

PESQUISA OPERACIONAL I

– MÉTODO SIMPLEX

MÉTODO SIMPLEX

4-2

1

Dado o problema:

$$\begin{aligned} \max f &= c^*x \\ \text{s/a} \quad A^*x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos dividir as variáveis em:

2

I = conjunto das variáveis **básicas**

J = conjunto das variáveis **não básicas**

Então:

$$\begin{aligned} \max f &= c_I^*x_I + c_J^*x_J \\ \text{s/a} \quad A_I^*x_I + A_J^*x_J &= b \\ x_I, x_J &\geq 0 \end{aligned}$$

3

Solução Básica:

$$x_I = (A_I)^{-1} * b \quad x_J = 0$$

Solução Básica Factível

$$x_I = (A_I)^{-1} * b \quad x_I \geq 0 \quad x_J = 0$$

6

Solução Degenerada:

Se algum $x_I = 0$

7

$$x_I = (A_I)^{-1} * b - (A_I)^{-1} * A_J * x_J$$

$$\text{Se } x_J = 0 \text{ então } x_I = (A_I)^{-1} * b$$

4

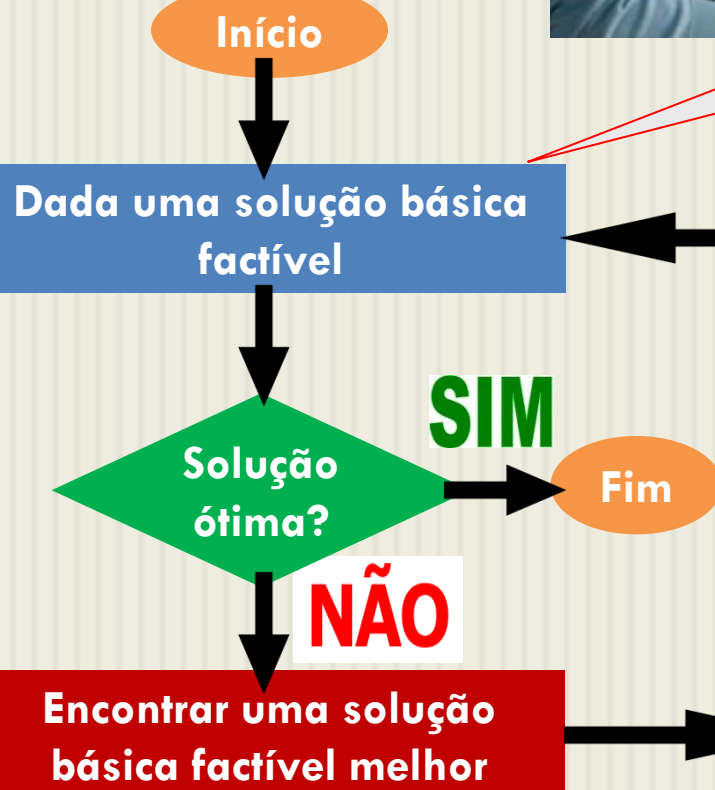
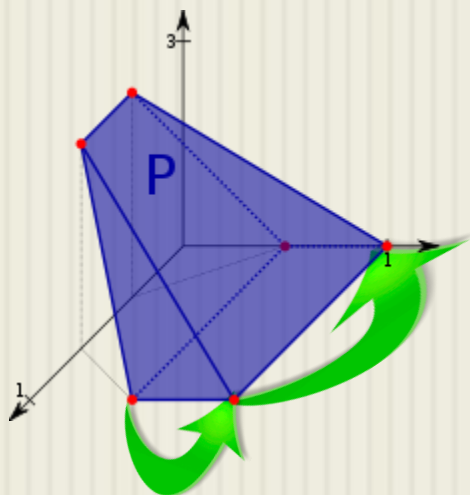


