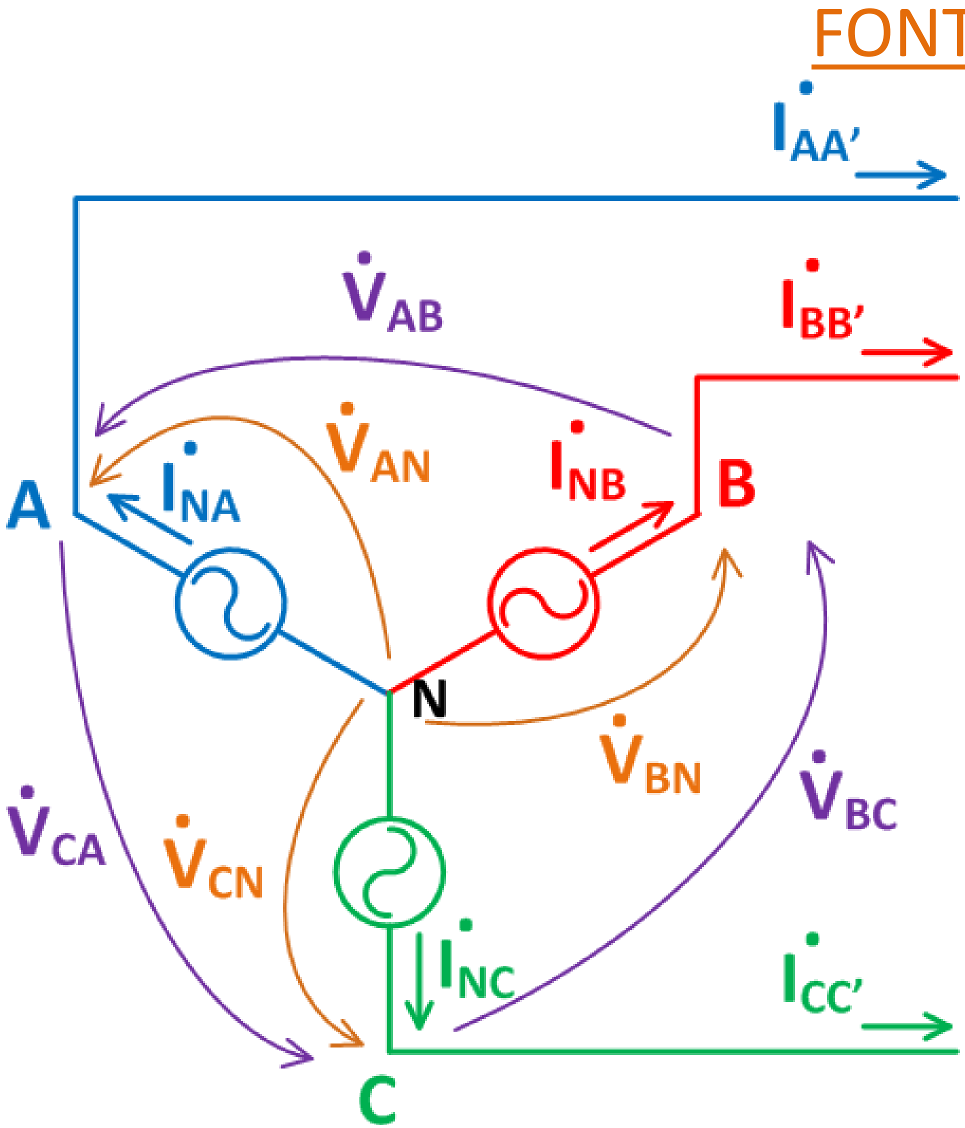
Circuitos trifásicos

Aula 2

Ligação estrela: relação entre tensões/correntes de linha/fase



$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}$$

Sequência direta:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{AN}(1\angle 120°) =$$
$$= \dot{V}_{AN}(1-(1\angle 120°)) =$$
$$= \dot{V}_{AN}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN}(\sqrt{3}\angle 30°)$$

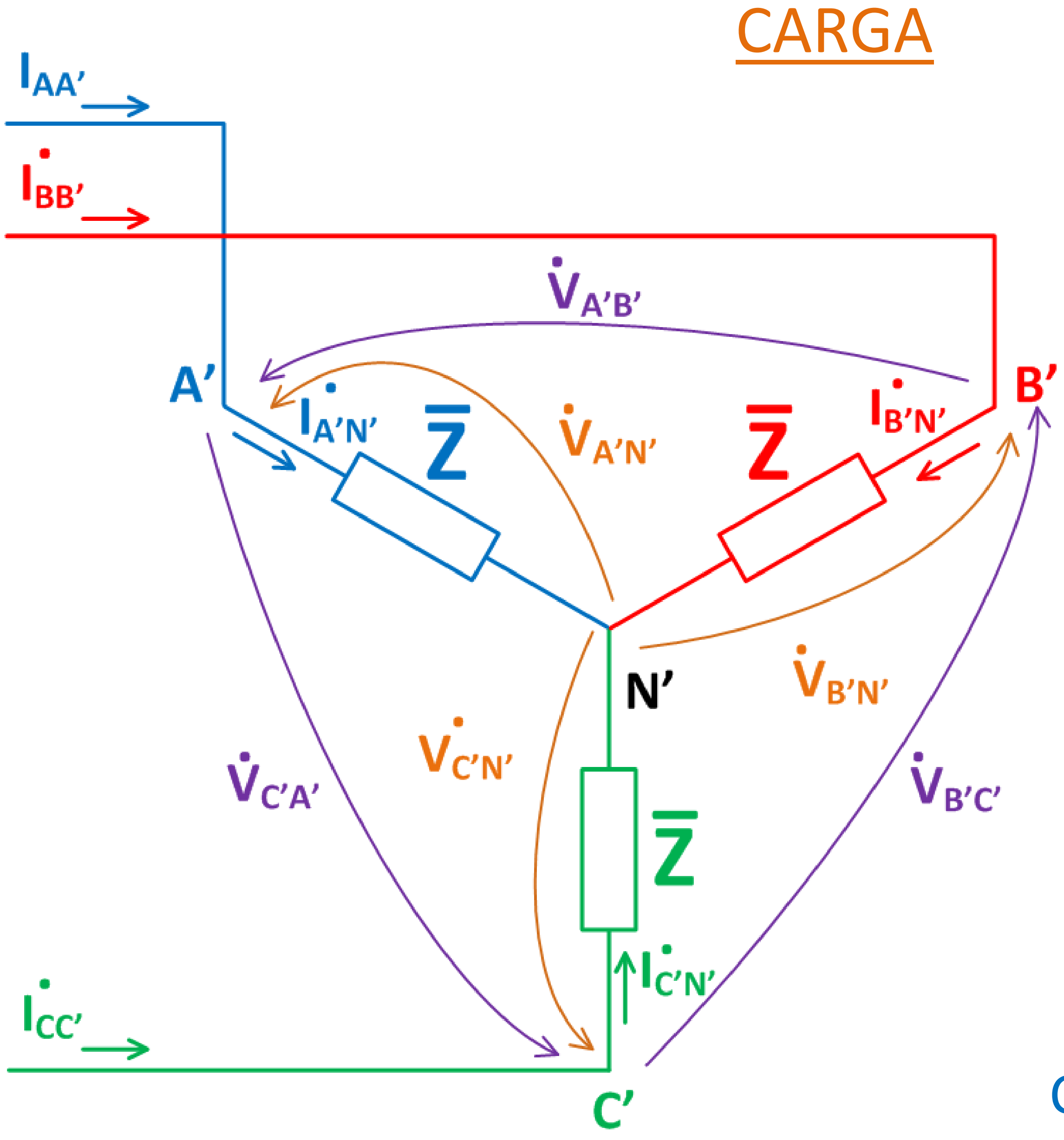
Sequência inversa:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN}(\sqrt{3}\angle -30°)$$

Correntes de linha = fase

$$\dot{I}_{NA} = \dot{I}_{AA'} \quad \dot{I}_{NB} = \dot{I}_{BB'} \quad \dot{I}_{NC} = \dot{I}_{CC'}$$

Ligação estrela: relação entre tensões/correntes de linha/fase



$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{B'N'}$$

Sequência direta:

$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{B'N'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{C'N'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$

Sequência inversa:

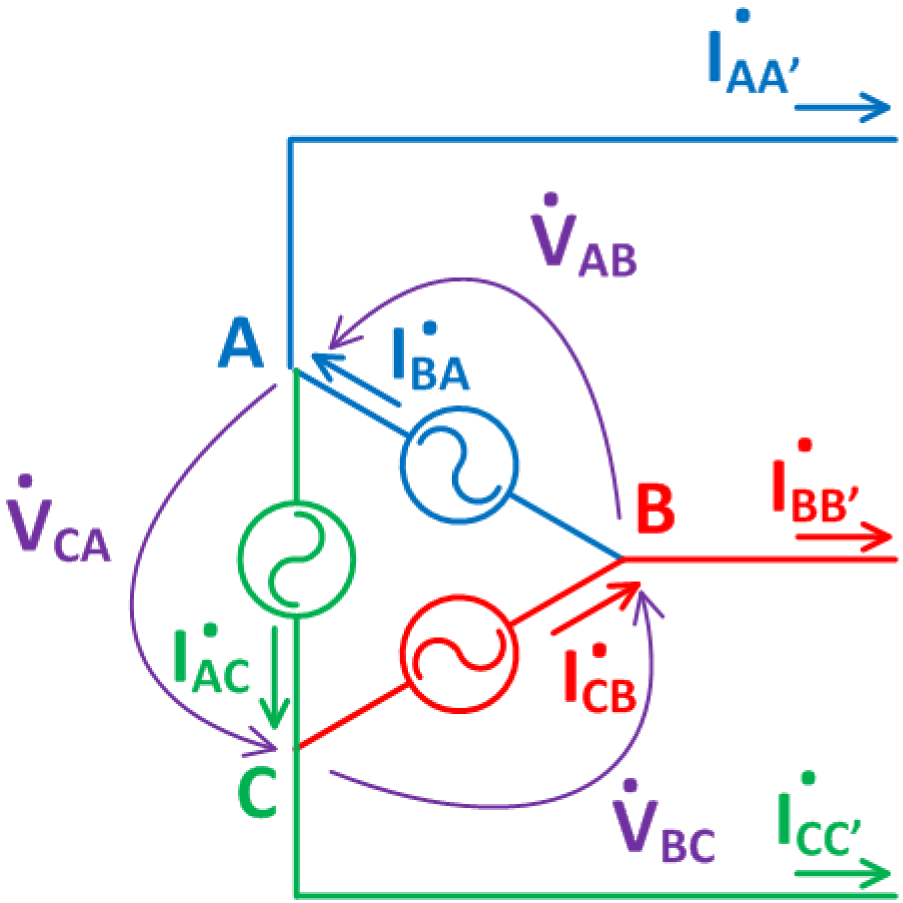
$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{B'N'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{C'N'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$

Correntes de linha = fase

$$\dot{I}_{A'N'} = \dot{I}_{AA'} \quad \dot{I}_{B'N'} = \dot{I}_{BB'} \quad \dot{I}_{C'N'} = \dot{I}_{CC'}$$

Ligação triângulo: relação entre tensões/correntes de linha/fase

<u>FONTE</u>



$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{BA} - \dot{I}_{AC}$$

Sequência direta:

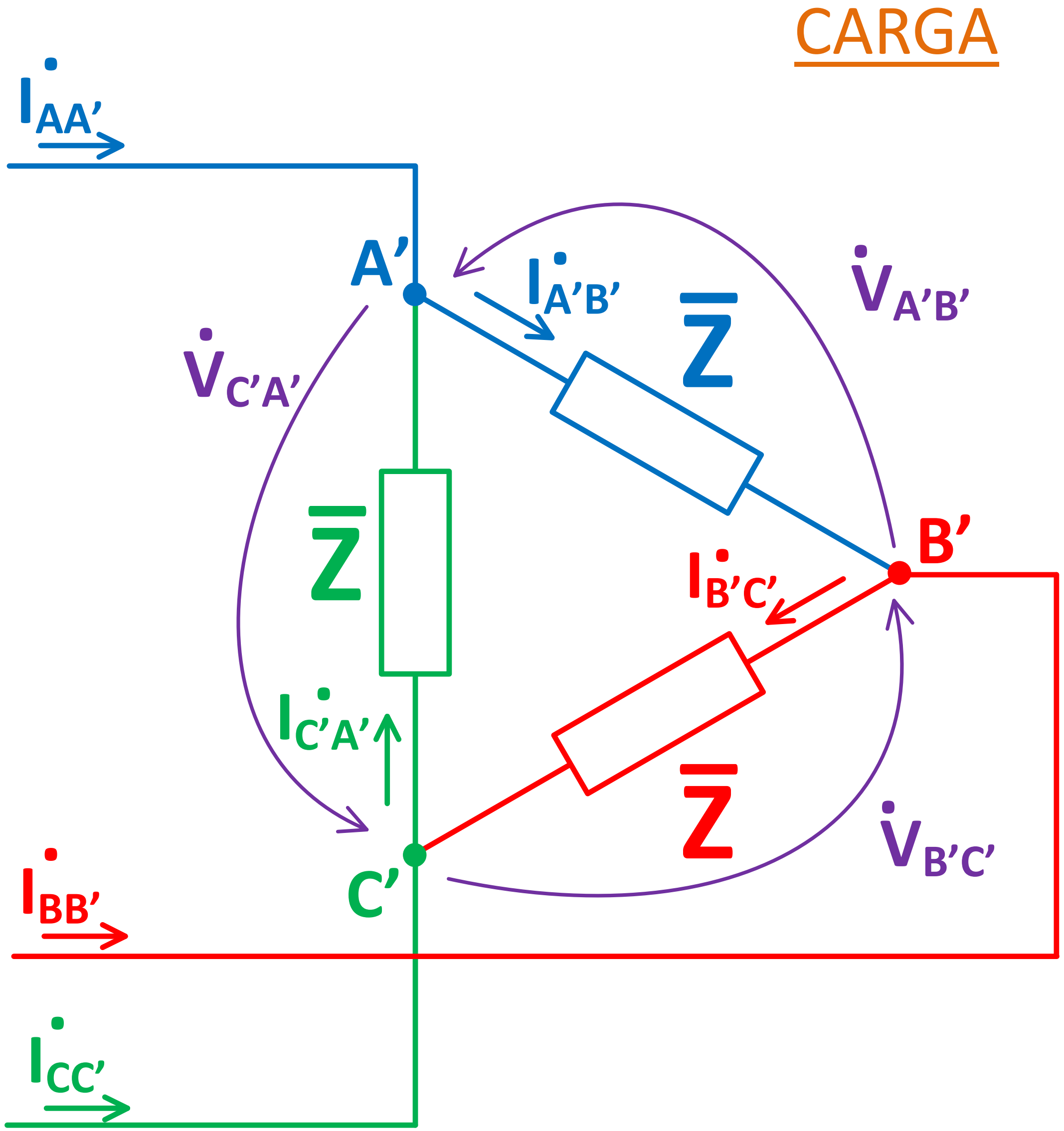
$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{BA} - \dot{I}_{BA}(1\angle 120°) =$$
$$= \dot{I}_{BA}(1-(1\angle 120°)) =$$
$$= \dot{I}_{BA}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{CB}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{AC}(\sqrt{3}\angle -30°)$$

Sequência inversa:

$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{BA}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{CB}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{AC}(\sqrt{3}\angle 30°)$$

Tensões de linha = fase

Ligação triângulo: relação entre tensões/correntes de linha/fase



$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'}$$

Sequência direta:

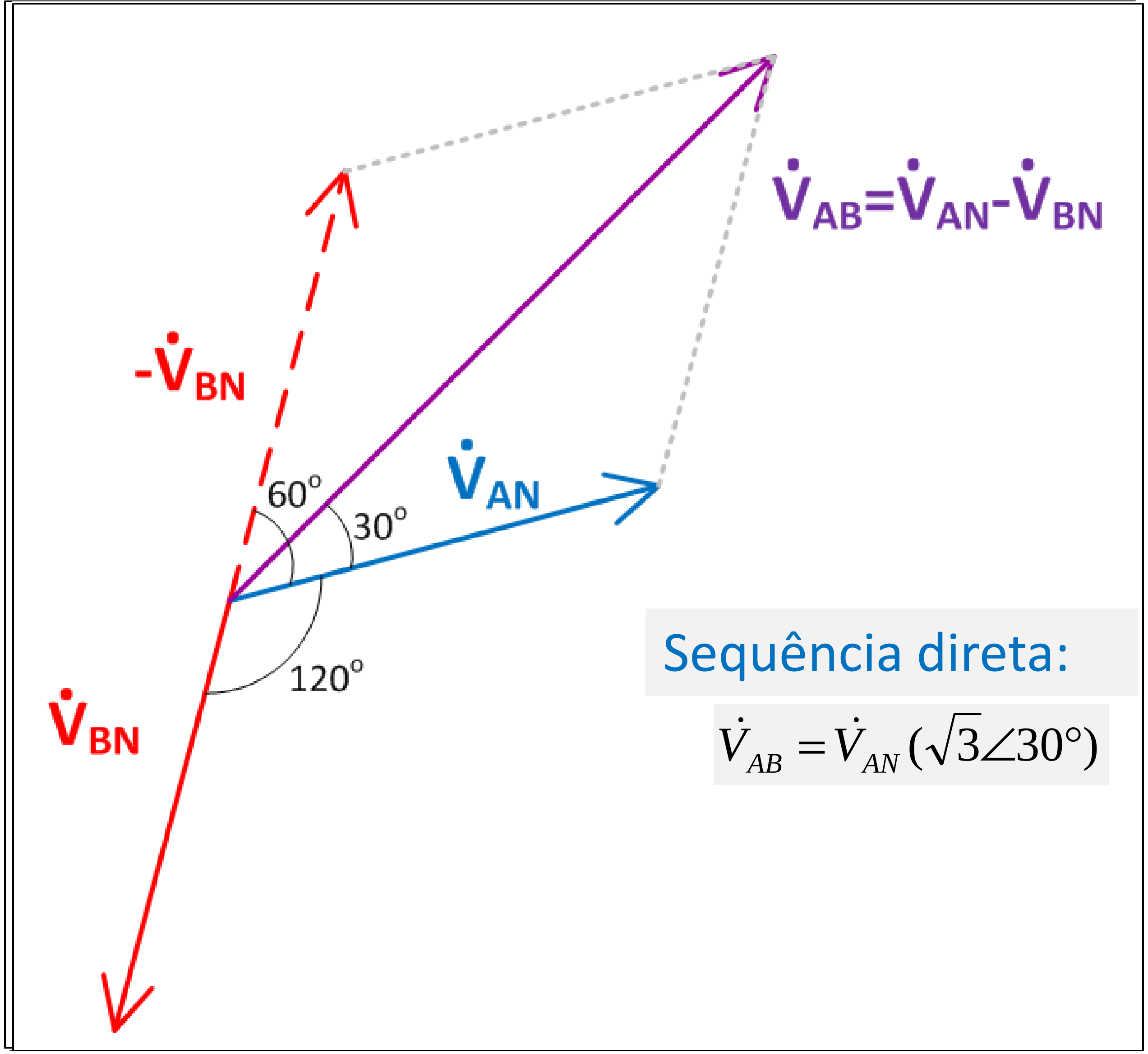
$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{A'B'}(1\angle 120°) =$$
$$= \dot{I}_{A'B'}(1-(1\angle 120°)) =$$
$$= \dot{I}_{A'B'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{B'C'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$
$$\dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{C'A'}(\sqrt{3}\angle -30°)$$

Sequência inversa:

$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{B'C'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$
$$\dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{C'A'}(\sqrt{3}\angle 30°)$$

Tensões de linha = fase

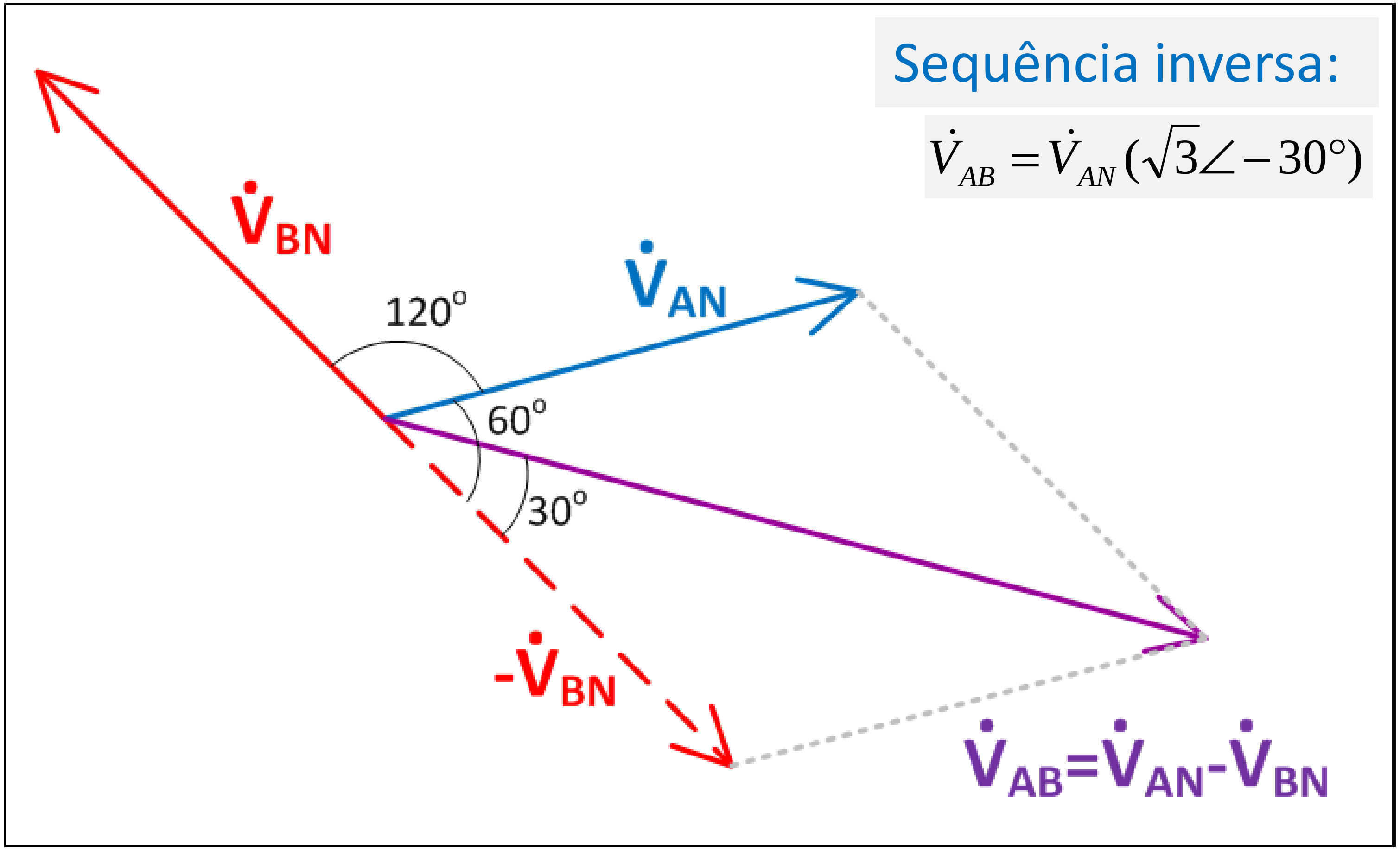
Relações entre tensões – representação gráfica de fasores
Sequência direta



