{,}5 + j5{,}5) = -27{,}5 + 82{,}5j \quad = 86{,}96\underline{|108{,}43^o} \quad \text{V}$$

$$\dot{V}_{CD} = \overline{Z}_{CD}\dot{I} = 8\,(16{,}5 + j5{,}5) = 132 + j44 \qquad = 139{,}14\underline{|18{,}43^o} \quad \text{V}$$

$$\dot{V}_{DE} = \overline{Z}_{DE}\dot{I} = -9j.(16{,}5 + j5{,}5) = 49{,}5 - 148{,}5\,j = 156{,}53\underline{|-71{,}56^o} \quad \text{V}$$

Verificação:

$$\dot{V}_{AE} = \dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC} + \dot{V}_{CD} + \dot{V}_{DE} = 220 + j0 \quad \text{V}$$