MÉTODO SIMPLEX

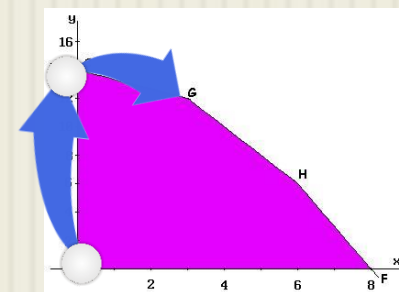
4-3



De vértice em vértice até a solução ótima



Iteração



Capítulo 4





Problema dos Sapatos e Botinas

1



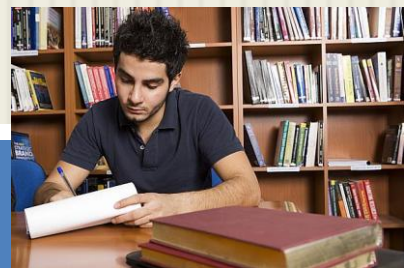
4-4

Uma indústria quer planejar a sua produção. Os produtos que essa indústria fabrica, os recursos necessários e o lucro unitário são fornecidos abaixo. **Qual o plano de produção ótimo?**

matéria prima	produto 1 : sapato	produto 2 : botina	disponibilidade
couro	2	1	8
borracha	1	2	7
cola	0	1	3
lucro unitário	1	1	



Capítulo 4



Resolução Gráfica

Simplex

Sapatos e Botinas

4-5

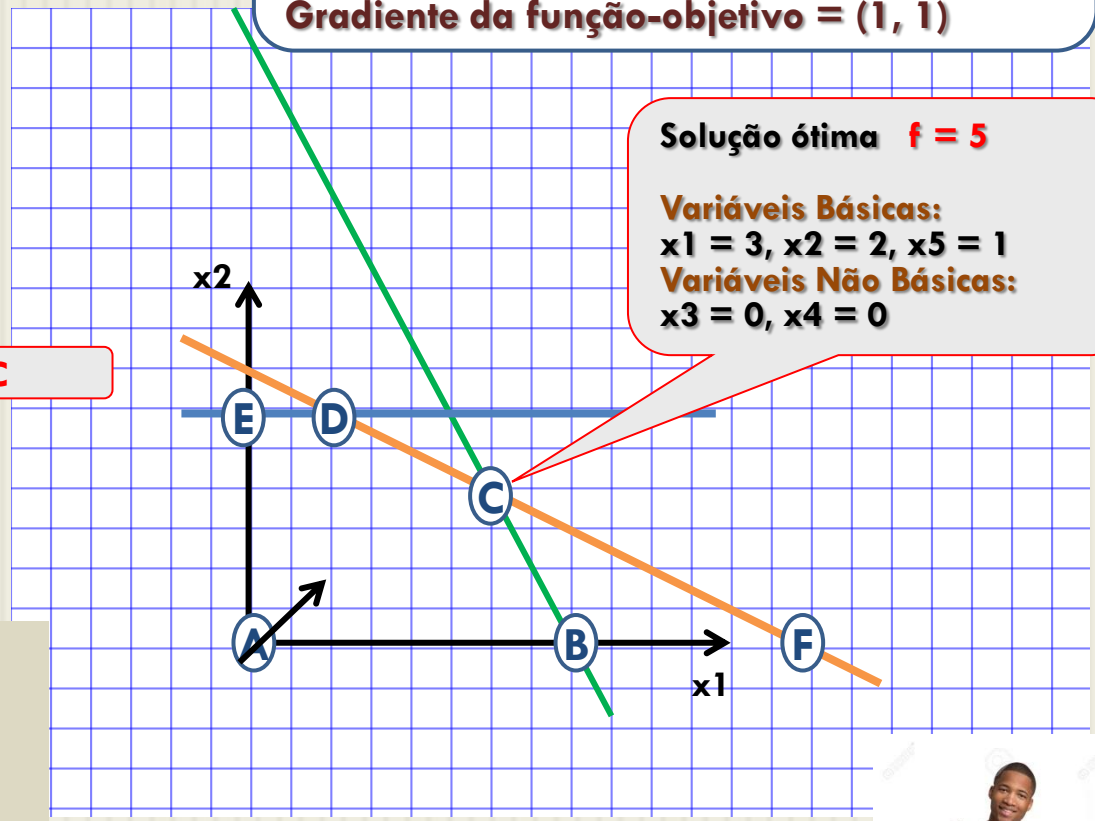
max $f = x_1 + x_2$
s/a $2x_1 + x_2 \leq 8$
 $x_1 + 2x_2 \leq 7$
 $x_2 \leq 3$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Solução
 $x_1 = 3, x_2 = 2, f = 5$

