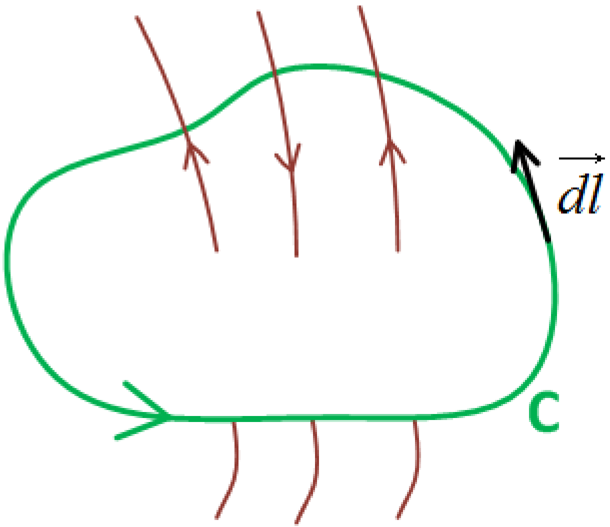
PEA2290
Transformadores

Revisão de conceitos de eletromagnetismo

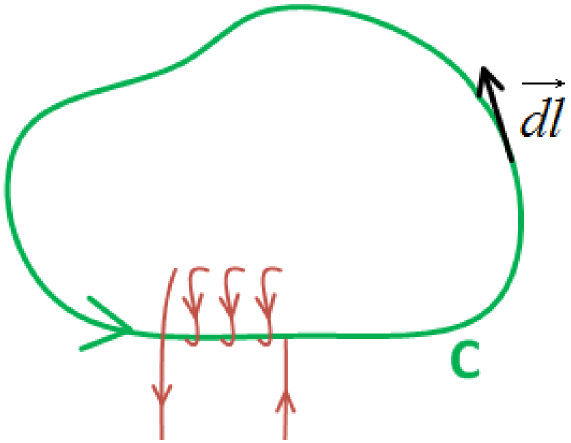


Lei de Ampére:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = i_{conc}$$

$\vec{H}$ = vetor campo magnético ou intensidade magnética [A/m]

i_{conc} = corrente concatenada com o contorno C



$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = Ni$$

Bobina com *N* espiras, corrente *i*

Vetor indução magnética ou densidade de fluxo $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mu \, \vec{H}$$

$\vec{B}$ = indução magnética [T]

μ = permeabilidade magnética [H/m]

μ_0 (vácuo) = $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

Fluxo magnético ϕ :

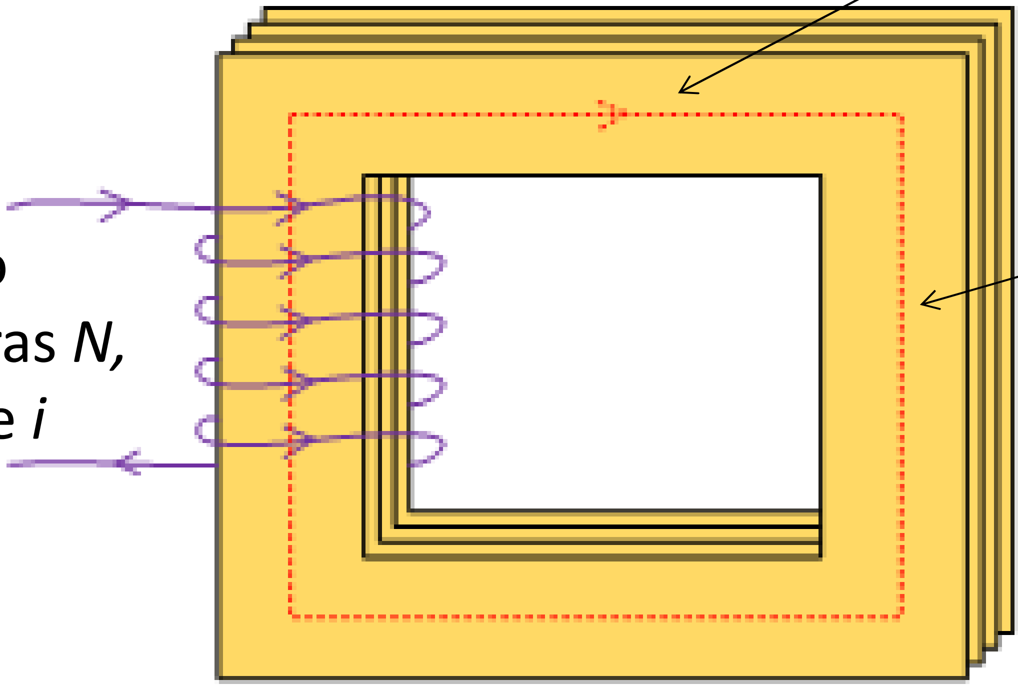
$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

ϕ = fluxo magnético [Wb=T·m^2], valor escalar

$\vec{dS}$ = vetor normal à superfície S, com módulo igual a dS sentido definido pela regra da mão direita

$\vec{H}, \quad \vec{B}, \quad \phi$

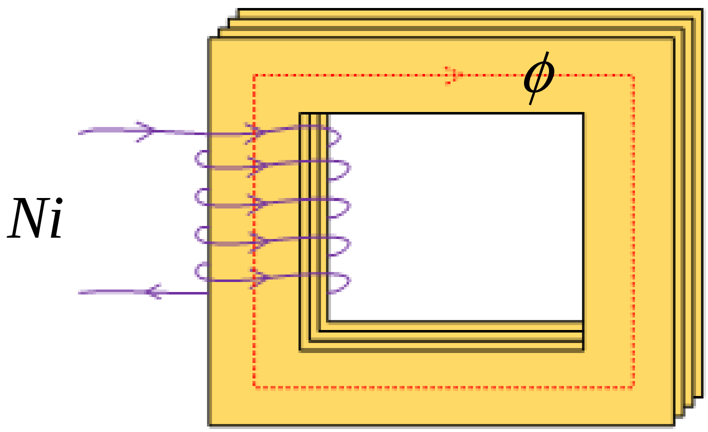
Número
de espiras *N*,
corrente *i*



Núcleo de material
ferromagnético
ℓ: comprimento
médio do percurso
S: seção reta do
núcleo

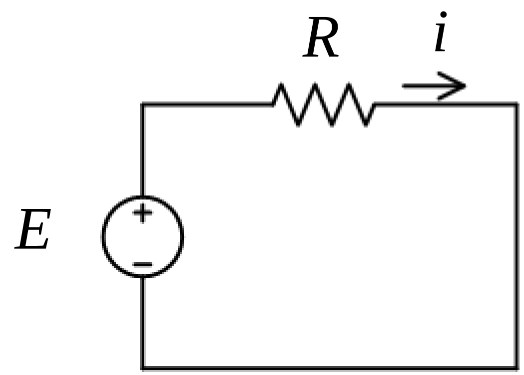
$$H\ell = Ni \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\mu}\ell = Ni \quad \Rightarrow \quad Ni = \frac{\ell}{S\mu}\phi \quad \Rightarrow \quad Ni = \Re\phi$$

$\Re$: relutância magnética



$$\boxed{Ni = \Re \phi}$$

$N \cdot i$ também é chamada de “força magnetomotriz” (fmm)



Circuito elétrico análogo

$$E = \frac{\ell}{\sigma S} i = \frac{\rho \ell}{S} i$$

$$E = R\, i$$

E também é chamada de “força eletromotriz” da fonte (fem)

Circuito magnético	**Circuito elétrico análogo**
Relutância: $\Re = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S}$	Resistência: $R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$
Fluxo magnético ϕ	Corrente elétrica i
fmm = Ni	*fem = E*

Transformadores

- Dispositivo que converte um nível de tensão em outro nível de tensão pela ação da variação do fluxo magnético
- A possibilidade de elevação e redução eficiente do nível de tensão viabilizou a transmissão de energia por distâncias consideráveis em corrente alternada
  - Maior tensão -> menor corrente -> menos perdas

Lei de Faraday:

Fluxo magnético variável induz uma tensão:

$$e_{ind} = \frac{d\lambda}{dt} = N\frac{d\phi}{dt}$$

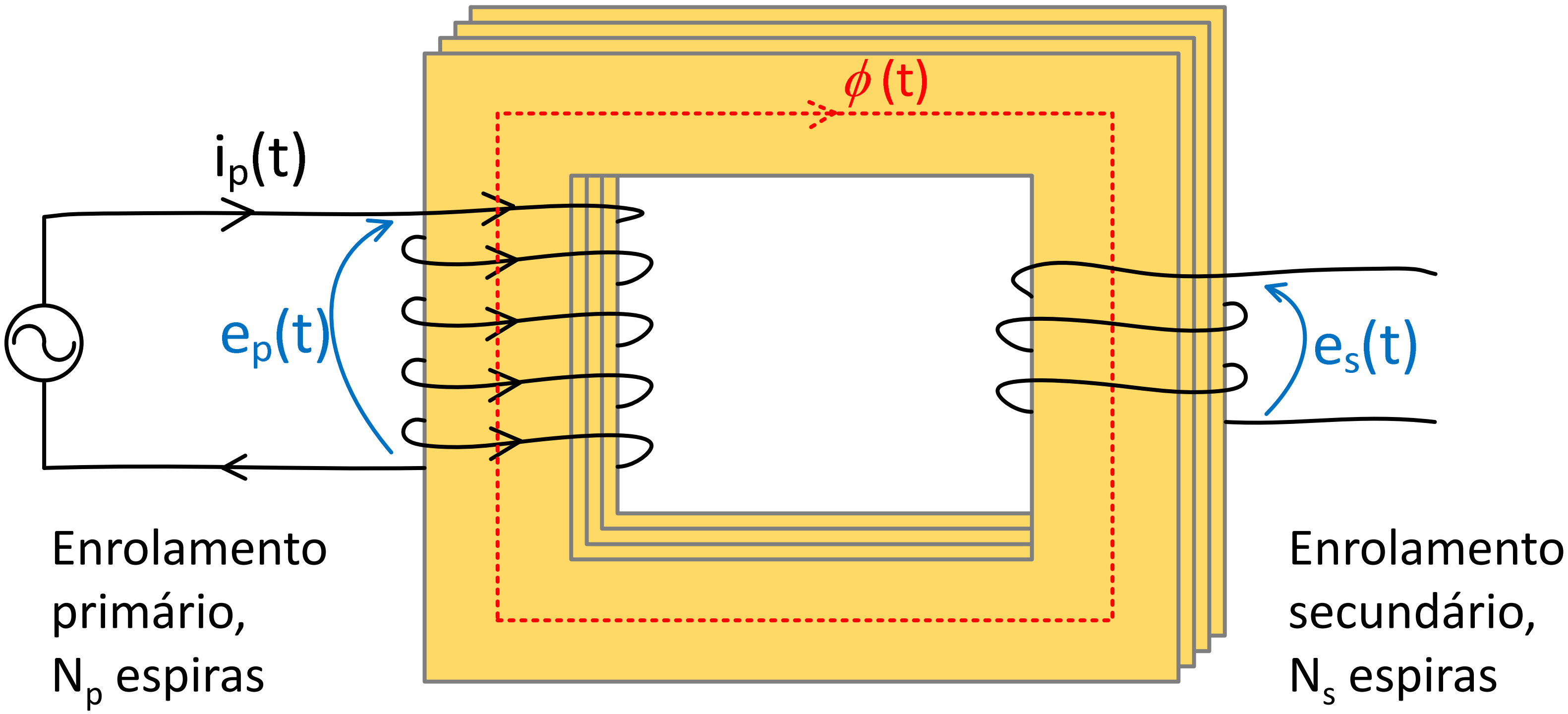
Indutância:

$$L = N\frac{\phi}{i} \quad \Rightarrow \quad e_{ind} = N\frac{d\left(Li/N\right)}{dt} = \frac{d\left(Li\right)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

Corrente senoidal -> fluxo magnético senoidal -> variável no tempo

Transformador ideal

- Permeabilidade magnética $\rightarrow \infty$
  - $\Re$ (relutância) = 0
  - Não há dispersão no fluxo magnético: todo o fluxo é confinado ao núcleo
- Corrente de magnetização = 0
- Perdas no núcleo = 0
- Perdas Joule nos enrolamentos = 0



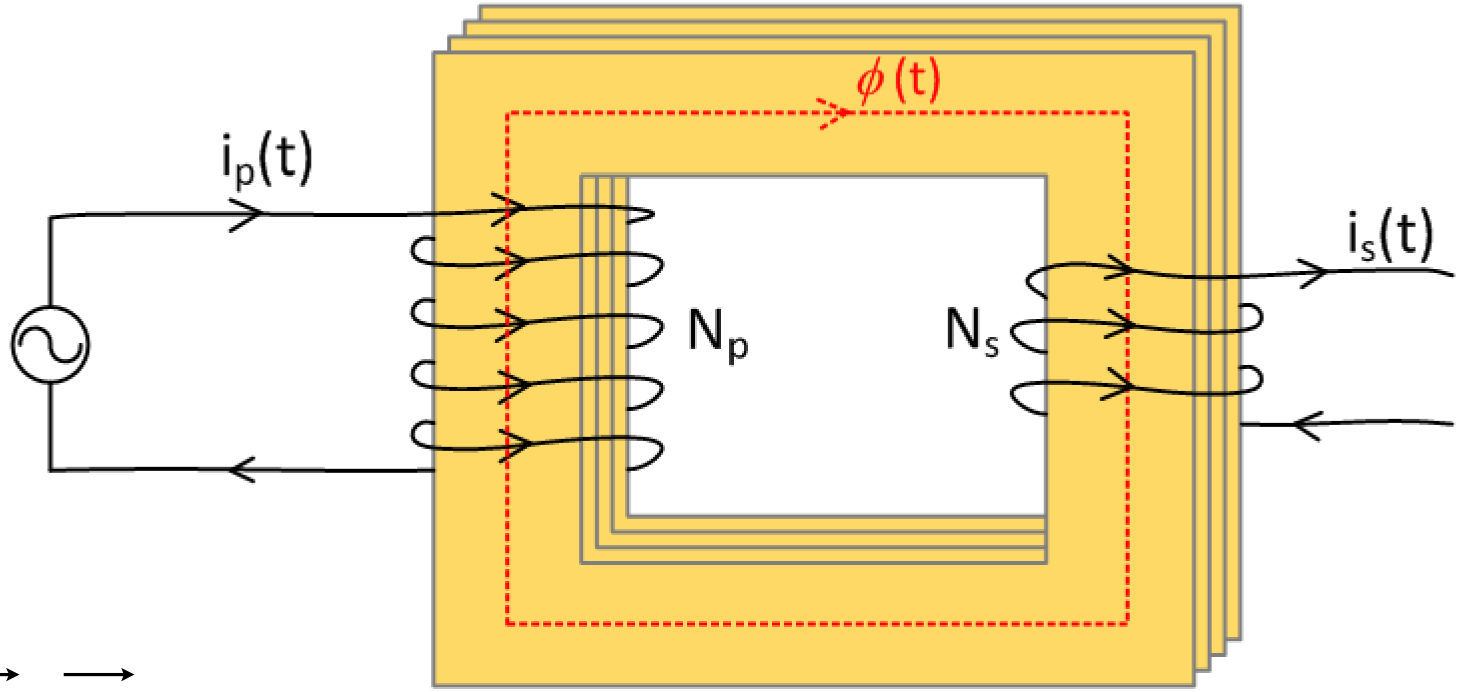
$$e_p(t) = N_p \frac{d\phi_p}{dt} \qquad e_s(t) = N_s \frac{d\phi_s}{dt}$$

$$\frac{d\phi_p}{dt} = \frac{e_p(t)}{N_p} \qquad \frac{d\phi_s}{dt} = \frac{e_s(t)}{N_s}$$

$$\phi_p = \phi_s$$

$$\boxed{\frac{e_p(t)}{e_s(t)} = \frac{N_p}{N_s} = a}$$

Circuito secundário com carga ($i_s \neq 0$)



$$\oint \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = Ni$$

$$H \cdot \ell_m = N_p i_p(t) - N_s i_s(t)$$

$$\frac{B}{\mu} \cdot \ell_m = N_p i_p(t) - N_s i_s(t)$$

Transformador ideal : $\mu \to \infty$

$$N_p i_p - N_s i_s = 0$$

$$\boxed{\frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{1}{a}}$$

↑tensão, ↓corrente ↓ tensão, ↑ corrente

Relações de tensão, corrente e potência em um transformador ideal

tensões

$$\boxed{\frac{e_p(t)}{e_s(t)} = \frac{N_p}{N_s} = a}$$

$$\boxed{\frac{\dot{E}_P}{\dot{E}_S} = \frac{N_p}{N_s} = a}$$

correntes

$$\boxed{\frac{i_p(t)}{i_s(t)} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{1}{a}}$$