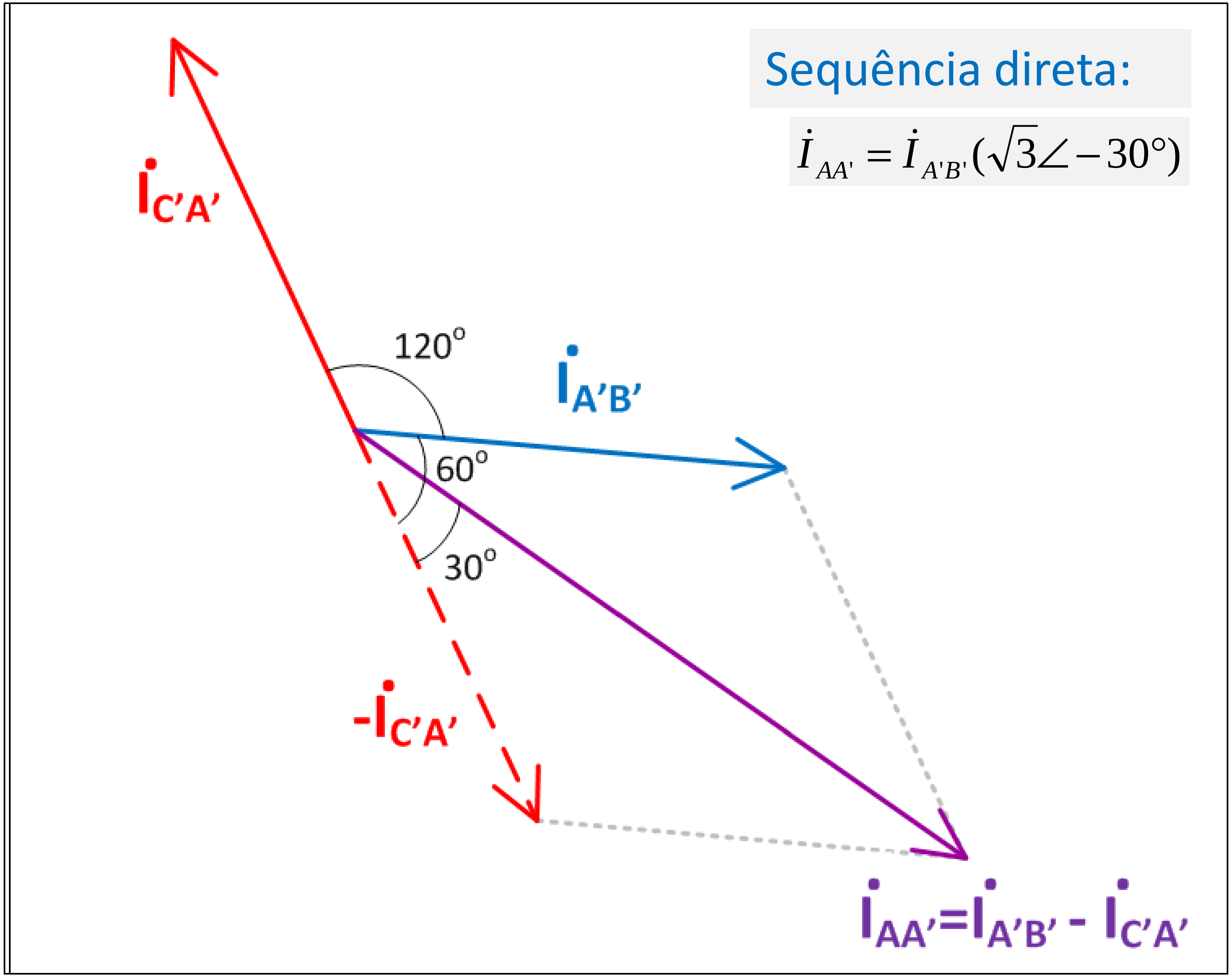
Sequência direta:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN}(\sqrt{3}\angle 30°)$$

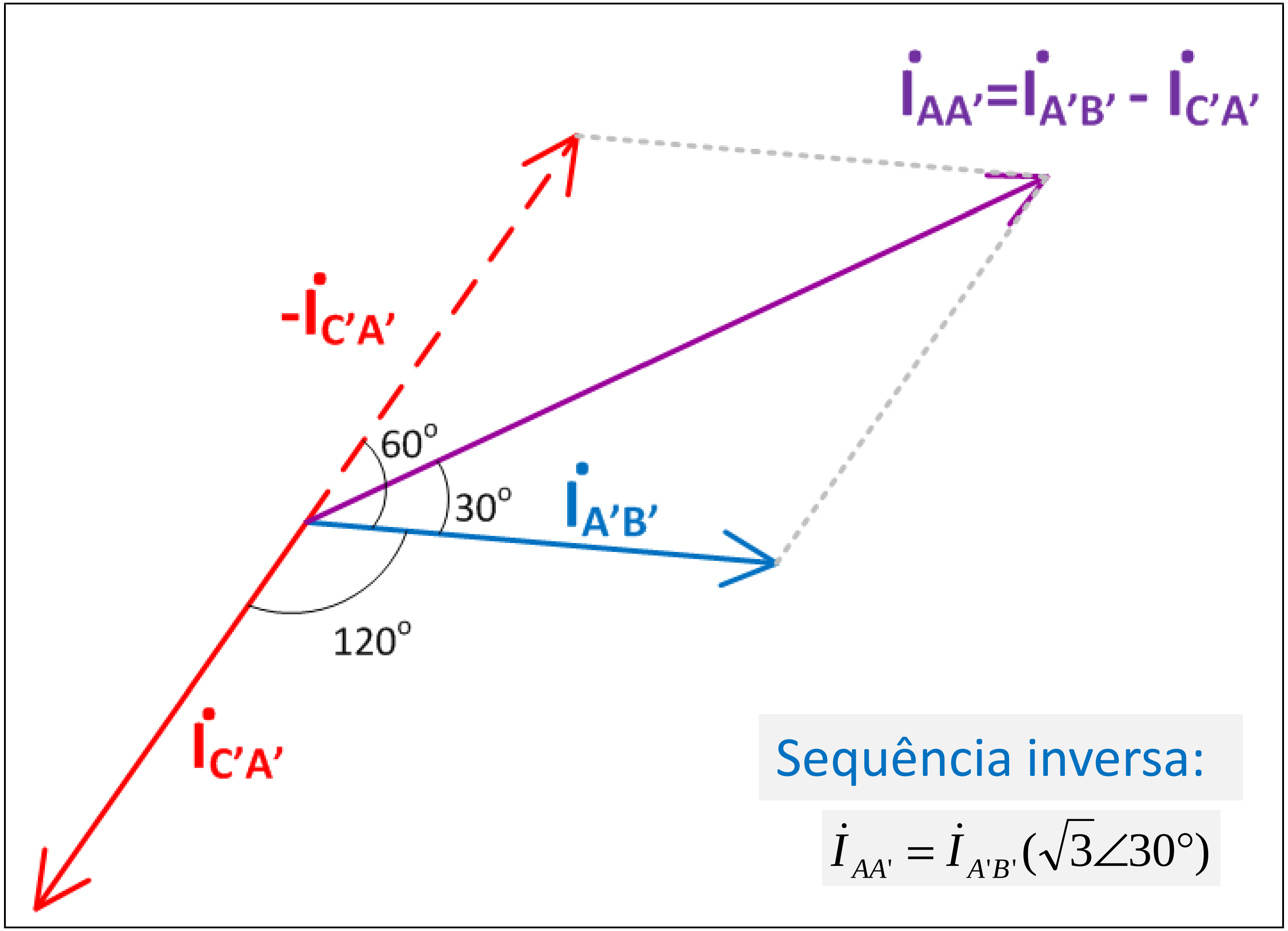
Relações entre tensões – representação gráfica de fasores
Sequência inversa



Relações entre correntes – representação gráfica de fasores
Sequência direta



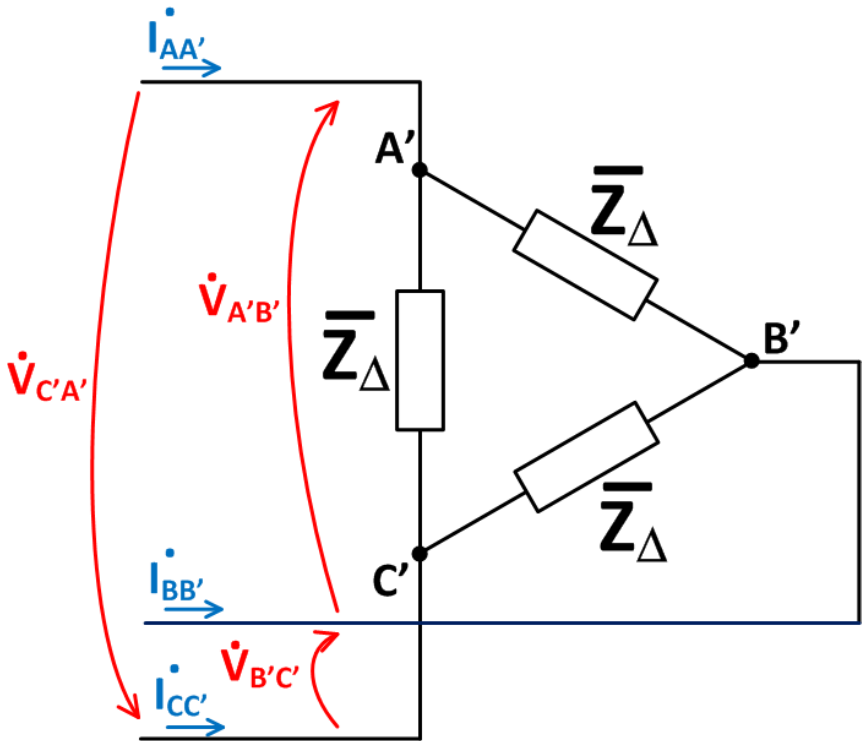
Relações entre correntes – representação gráfica de fasores
Sequência <u>inversa</u>