Ponto C

Solução Única
Região Factível = Polígono ABCDE
Soluções Básicas Factíveis = A, B, C, D, E
Gradiente da função-objetivo = (1, 1)

Solução ótima $f = 5$
Variáveis Básicas:
 $x_1 = 3, x_2 = 2, x_5 = 1$
Variáveis Não Básicas:
 $x_3 = 0, x_4 = 0$



E se $f = x_1 + 2x_2$?
Solução Múltipla $f = 7$
Aresta CD $f = 7$



Capítulo 4

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 & & + & x_4 & = & 7 \\ & & & & & x_2 & + & x_5 & = & 3 \end{array}$$

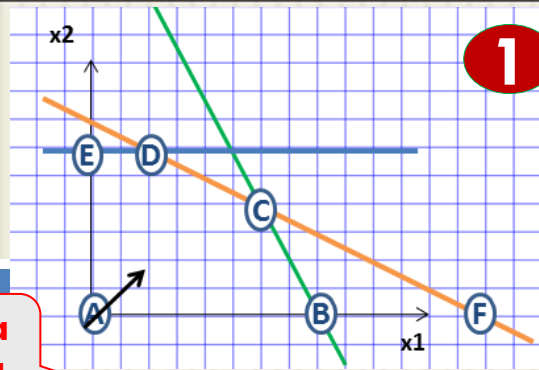




Pontos Extremos

ANÁLISE

Simplex



4-6

Solução Básica Factível Ótima

Ponto A

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_1 = 0$	$x_3 = 8$
$x_2 = 0$	$x_4 = 7$
	$x_5 = 3$

$f = 0$

Ponto B

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_2 = 0$	$x_1 = 4$
$x_3 = 0$	$x_4 = 3$
	$x_5 = 3$

$f = 4$

Ponto C

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_3 = 0$	$x_1 = 3$
$x_4 = 0$	$x_2 = 2$
	$x_5 = 1$

$f = 5$

Ponto D

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_4 = 0$	$x_1 = 1$
$x_5 = 0$	$x_2 = 3$
	$x_3 = 3$

$f = 4$

Ponto E

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_1 = 0$	$x_2 = 3$
$x_5 = 0$	$x_3 = 5$
	$x_4 = 1$

$f = 3$

Ponto F

Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas
$x_2 = 0$	$x_1 = 7$
$x_4 = 0$	$x_3 = -6$
	$x_5 = 3$

$f = 7$

Solução Básica infactível

Capítulo 4

$$\begin{aligned}
 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\
 x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 &= 7 \\
 x_2 + x_5 &= 3
 \end{aligned}$$



Simplex

Sapatos e Botinas

$$\begin{aligned}
 \max f &= x_1 + x_2 && \text{1} \\
 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\
 x_1 + 2x_2 + x_4 &= 7 \\
 x_2 + x_5 &= 3
 \end{aligned}$$

4-7



1ª Iteração

Base 1 = {3, 4, 5}

Solução: $x_1 = 0$ $x_3 = 8$ $f = 0$
 $x_2 = 0$ $x_4 = 7$
 $x_5 = 3$

Candidatas a entrar na base = x_1, x_2

Escolhida: x_2 (então $x_1 = 0$)

Até que valor x_2 pode crescer?

$$\begin{cases}
 x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \geq 0 & x_2 \leq 8 \\
 x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \geq 0 & x_2 \leq 3.5 \\
 x_5 = 3 - x_2 \geq 0 & x_2 \leq 3 \leftarrow
 \end{cases}$$

Então: $x_2 \leq 3$ (linha de bloqueio)