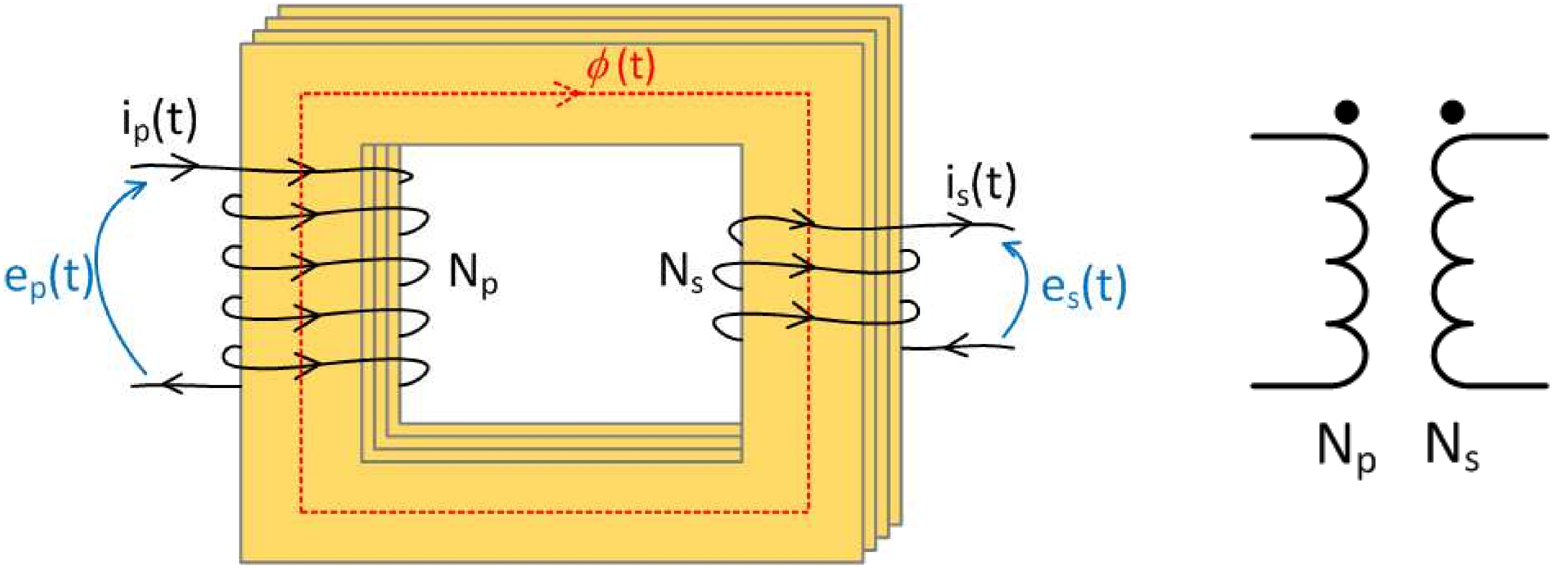
$$\boxed{\frac{\dot{I}_P}{\dot{I}_S} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{1}{a}}$$

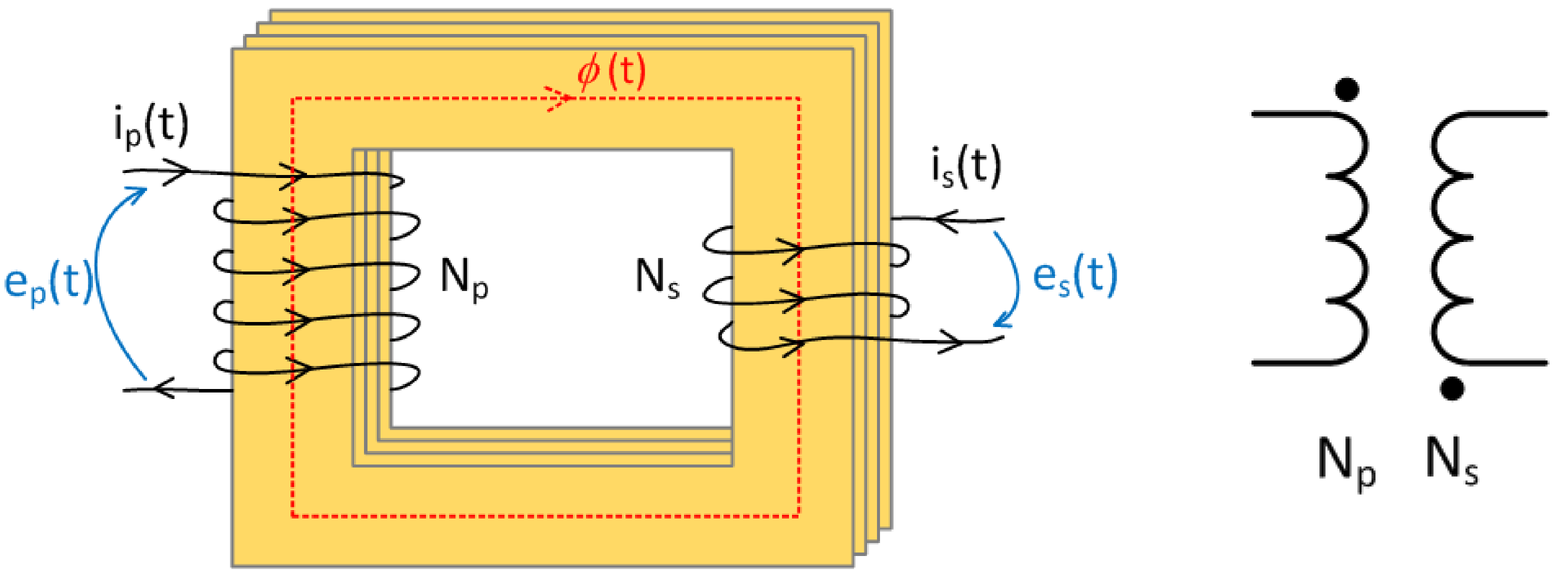
potências

$$\boxed{e_s(t) \cdot i_s(t) = e_p(t)\frac{N_s}{N_p} i_p(t)\frac{N_p}{N_s} = e_p(t) \cdot i_p(t)}$$

$$\boxed{\overline{S_P} = \dot{E}_P \dot{I}_P * = \dot{E}_S \dot{I}_S * = \overline{S_S}}$$

Convenção de polaridades





Transformador real

- Permeabilidade magnética finita
  - $\Re$ (relutância) $\neq 0$
  - Existe certa dispersão no fluxo magnético pelo ar, percorrendo um caminho de alta relutância (baixa permeabilidade)
- Corrente de magnetização $\neq 0$
- Perdas no núcleo $\neq 0$
- Perdas Joule nos enrolamentos $\neq 0$