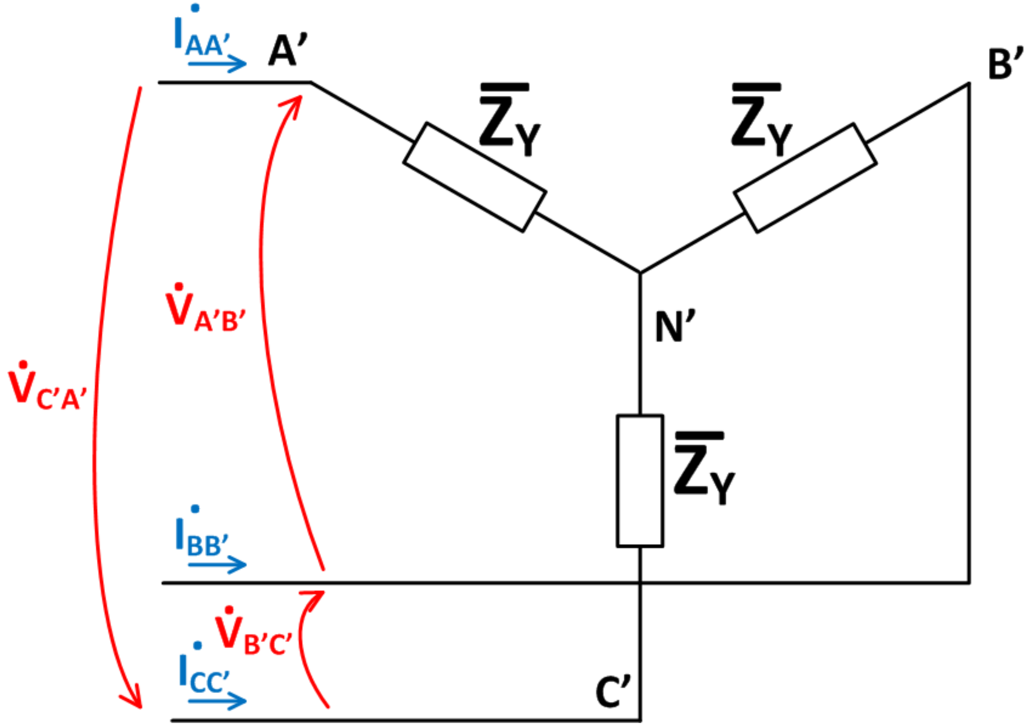


Sequência inversa:

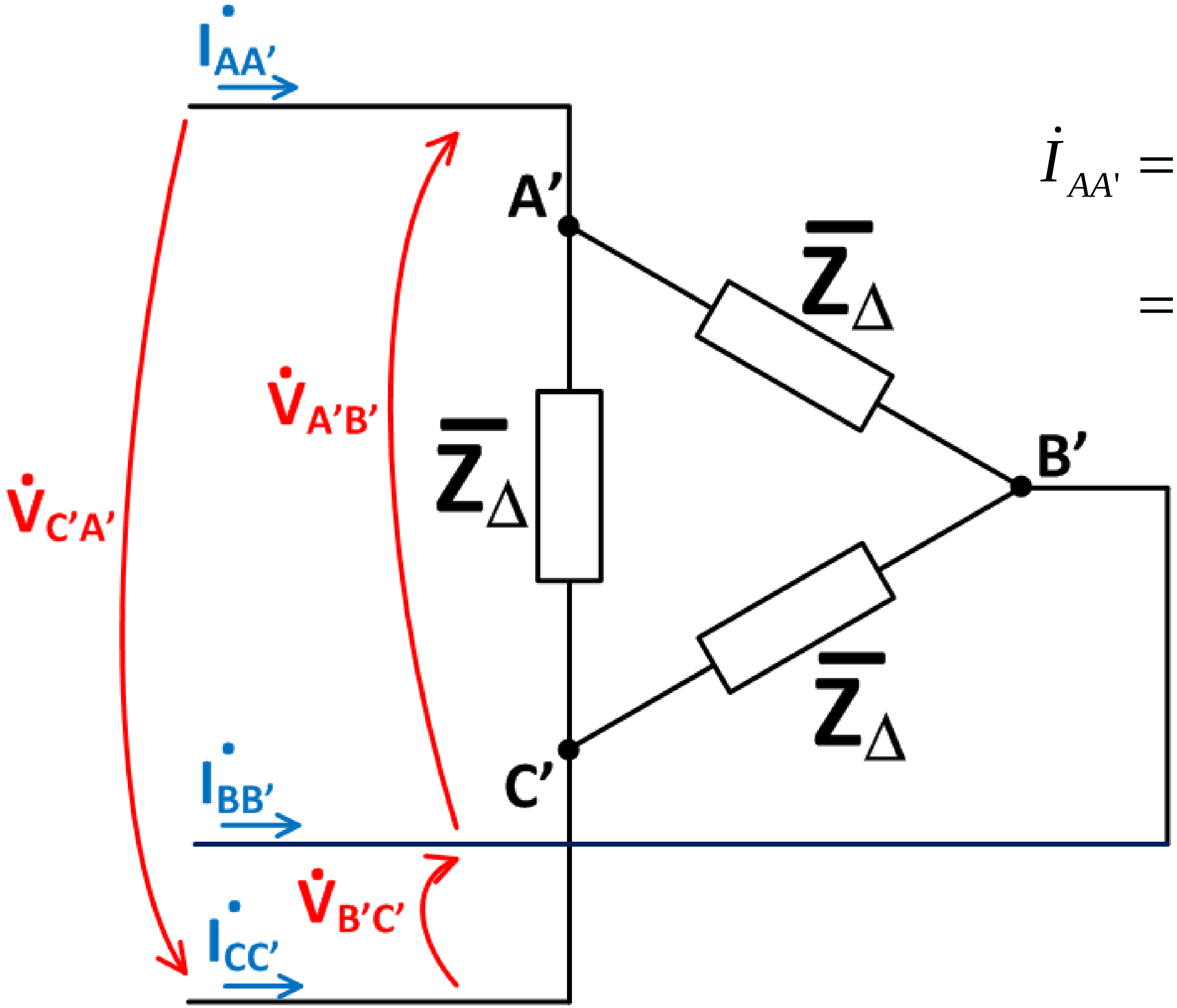
$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'}(\sqrt{3}\angle 30^\circ)$$