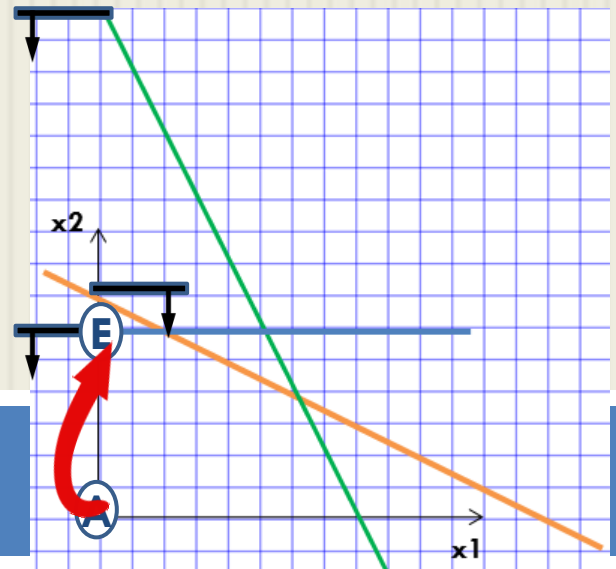
Pivô

Conclusão: x_2 entra na base
 x_5 sai da base

	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	1	0	0	0	f
x3	2	1	1	0	0	8
x4	1	2	0	1	0	7
x5	0	1	0	0	1	3
	1	0	0	0	-1	f-3
x3	2	0	1	0	-1	5
x4	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3



Capítulo 4



Simplex

Sapatos e Botinas

$$\begin{array}{rcl}
 \max f-3 = x1 & & -x5 \\
 2*x1 & + x3 & -x5 = 5 \\
 x1 & + x4 & -2x5 = 1 \\
 & x2 & + x5 = 3
 \end{array}$$

1

4-8



2ª Iteração

Base 2 = {3, 4, 2}

Solução: $x1 = 0$ $x2 = 3$ $f = 3$
 $x5 = 0$ $x3 = 5$
 $x4 = 1$

Candidatas a entrar na base = $x1, x5$

Escolhida: $x1$ (então $x5 = 0$)

Até que valor $x1$ pode crescer?

$$\begin{cases}
 x3 = 5 - 2*x1 + x5 \geq 0 & x1 \leq 2.5 \\
 x4 = 1 - x1 + 2*x5 \geq 0 & x1 \leq 1 \leftarrow \\
 x2 = 3 - x5 \geq 0 & x2 = 3
 \end{cases}$$

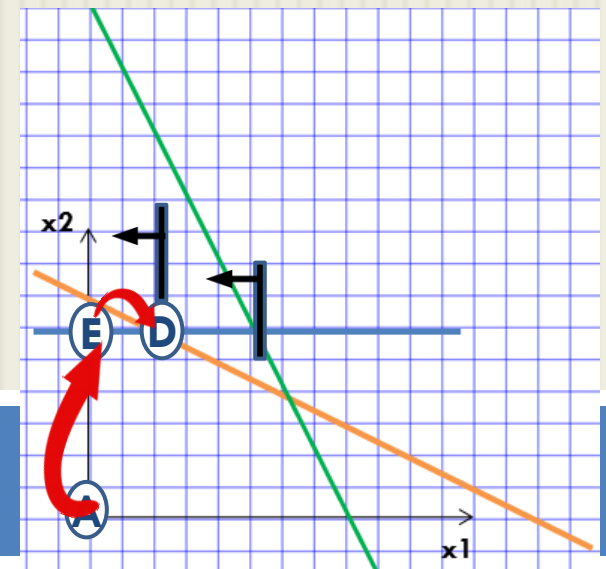
Então: $x1 \leq 1$ (linha de bloqueio)

Pivô

Conclusão:

$x1$ entra na base
 $x4$ sai da base

	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	0	0	0	-1	f-3
x3	2	0	1	0	-1	5
x4	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3
	0	0	0	-1	1	f-4
x3	0	0	1	-2	3	3
x1	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3



Capítulo 4

Simplex

Sapatos e Botinas

$$\begin{array}{rcl}
 \max f-4 = & -x_4 & +x_5 & 1 \\
 & +x_3 - 2x_4 & +3x_5 & = 3 \\
 x_1 & +x_4 & -2x_5 & = 1 \\
 x_2 & & +x_5 & = 3
 \end{array}$$

4-9



3ª Iteração

Base 3 = {3, 1, 2}

Solução: $x_4 = 0$ $x_1 = 1$ $f = 4$
 $x_5 = 0$ $x_2 = 3$
 $x_3 = 3$

Candidatas a entrar na base = x_5

Escolhida: x_5 (então $x_4 = 0$)

Até que valor x_5 pode crescer?