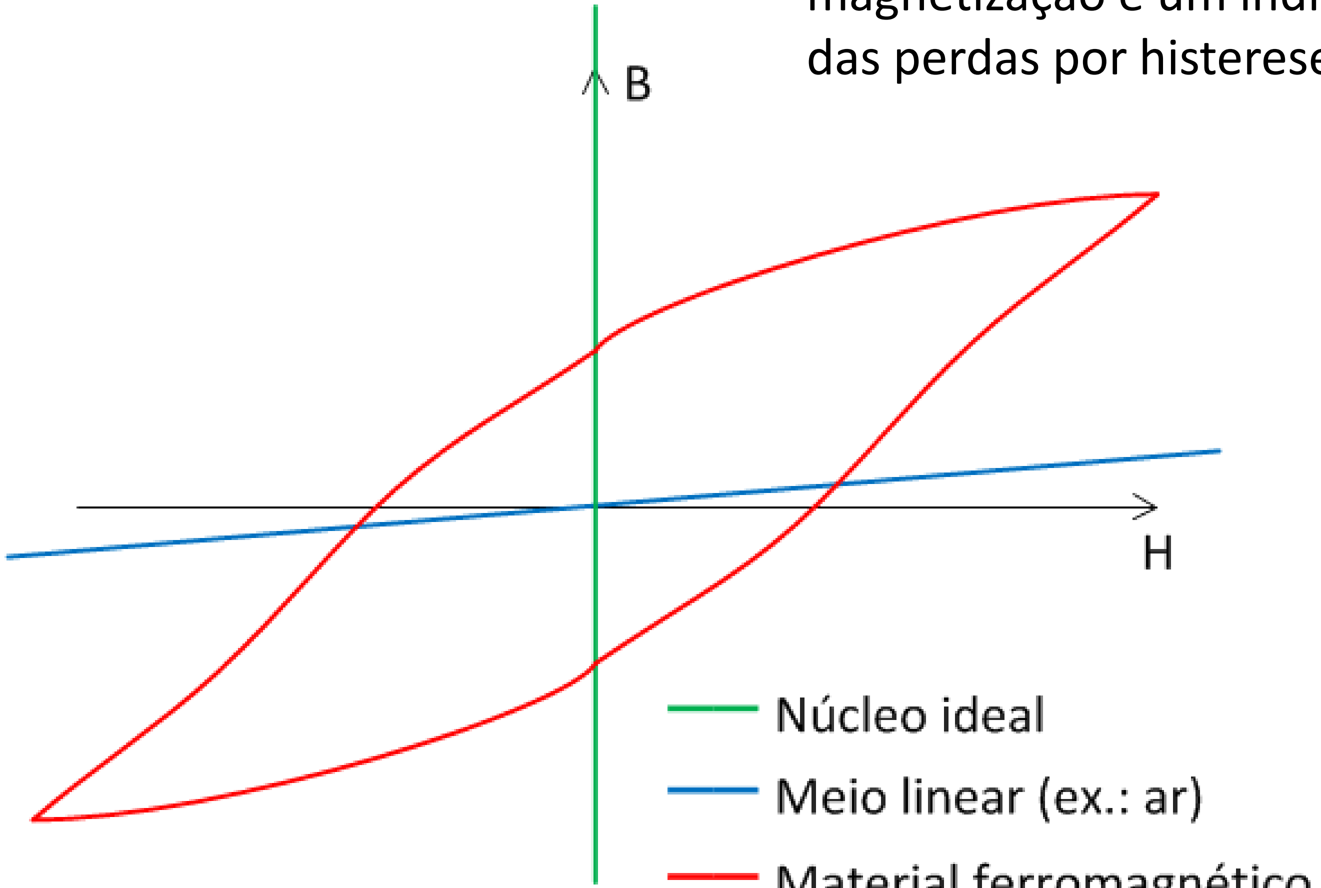
Transformador real: corrente de magnetização

- Circuito secundário em aberto (sem carga)
  - Corrente no primário: corrente de magnetização = corrente necessária para produzir o fluxo no núcleo magnético, através da orientação dos domínios do material.

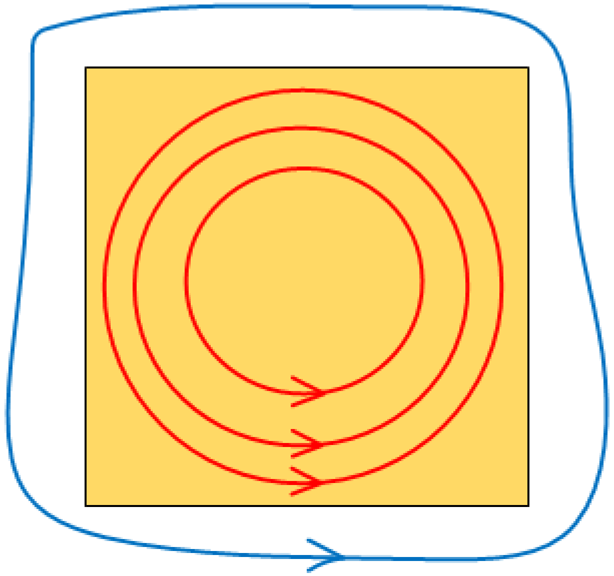
Perdas no núcleo

- Curva de magnetização

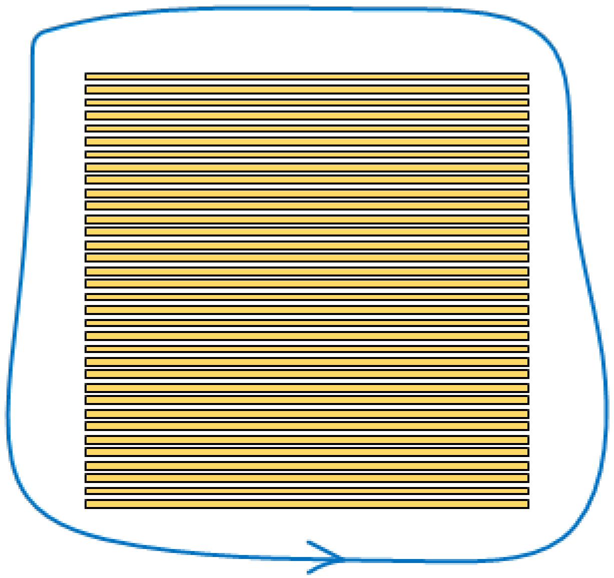
- Alguns domínios magnéticos ainda ficam alinhados após H=0
- A área interna da curva de magnetização é um indicativo das perdas por histerese



Perdas no núcleo (cont.)

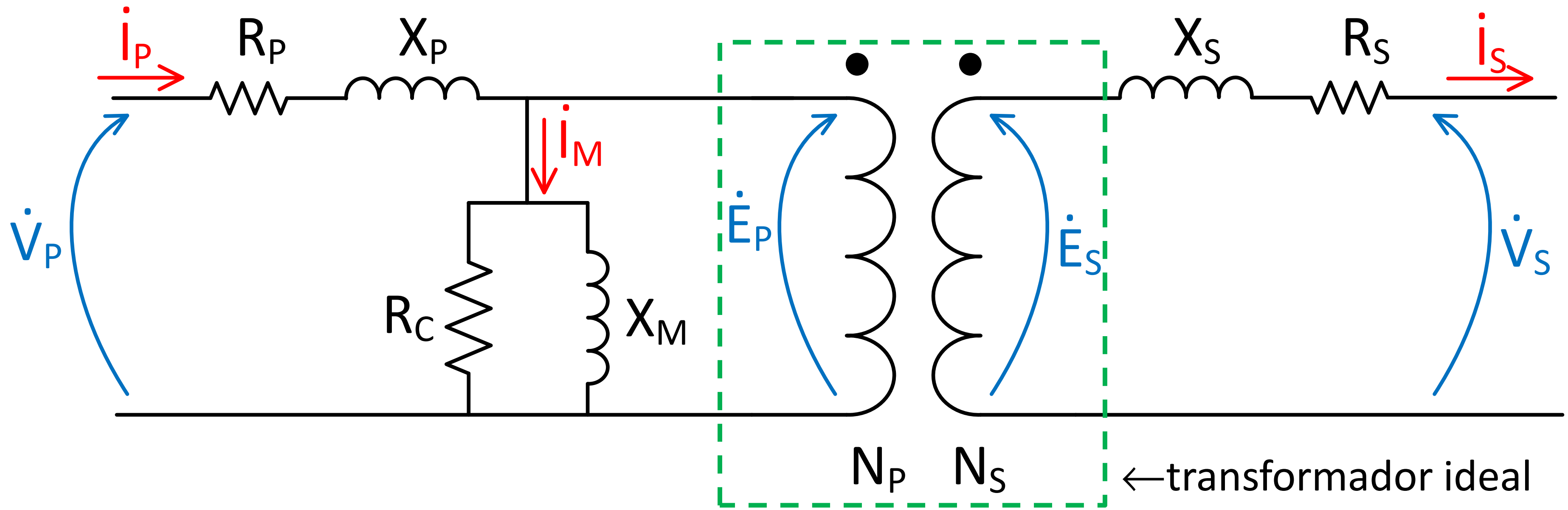


- Correntes de Foucault (ou correntes parasitas) → correntes induzidas no núcleo, ocasionando perdas por Ri^2



- Núcleo laminado resulta em um caminho de alta resistência para as correntes de Foucault