Conversão de impedâncias triângulo ↔ estrela





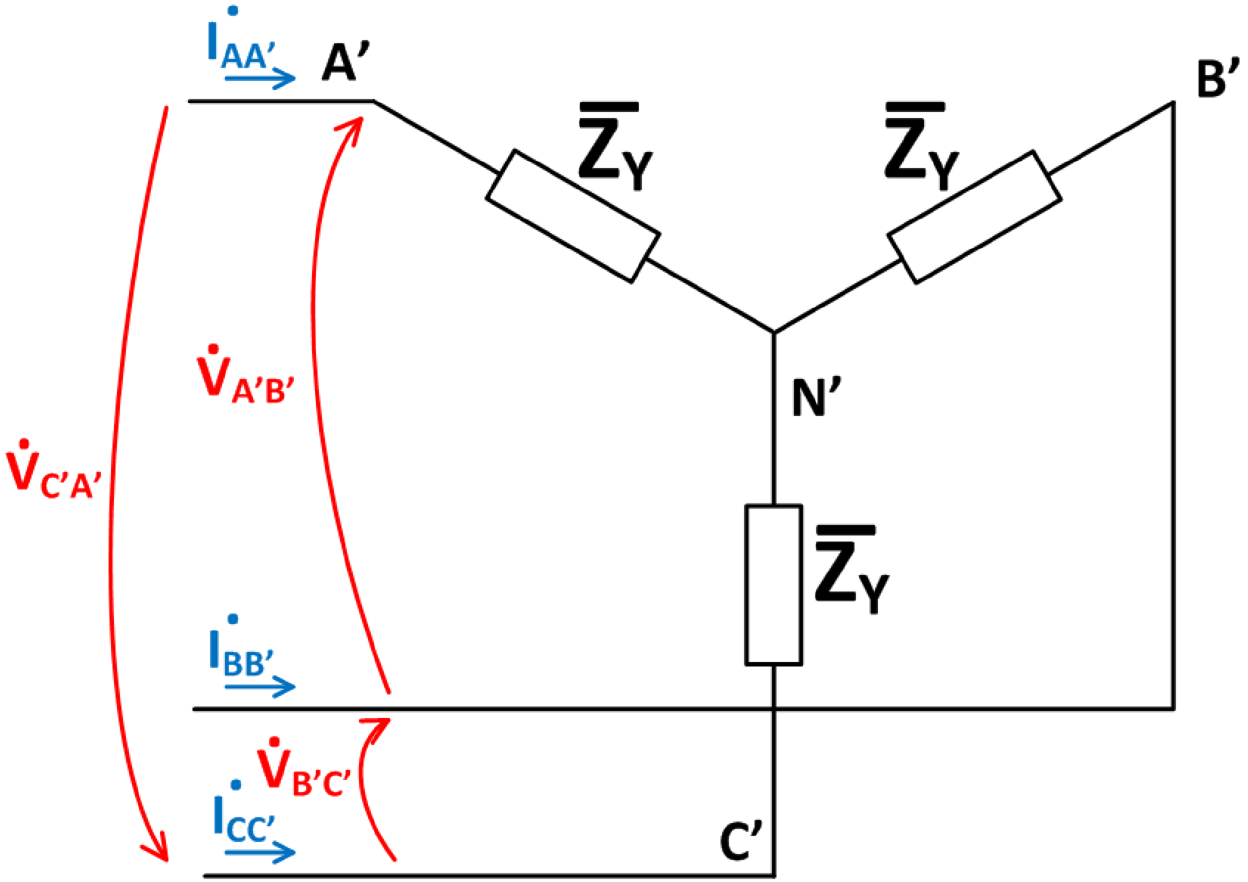
Conversão de impedâncias triângulo ↔ estrela (cont.)



$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'}(\sqrt{3}\angle -30°) =$$

$$= \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_\Delta}(\sqrt{3}\angle -30°)$$

Conversão de impedâncias triângulo ↔ estrela (cont.)

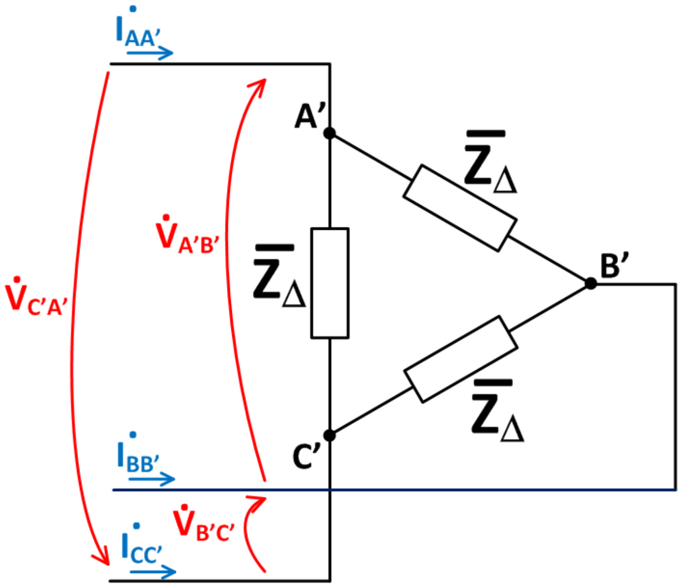


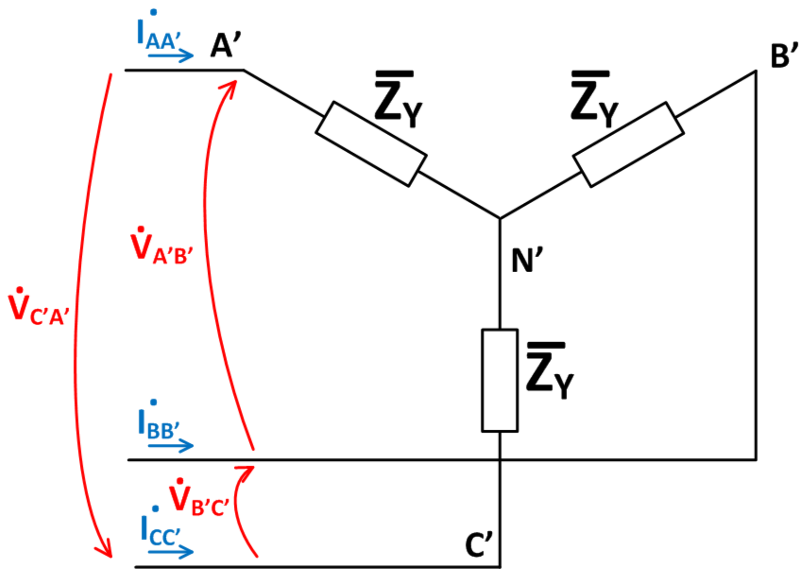
$$\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'N'} = \frac{\dot{V}_{A'N'}}{\overline{Z}_Y} =$$

$$= \frac{\dot{V}_{A'B'} \big/ (\sqrt{3}\angle 30°)}{\overline{Z}_Y} =$$

$$= \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_Y} \frac{1}{(\sqrt{3}\angle 30°)}$$

Conversão de impedâncias triângulo ↔ estrela (cont.)





$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_\Delta}(\sqrt{3}\angle -30^\circ)$$

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_Y}\frac{1}{(\sqrt{3}\angle 30^\circ)}$$

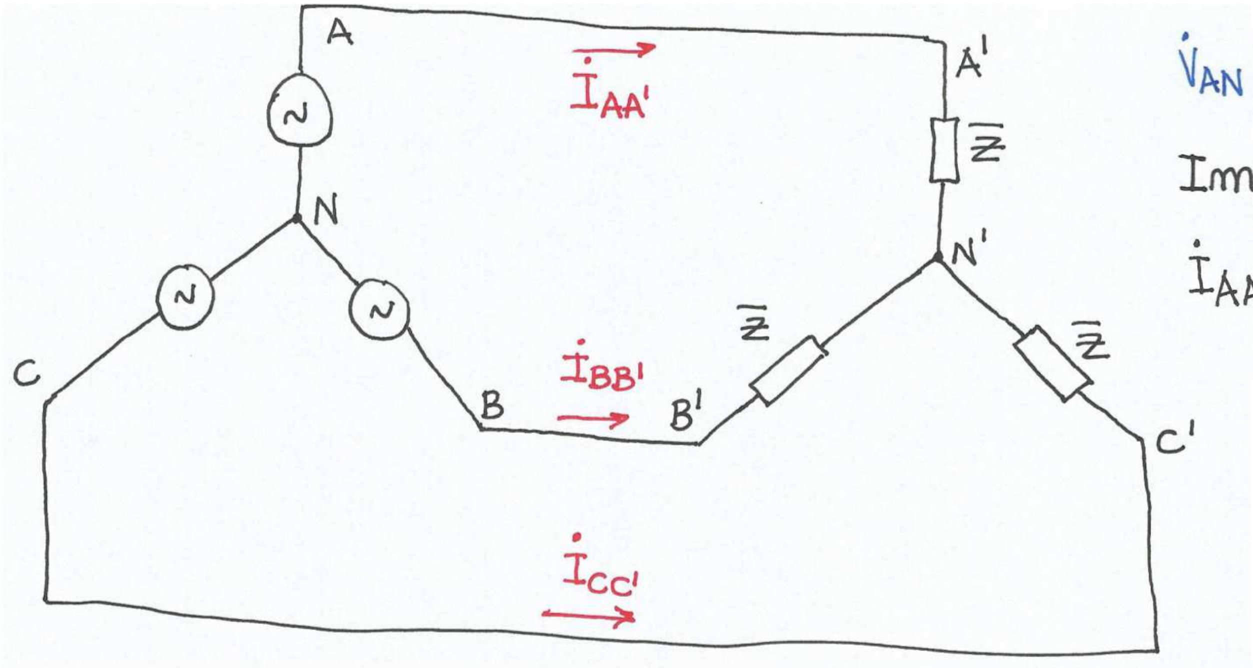
$$\frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_\Delta}(\sqrt{3}\angle -30^\circ) = \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\overline{Z}_Y}\frac{1}{(\sqrt{3}\angle 30^\circ)}$$

$$\frac{\overline{Z}_\Delta}{\overline{Z}_Y} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)(\sqrt{3}\angle 30^\circ) = 3$$

$$\boxed{\overline{Z}_Y = \frac{\overline{Z}_\Delta}{3}}$$

Exemplo 1: *Adaptado de Irwin, E11.4, p. 456*

Uma fonte trifásica com sequência de fase direta em uma configuração estrela em equilíbrio possui uma tensão de fase de 277 V rms e fornece potência a uma carga com conexão em estrela em equilíbrio. A impedância da carga por fase é de 60 – j 40 Ω. Determine as correntes de linha do circuito considerando que o ângulo de fase de V_{AN} é igual a 0º.