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_3 = 3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 0 \quad x_5 \leq 1 \\
 x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \geq 0 \quad x_5 \geq -0.5 \\
 x_2 = 3 - x_5 \geq 0 \quad x_5 \leq 3
 \end{array} \right.$$

Então: $x_5 \leq 1$ (linha de bloqueio)

Pivô

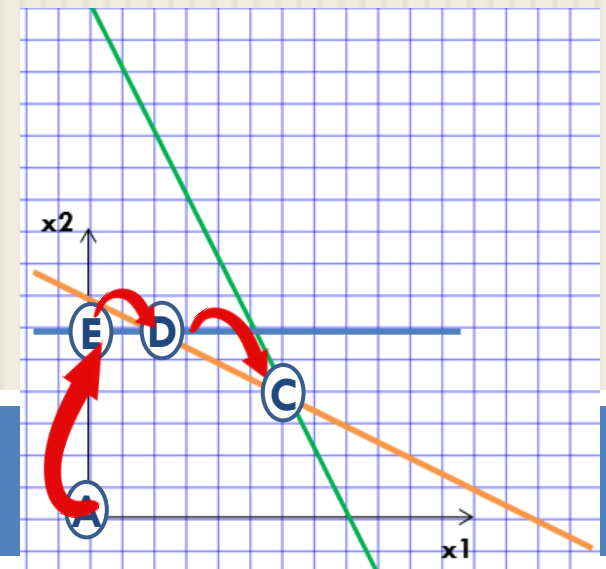
Conclusão: x_5 entra na base
 x_3 sai da base

	x1	x2	x3	x4	x5	
	0	0	0	-1	1	f-4
x3	0	0	1	-2	3	3
x1	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3
	0	0	-1/3	-1/3	0	f-5
x5	0	0	1/3	-2/3	1	1
x1	1	0	2/3	-1/3	0	3
x2	0	1	-1/3	2/3	0	2



Todos $c \leq 0$
 Solução ótima

Capítulo 4



Simplex

Sapatos e Botinas

Base

1

4-10

Pivô

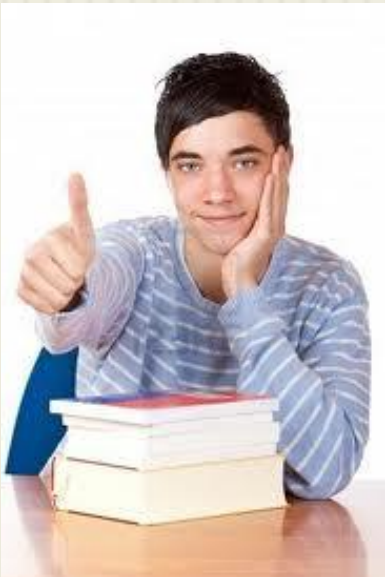
Entrou x2 Saiu x5

Entrou x1 Saiu x4

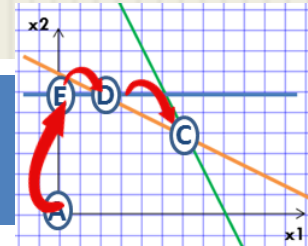
Entrou x5 Saiu x3

Todos $c \leq 0$
Solução ótima

	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	1	0	0	0	f
x3	2	1	1	0	0	8
x4	1	2	0	1	0	7
x5	0	1	0	0	1	3
	1	0	0	0	-1	f-3
x3	2	0	1	0	-1	5
x4	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3
	0	0	0	-1	1	f-4
x3	0	0	1	-2	3	3
x1	1	0	0	1	-2	1
x2	0	1	0	0	1	3
	0	0	-1/3	-1/3	0	f-5
x5	0	0	1/3	-2/3	1	1
x1	1	0	2/3	-1/3	0	3
x2	0	1	-1/3	2/3	0	2