Modelo equivalente de um transformador real



R_P , R_S: resistências dos enrolamentos primário e secundário

X_P , X_S: reatâncias de dispersão dos enrolamentos primário e secundário

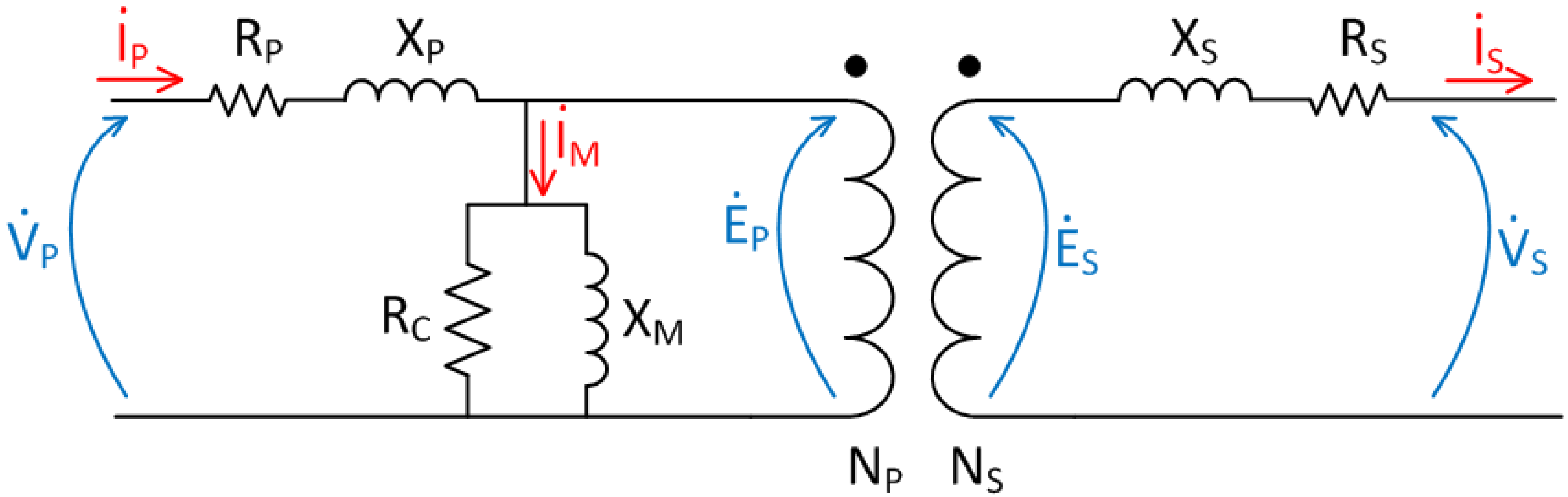
R_C: resistência que representa as perdas ôhmicas no núcleo

X_M: indutância que representa a curva de magnetização do núcleo

R_C // X_M: ramo de magnetização do transformador

$\dot{I}_M$: corrente de magnetização

Modelo equivalente de um transformador real (cont.)



No secundário do transformador,

$$\left[\dot{E}_S = \frac{\dot{E}_P}{a}, \quad \dot{I}_S = a \cdot \left(\dot{I}_P - \dot{I}_M\right)\right]$$

$$\dot{V}_S = \dot{E}_S - \dot{I}_S\left(R_S + jX_S\right) = \frac{\dot{E}_P}{a} - a \cdot \left(\dot{I}_P - \dot{I}_M\right)\left(R_S + jX_S\right)$$

$$\dot{V}_S = \frac{\dot{E}_P - \left(\dot{I}_P - \dot{I}_M\right)\left(a^2 R_S + ja^2 X_S\right)}{a}$$

$$\boxed{a\dot{V}_S = \dot{E}_P - \left(\dot{I}_P - \dot{I}_M\right)\left(a^2 R_S + ja^2 X_S\right)}$$

Modelo equivalente de um transformador real com o secundário refletido no primário

$$\boxed{a\dot{V}_S = \dot{E}_P - \left(\dot{I}_P - \dot{I}_M\right)\left(a^2 R_S + ja^2 X_S\right)}$$

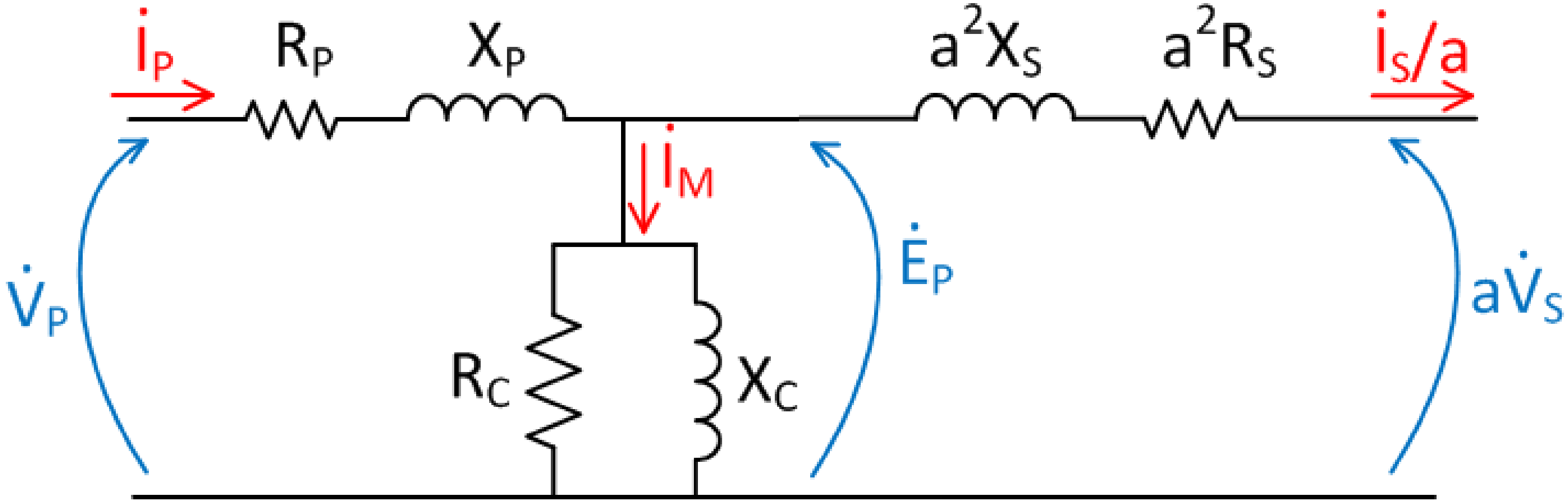
ou

$$\boxed{\dot{V}_S' = \dot{E}_P - \dot{I}_S'\left(R_S' + jX_S'\right)}$$

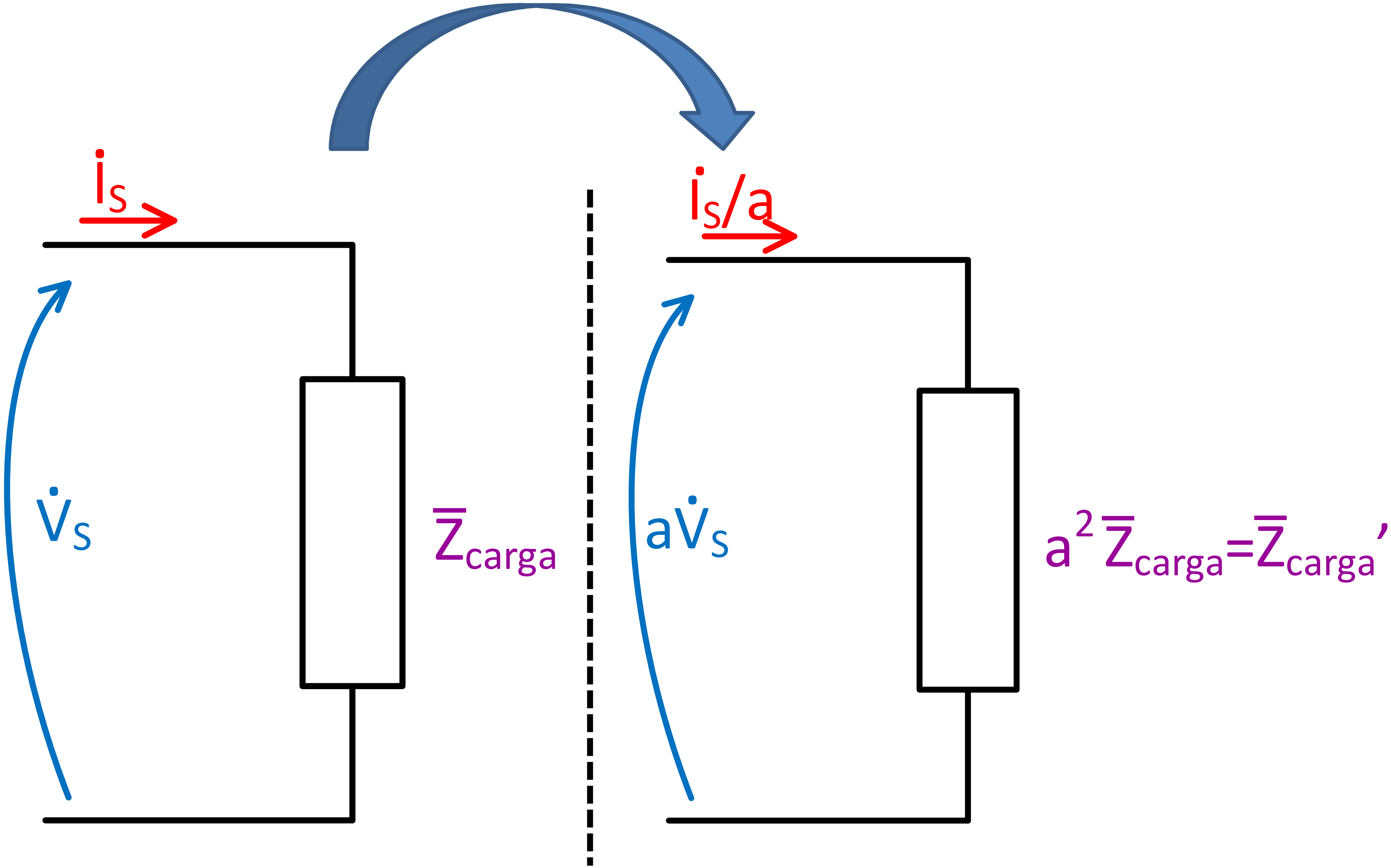
onde os valores refletidos são:

$$\boxed{\dot{V}_S' = a\dot{V}_S \qquad \dot{I}_S' = \dot{I}_S/a = \dot{I}_P - \dot{I}_M \qquad R_S' = a^2 R_S \qquad X_S' = a^2 X_S}$$

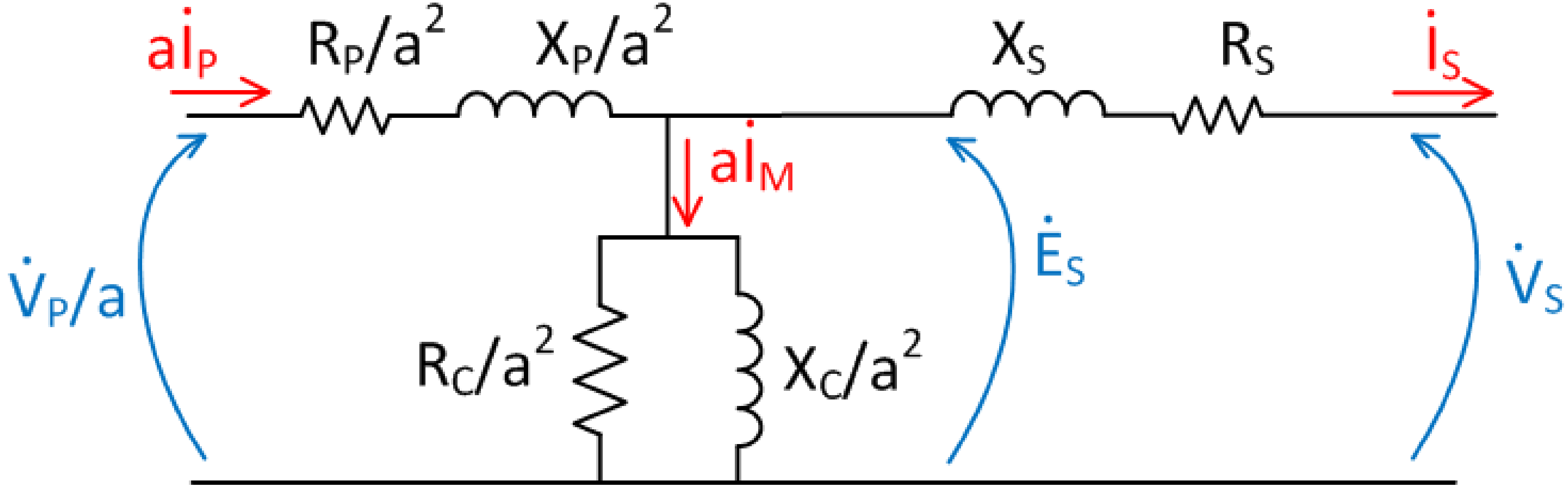
Esta expressão é satisfeita pelo circuito equivalente a seguir, onde o transformador ideal pode ser omitido. Notar que os valores reais no secundário são $\dot{V}s$ e $\dot{I}s$.



Impedância de carga no secundário refletida ao primário



Modelo equivalente de um transformador real com o secundário <u>refletido</u> no primário



Valores nominais de transformadores (dados de placa)

- Tensões nominais
  - Valores eficazes (rms)
  - ex. 110 V/220 V, 13,8 kV/440 V
  - $Vnom_1/Vnom_2=a_{nominal}$
- Potência nominal
  - Potência aparente [VA]
  - Correntes nominais obtidas a partir de S_{nom} e V_{nom}

Exercício transformador

É dado um transformador 2400V/240V com os seguintes parâmetros:

- $R_p = 0{,}68\,\Omega$, $X_p = 7{,}8\,\Omega$ (primário)
- $R_S = 0{,}0068\,\Omega$, $X_S = 0{,}078\,\Omega$ (secundário)
- $R_C = 90\,k\Omega$, $X_M = 20\,k\Omega$ (magnetização)

Considere que, em seu secundário, é conectada uma carga que, se submetida a tensão nominal, consome 20 kVA com fator de potência 0,88 indutivo.

Problema 1: Se a tensão no primário do transformador for igual à nominal, qual a tensão, corrente e potência complexa no secundário, corrente e potência complexa no primário? Despreze o ramo de magnetização.

2400V/240V

- $R_p = 0{,}68\,\Omega$, $X_p = 7{,}8\,\Omega$ (primário)
- $R_S = 0{,}0068\,\Omega$, $X_s = 0{,}078\,\Omega$ (secundário)
- $R_C = 90\,k\Omega$, $X_M = 20\,k\Omega$ (magnetização)

Tensão nominal no primário = 2400 V

Relação de transformação $a = \dfrac{2400}{240} = 10$

$R_S' = 10^2\, 0{,}0068 = 0{,}68\,\Omega$ $\quad X_S' = 10^2\, 0{,}078 = 7{,}8\,\Omega$

Impedância de carga:

p/ $\dot{V}_S = 240V$, $\overline{S}_S = 20000\angle\cos^{-1}0{,}88$

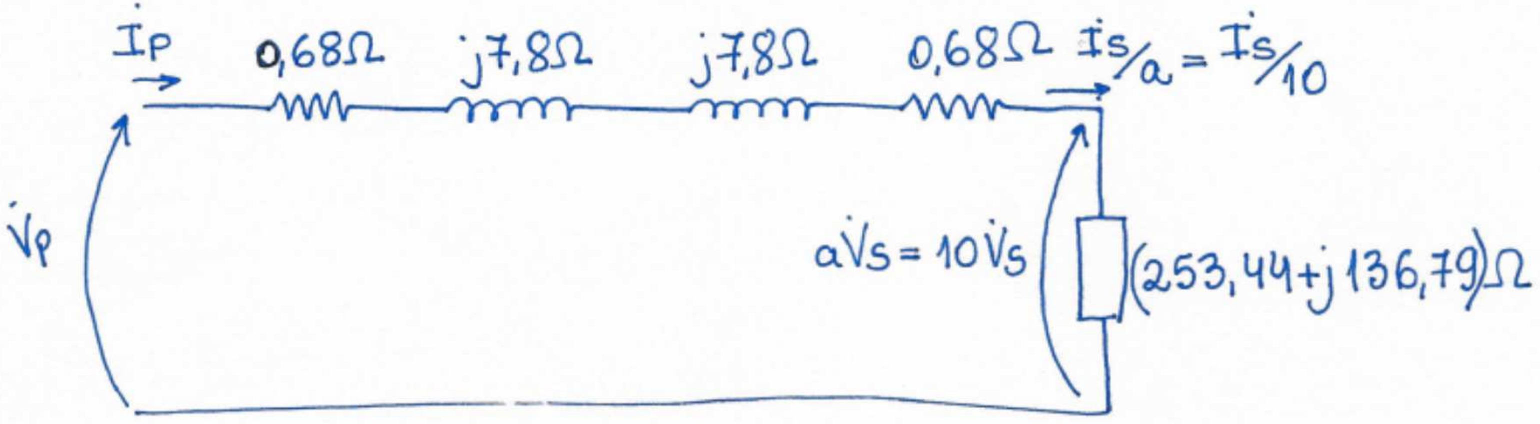
$$\overline{S}_S = \dot{V}_S\, \dot{I}_S^* = \dot{V}_S\left(\frac{\dot{V}_S}{\overline{Z}_L}\right)^* = \frac{|\dot{V}_S|^2}{\overline{Z}_L^*} \longrightarrow 20000\angle 28{,}36^\circ = \frac{240^2}{\overline{Z}_L^*}$$