$\dot{V}_{AN} = (277\angle 0^\circ)\,V$

Impedância da linha = 0:

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}} = \frac{(277\angle 0^\circ)}{60-j40}$$

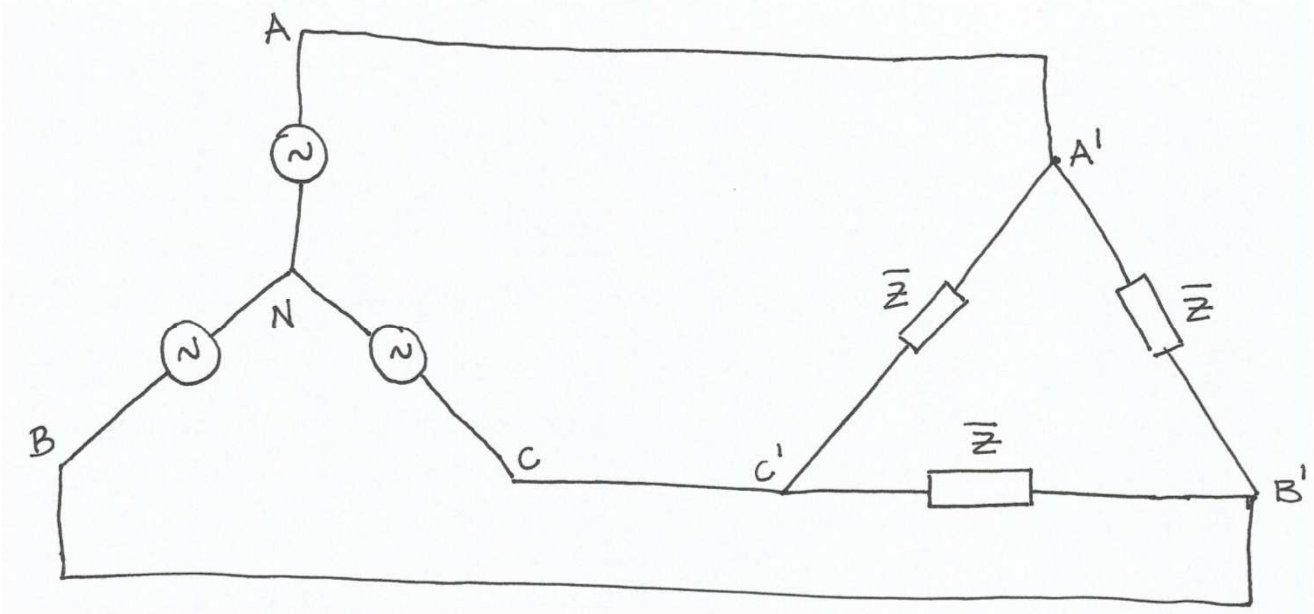
$\dot{I}_{AA'} = (3{,}84\angle 33{,}7^\circ)\,A$

$\dot{I}_{BB'} = (3{,}84\angle(33{,}7^\circ - 120^\circ)) = (3{,}84\angle -86{,}3^\circ)\,A$

$\dot{I}_{CC'} = (3{,}84\angle(33{,}7^\circ + 120^\circ)) = (3{,}84\angle 153{,}7^\circ)\,A$

Exemplo 2: *Adaptado de Irwin, exemplo 11.4, p. 459*

Uma carga em equilíbrio, conectada na configuração delta, contém um resistor de 10 Ω em série com um indutor de 20 mH em cada fase. A fonte de tensão é uma sequência *abc* trifásica de 60 Hz equilibrada em estrela com uma tensão $V_{AN} = 120 \angle 30^o$ V. Deseja-se determinar todas as correntes da configuração delta e as correntes de linha.



$\bar{Z} = 10 + 2\pi 60 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = (10 + j7{,}54)\,\Omega$

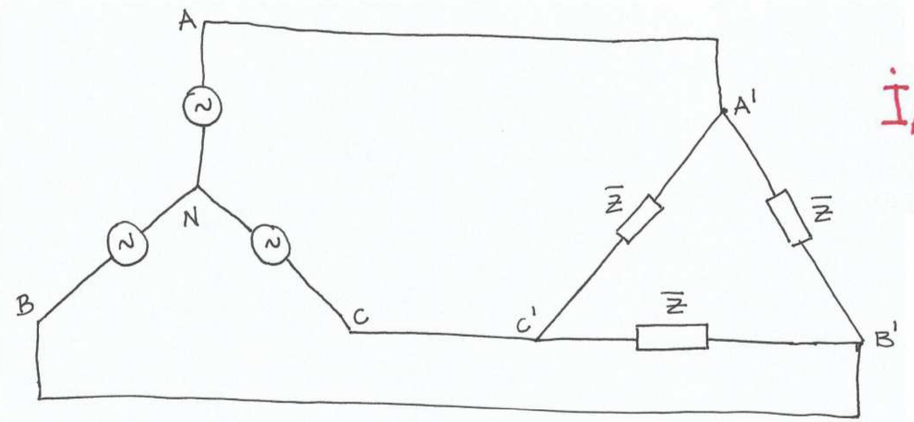
$\dot{I}_{A'B'}, \dot{I}_{B'C'}, \dot{I}_{C'A} = ?$

$\dot{I}_{AA'}, \dot{I}_{BB'}, \dot{I}_{CC'} = ?$

Solução geral:

- Conversão $\Delta \rightarrow Y$

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} = \frac{10 + j7{,}54}{3} = (3{,}33 + j2{,}51)\,\Omega$$



$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120\angle 30°}{3{,}33 + j2{,}51}$$

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{120\angle 30°}{4{,}17\angle 37{,}0°} = (28{,}74\angle -7{,}0°)\,A$$

• Retornando à carga Δ, $\dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B}(\sqrt{3}\angle -30°)$

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{I_{AA'}}{(\sqrt{3}\angle -30°)} = \frac{28{,}74\angle -7{,}0°}{\sqrt{3}\angle -30°} = (16{,}60\angle 23{,}0°)\,A$$

Solução particular

• Como não há impedância na linha, $\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{AB}$

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_\Delta} \qquad \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN}(\sqrt{3}\angle 30°) = (120\angle 30°)(\sqrt{3}\angle 30°) = (207{,}85\angle 60°)\,V$$

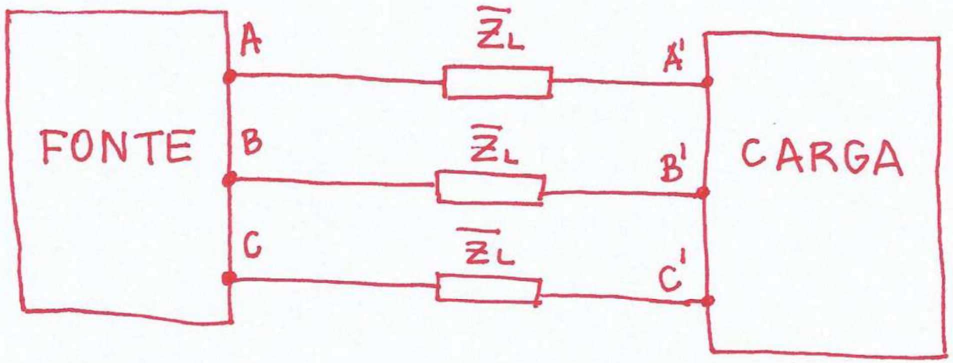
$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{207{,}85\angle 60°}{10 + j7{,}54} = \frac{207{,}85\angle 60°}{12{,}52\angle 37{,}0°} = (16{,}60\angle 23{,}0°)\,A$$

$$I_{AA'} = I_{A'B'}(\sqrt{3}\angle -30°) = (16{,}60\angle 23{,}0°)(\sqrt{3}\angle -30°) = (28{,}74\angle -7{,}0°)\,A$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{I}_{B'C'} &= (16{,}60\angle -97{,}0°)\,A\\ \dot{I}_{C'A'} &= (16{,}60\angle 143{,}0°)\,A\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\dot{I}_{BB'} &= (28{,}74\angle -127{,}0°)\,A\\ \dot{I}_{CC'} &= (28{,}74\angle 113{,}0°)\,A\end{aligned}}$$