Capítulo 4



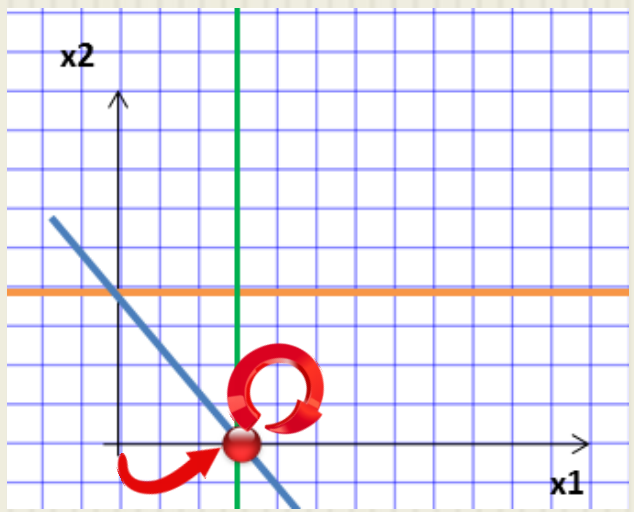
SIMPLEX

SOLUÇÃO

DEGENERADA

4-11

max $f = 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$
s/a $x_1 \leq 3$
 $x_2 \leq 4$
 $4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 12$
 $x_1, x_2 \geq 0$



	x1	x2	x3	x4	x5	
	5	2	0	0	0	f
x3	1	0	1	0	0	3
x4	0	1	0	1	0	4
x5	4	3	0	0	1	12
	0	2	-5	0	0	f-15
x1	1	0	1	0	0	3
x4	0	1	0	1	0	4
x5	0	3	-4	0	1	0
	0	0	-7/3	0	-2/3	f-15
x1	1	0	1	0	0	3
x4	0	0	4/3	1	-1/3	4
x2	0	1	-4/3	0	1/3	0

Variável na BASE com valor 0



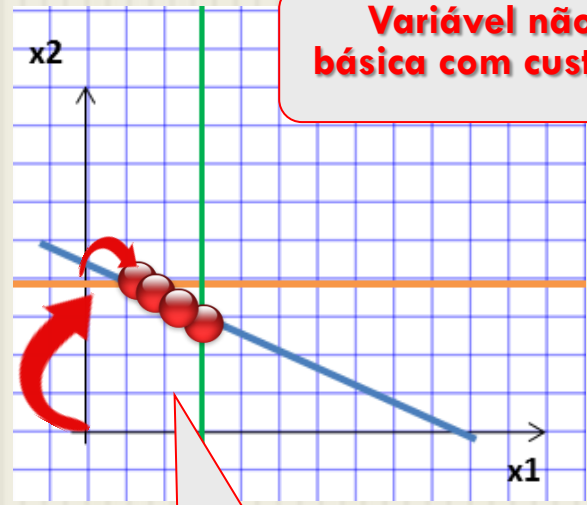
SIMPLEX

SOLUÇÃO MÚLTIPLA

4-12

max $f = x_1 + 2 \cdot x_2$
s/a $x_1 \leq 3$
 $x_2 \leq 4$
 $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 9$
 $x_1, x_2 \geq 0$

	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	2	0	0	0	f
x3	1	0	1	0	0	3
x4	0	1	0	1	0	4
x5	1	2	0	0	1	9
	1	0	0	-2	0	f-8
x3	1	0	1	0	0	3
x2	0	1	0	1	0	4
x5	1	0	0	-2	1	1
	0	0	0	0	-1	f-9
x3	0	0	1	2	-1	2
x2	0	1	0	1	0	4
x1	1	0	0	-2	1	1
	0	0	0	0	-1	f-9
x4	0	0	1/2	1	-1/2	1
x2	0	1	-1/2	0	1/2	3
x1	1	0	1	0	0	3