$$\overline{Z}_L^* = \frac{240^2}{20000\angle 28{,}36^\circ} = 2{,}88\angle -28{,}36^\circ$$

$$\overline{Z}_L = (2{,}88\angle 28{,}36^\circ) = (2{,}5344 + j1{,}3679)\,\Omega$$

$$\overline{Z}_L' = 10^2(2{,}5344 + j1{,}3679) = (253{,}44 + j136{,}79)\,\Omega$$

Desprezando o ramo de magnetização, o circuito equivalente é apresentado a seguir



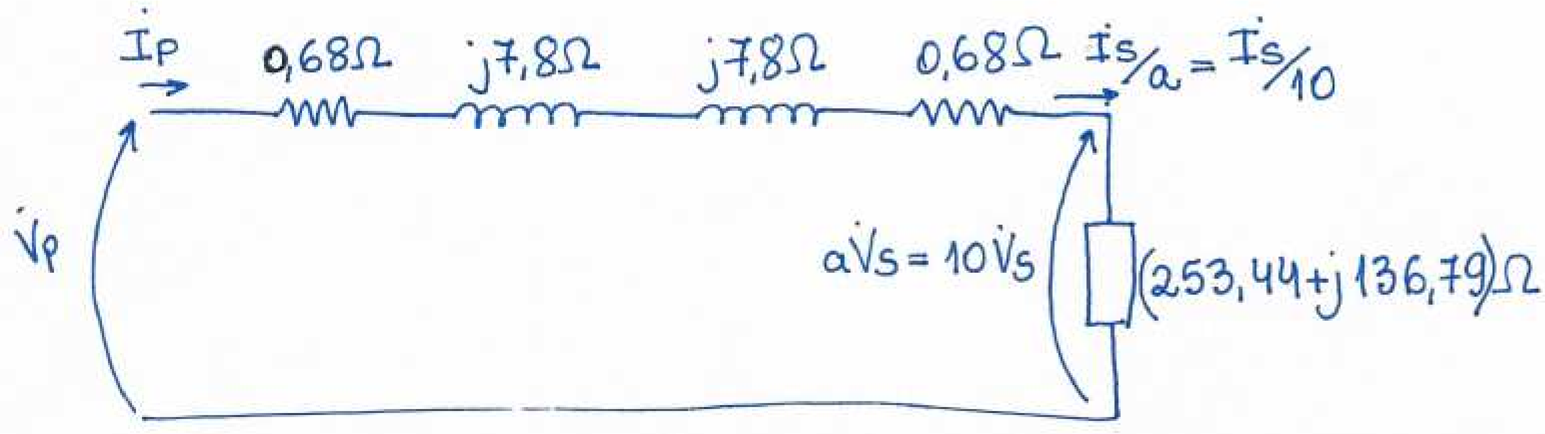
$$\dot{I}_P = \frac{2400\angle 0°}{0{,}68 + j7{,}8 + j7{,}8 + 0{,}68 + 253{,}44 + j136{,}79} = \frac{2400}{254{,}80 + j152{,}39}$$

$$\boxed{\dot{I}_P = \frac{2400}{(296{,}89\angle 30{,}88°)} = (8{,}08\angle -30{,}88°)\,A}$$

$$\overline{S_P} = \dot{V}_P \dot{I}_P^{*} = (2400\angle 0°)(8{,}08\angle 30{,}88°) = (19400{,}8\angle 30{,}88°)\,VA$$

$$\boxed{\overline{S_P} = (16650{,}1 + j9958{,}2)\,VA}$$

$$\frac{\dot{I}_S}{a} = \frac{\dot{I}_S}{10} = \dot{I}_P \longrightarrow \boxed{\dot{I}_S = 10\,\dot{I}_P = (80{,}8\angle -30{,}88°)\,A}$$



anteriores:

$$\boxed{\dot{I}_P = \frac{2400}{(296,89\angle 30,88^\circ)} = (8,08\angle -30,88^\circ)A}$$

$$\boxed{\bar{S}_P = (16650,1 + j\,9958,2)VA}$$

$$\boxed{\dot{I}_S = 10\,\dot{I}_P = (80,8\angle -30,88^\circ)A}$$

continuando:

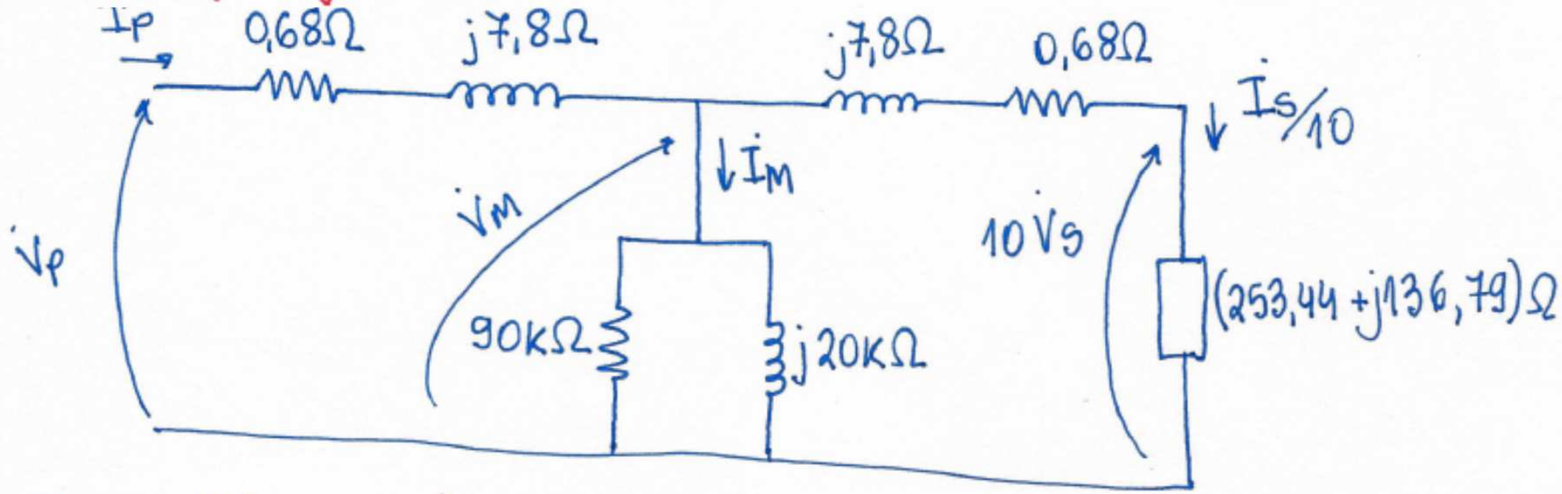
$$\dot{V}_S = \dot{I}_S\,\bar{Z}_L = (80,8\angle -30,88^\circ)(2,88\angle 28,36^\circ) = (232,81\angle -2,53^\circ)V$$

$$\bar{S}_S = \dot{V}_S\,\dot{I}_S^* = (232,81\angle -2,53^\circ)(80,8\angle 30,88^\circ) = (18819,58\angle 28,36^\circ)\ VA$$

$$\boxed{\bar{S}_S = (16561,23 + j\,8938,81)VA}$$

(comparar com o valor afirmado no enunciado para $\dot{V}_S = 240V$)

Problema 2: Idem ao problema 1, considerando o ramo de magnetização



Para obter-se $\dot{I}_P$, calcula-se a impedância equivalente do circuito vista da entrada:

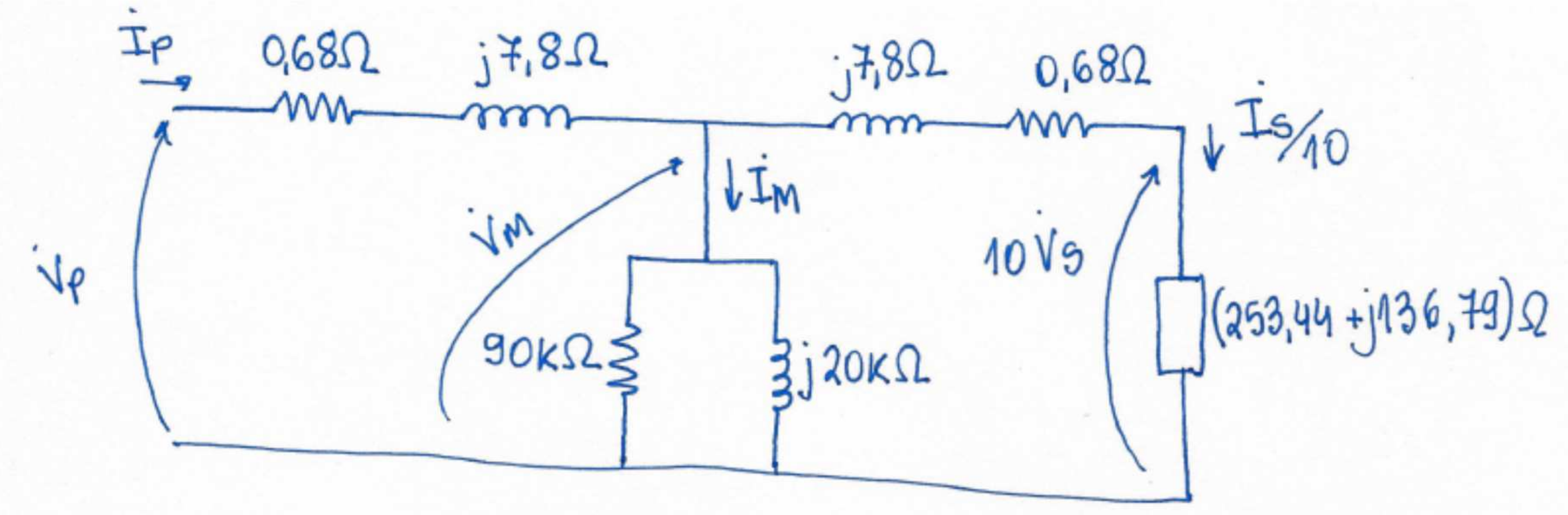
$$\overline{Z}_{eq} = 0{,}68 + j7{,}8 + \left[(90 \cdot 10^3 // j20 \cdot 10^3) // (j7{,}8 + 0{,}68 + 253{,}44 + j136{,}79)\right]$$

$$= 0{,}68 + j7{,}8 + \left[(4235{,}29 + j19058{,}82) // (254{,}12 + j144{,}59)\right]$$

$$= 0{,}68 + j7{,}8 + (249{,}99 + j145{,}9) = (250{,}67 + j153{,}7)\,\Omega$$

$$\dot{I}_P = \frac{V_P}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{2400}{250{,}67 + j153{,}7} = \frac{2400}{(294{,}04\angle 31{,}52^\circ)}$$

$$\boxed{\dot{I}_P = (8{,}16\angle -31{,}52^\circ)\,A = (6{,}96 - j4{,}27)\,A}$$



$$\dot{I}_M = \frac{\dot{V}_M}{4235{,}29 + j19058{,}82}$$

$$\dot{V}_M = \dot{V}_P - \dot{I}_P(0{,}68 + j7{,}8) = 2400 - (8{,}16\angle -31{,}52^\circ)(0{,}68 + j7{,}8)$$

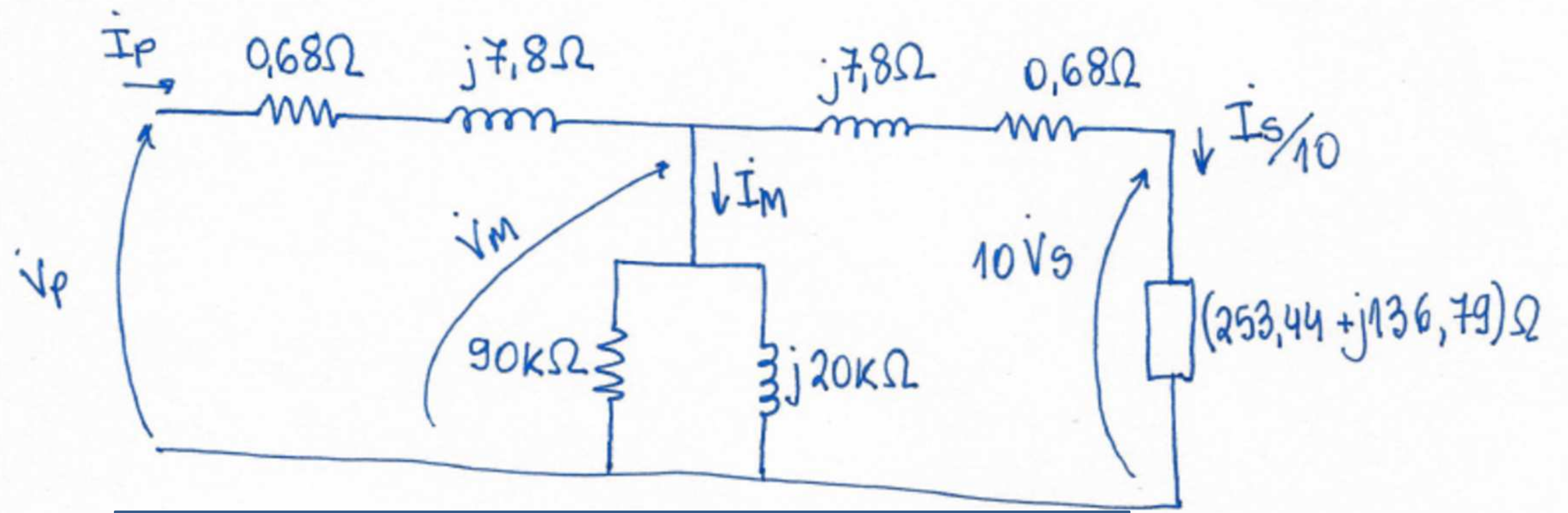
$$= 2400 - (8{,}16\angle -31{,}52^\circ)(7{,}83\angle 85{,}02^\circ)$$

$$= 2400 - (63{,}91\angle 53{,}50^\circ) = 2400 - (38{,}01 + j51{,}37)$$

$$= 2361{,}99 - j51{,}37 = (2362{,}55\angle -1{,}25^\circ)\,V$$

$$\dot{I}_M = \frac{(2362{,}55\angle -1{,}25^\circ)}{4235{,}29 + j19058{,}82} = \frac{(2362{,}55\angle -1{,}25^\circ)}{(19523{,}74\angle 77{,}47^\circ)}$$

$$\boxed{\dot{I}_M = (0{,}12\angle -78{,}72^\circ)\,A = (0{,}024 - j0{,}119)\,A}$$



$$\boxed{\dot{I}_P = (8,16\angle -31,52^\circ)\,A = (6,96 - j4,27)\,A}$$

$$\boxed{\dot{I}_M = (0,12\angle -78,72^\circ)\,A = (0,024 - j0,119)\,A}$$

$$\frac{\dot{I}_S}{10} = \dot{I}_P - \dot{I}_M = (6,96 - j4,27) - (0,024 - j0,119)$$

$$\frac{\dot{I}_S}{10} = (6,935 - j4,148) = (8,081\angle -30,89^\circ)$$

$$\dot{I}_S = (80,81\angle -30,89^\circ)$$

$$\dot{V}_S = \dot{I}_S\,\overline{Z}_L = (80,81\angle -30,89^\circ)(2,88\angle 28,36^\circ) = (232,72\angle -2,53^\circ)\,V$$

$$\overline{S}_S = \dot{V}_S\,\dot{I}_S^* = (232,72\angle -2,53^\circ)(80,81\angle 30,89^\circ)$$

$$= (18804,81\angle 28,36^\circ) = (16548,24 + j8931,79)\,VA$$