Exemplo 3:

Em um determinado circuito trifásico, sabe-se que a tensão V_{AB} do gerador é de $220\angle 0^o$ V, que a impedância da linha entre fonte e carga é de $(0,1 + j\,0,5)\Omega$ e que a corrente na fase A nessa linha é $I_{AA'} = 20\angle -15^o$ A. Qual a tensão entre os terminais A' e B' na carga?



$\dot{V}_{AB} = (220\angle 0^\circ)\,V$

$\bar{Z}_L = (0,1 + j0,5)\,\Omega$

$\dot{V}_{A'B'} = ?$

$\dot{I}_{AA'} = (20\angle -15^\circ)\,A$

Não se conhecem as ligações da fonte ou da carga

$$\dot{V}_{AB} + \dot{I}_{BB'}\bar{Z} + \dot{V}_{B'A'} - \dot{I}_{AA'}\bar{Z} = 0$$

$$(220\angle 0^\circ) + (0,1+j0,5)(20\angle(-15^\circ-120^\circ)) - (0,1+j0,5)(20\angle -15^\circ) = -\dot{V}_{B'A'}$$

$$\dot{V}_{A'B'} = 220 + (0,1+j0,5)((20\angle -135^\circ) - (20\angle -15^\circ))$$

$$\boxed{\dot{V}_{A'B'} = (221,84\angle -4,6^\circ)\,V}$$

Potência em cargas trifásicas

Carga em estrela ou triângulo:

$$\overline{S_{3\phi}} = \overline{S_A} + \overline{S_B} + \overline{S_C}$$

Carga em estrela:

$$\overline{S_A} = \dot{V}_{A'N'} \dot{I}_{AA'}{}^* = (V_{A'N'}\angle\theta_1)(I_{AA'}\angle\theta_1 - \phi_1)^*$$
$$= (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\theta_1 - \theta_1 + \phi_1) = (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\phi_1)$$
$$\overline{S_B} = \dot{V}_{B'N'} \dot{I}_{BB'}{}^* = (V_{A'N'}\angle\theta_1 - 120°)(I_{AA'}\angle\theta_1 - 120° - \phi_1)^*$$
$$= (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\theta_1 - 120° - \theta_1 + 120° + \phi_1) = (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\phi_1)$$
$$\overline{S_C} = \dot{V}_{C'N'} \dot{I}_{CC'}{}^* = (V_{A'N'}\angle\theta_1 + 120°)(I_{AA'}\angle\theta_1 + 120° - \phi_1)^*$$
$$= (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\theta_1 + 120° - \theta_1 - 120° + \phi_1) = (V_{A'N'} I_{AA'}\angle\phi_1)$$

Potência em cargas trifásicas (cont.)

Carga em triângulo:

$$\overline{S_A} = \dot{V}_{A'B'}\dot{I}_{A'B}{}^* = \left(V_{A'B'}\angle\theta_2\right)\left(I_{A'B'}\angle\theta_2 - \phi_2\right)^*$$

$$= \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\theta_2 - \theta_2 + \phi_2\right) = \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\phi_2\right)$$

$$\overline{S_B} = \dot{V}_{B'C'}\dot{I}_{B'C'}{}^* = \left(V_{A'B'}\angle\theta_2 - 120°\right)\left(I_{A'B'}\angle\theta_2 - 120° - \phi_2\right)^*$$

$$= \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\theta_2 - 120° - \theta_2 + 120° + \phi_2\right) = \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\phi_2\right)$$

$$\overline{S_C} = \dot{V}_{C'A'}\dot{I}_{C'A'}{}^* = \left(V_{A'B'}\angle\theta_2 + 120°\right)\left(I_{A'B'}\angle\theta_2 + 120° - \phi_2\right)^*$$

$$= \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\theta_2 + 120° - \theta_2 - 120° + \phi_2\right) = \left(V_{A'B'}I_{A'B'}\angle\phi_2\right)$$

Potência em cargas trifásicas (cont.)

$$\overline{S_{3\phi}} = \overline{S_A} + \overline{S_B} + \overline{S_C} = 3V_F I_F \angle\phi$$

V_F, I_F : valores de fase

V_L, I_L : valores de linha

$$P_{3\phi} = \mathrm{Re}\left\{\overline{S_{3\phi}}\right\} = 3V_F I_F \cos\phi \qquad Q_{3\phi} = \mathrm{Im}\left\{\overline{S_{3\phi}}\right\} = 3V_F I_F \operatorname{sen}\phi$$

Ligação estrela ou triângulo, V_F, I_F, P, Q: valores reais

Ligação estrela	*Ligação triângulo*
$V_L = \sqrt{3}V_F$	$V_L = V_F$
$I_L = I_F$	$I_L = \sqrt{3}I_F$
$P_{3\phi} = 3\frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\phi = \sqrt{3}V_L I_L \cos\phi$	$P_{3\phi} = 3V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\phi = \sqrt{3}V_L I_L \cos\phi$
$Q_{3\phi} = 3\frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}V_L I_L \operatorname{sen}\phi$	$Q_{3\phi} = 3V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}V_L I_L \operatorname{sen}\phi$

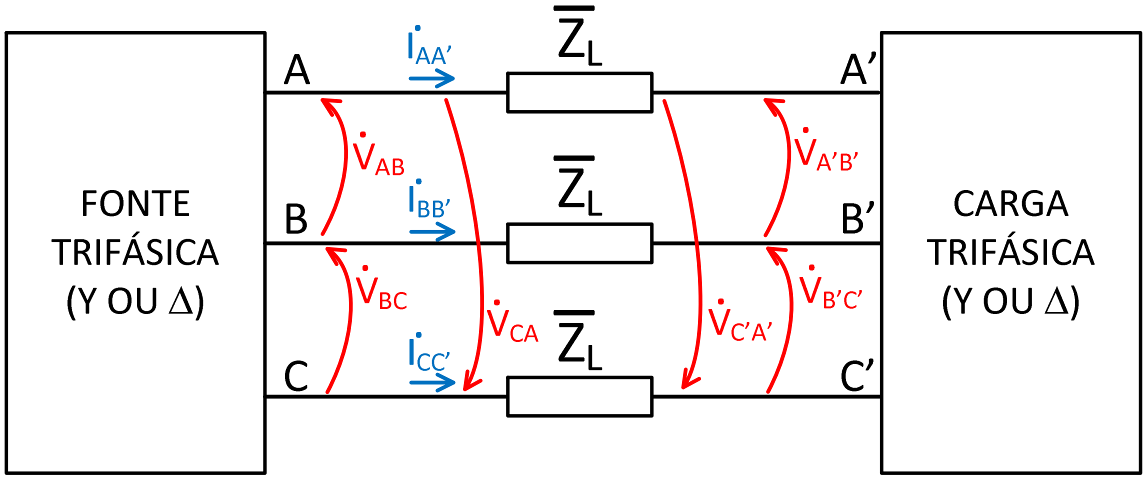
Notar que ϕ é a defasagem entre tensão e corrente <u>de fase</u>!

Potência de fontes trifásicas

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos\phi$$

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen}\phi$$

Perdas na linha



$$\text{Perdas na linha} = \text{Potência da fonte - Potência na carga}$$

ou

$$\text{Perdas na linha} = 3\left(\dot{V}_{AA'} \dot{I}_{AA'}{}^{*}\right) = 3\frac{I_L{}^2}{\overline{Z}_L{}^{*}}$$