Variável não básica com custo 0

Toda a aresta é solução ótima



SIMPLEX

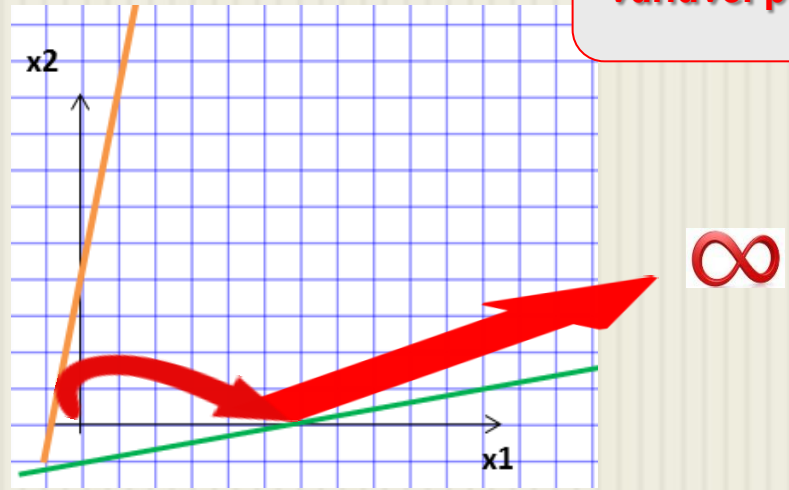
SOLUÇÃO ILIMITADA

4-13

max $f = 3x_1 + x_2$
s/a $x_1 - 6x_2 \leq 6$
 $-4x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

	x1	x2	x3	x4	
	3	1	0	0	f
x3	1	-6	1	0	6
x4	-4	1	0	1	4
	0	19	-3	0	f-18
x1	1	-6	1	0	6
x4	0	-23	4	1	28

Tem variável para entrar na BASE, mas não tem variável para sair da BASE



SIMPLEX

SOLUÇÃO

INFACTÍVEL

4-14

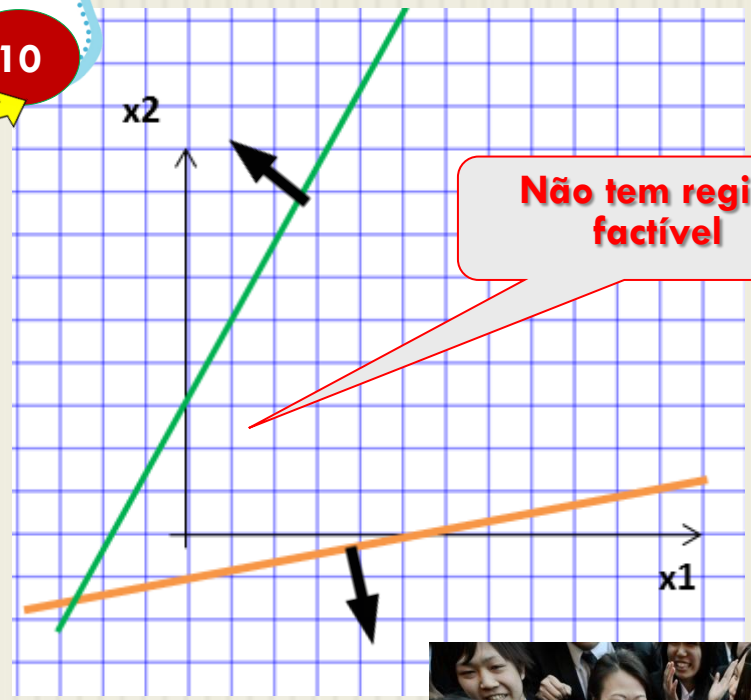
	x1	x2	x3	x4	
	1	1	0	0	f
x3	-3	2	-1	0	6
x4	1	-5	0	-1	5

max $f = x1 + x2$
s/a $-3*x1 + 2*x2 \geq 6$
 $x1 - 5*x2 \geq 5$
 $x1, x2 \geq 0$

ver exercício resolvido adiante

Não há Base inicial factível para iniciar o SIMPLEX

MÉTODO SIMPLEX
FASE 1 – FASE 2
 identifica
PROBLEMA INFACTÍVEL



Não tem região factível



MÉTODO SIMPLEX



FASE 1 – FASE 2

4-15

Exemplo
Fase 1 – Fase 2

Forma Padrão

$$\begin{array}{ll}
 \max & f = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s/a} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$



$$\begin{array}{llll}
 \max & f = -x_1 + 2x_2 & & \\
 \text{s/a} & x_1 + x_2 - x_3 & & = 2 \\
 & -x_1 + x_2 & - x_4 & = 1 \\
 & x_2 & & + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
 \end{array}$$



Variáveis artificiais

$$\begin{array}{llll}
 \max & f = -x_1 + 2x_2 & & \\
 \text{s/a} & x_1 + x_2 - x_3 & & \\
 & -x_1 + x_2 & - x_4 & \\
 & x_2 & & + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 & &
 \end{array}$$

$+ x_6 = 2$
 $+ x_7 = 1$

Se $\phi = 0$ Problema Factível
 Se $\phi > 0$ Problema Infactível

Eliminar x_6, x_7



Se $\phi = 0$

Capítulo 4 Fase 1
 $\min \phi = x_6 + x_7$

Fase 2
 $\max f = -x_1 + 2x_2$



MÉTODO SIMPLEX

FASE 1

4-16

Arrumar a BASE

$\min \phi = x_6 + x_7$
 s/a $x_1 + x_2 \geq 2$
 $-x_1 + x_2 \geq 1$
 $x_2 \leq 3$
 $x_1, x_2 \geq 0$



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	
	0	0	0	0	0	1	1	ϕ
	1	1	-1	0	0	1	0	2
	-1	1	0	-1	0	0	1	1
	0	1	0	0	1	0	0	3
	0	-2	1	1	0	0	0	$\phi-3$
x6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x5	0	1	0	0	1	0	0	3
	-2	0	1	-1	0	0	2	$\phi-1$
x6	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x5	1	0	0	1	1	0	-1	2
	0	0	0	0	0	1	1	ϕ
x1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2
x2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2
x5	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2

Base Factível



MÉTODO SIMPLEX

FASE 2

4-17

Arrumar a BASE

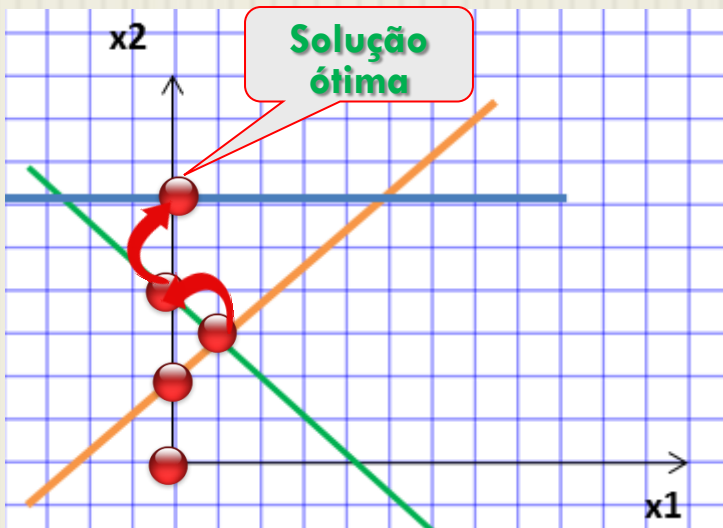
$$\max f = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s/a } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



	x1	x2	x3	x4	x5	6
	-1	2	0	0	0	f
	1	0	-1/2	1/2	0	1/2
	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
	0	0	1/2	1/2	1	3/2
	0	2	-1/2	1/2	0	f+1/2
	1	0	-1/2	1/2	0	1/2
	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
	0	0	1/2	1/2	1	3/2
	0	0	1/2	3/2	0	f-5/2
x1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2
x2	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2
x5	0	0	1/2	1/2	1	3/2
	-3	0	2	0	0	f-4
x4	2	0	-1	1	0	1
x2	1	1	-1	0	0	2
x5	-1	0	1	0	1	1
	-1	0	0	0	-2	f-6
x4	1	0	0	1	1	2
x2	0	1	0	0	1	3
x3	-1	0	1	0	1	1



Exercício 1

Método Simplex

4-18

$$\max f = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s/a } -6x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 13$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	x1	x2	x3	x4	x5	
	2	3	0	0	0	f
x3	-6	1	1	0	0	3
x4	-2	1	0	1	0	13
x5	2	-3	0	0	1	13
	0	6	0	0	-1	f - 13
x3	0	-8	1	0	3	42
x4	0	-2	0	1	1	26
x1	1	-3/2	0	0	1/2	13/2

7

Solução ilimitada



Exercício 2

Método Simplex

4-19

max $f = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$
s/a $-6 \cdot x_1 + x_2 \leq 3$
 $-2 \cdot x_1 + x_2 \leq 13$
 $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 74$
 $x_1, x_2 \geq 0$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
	2	3	0	0	0	0	f
x3	-6	1	1	0	0	0	3
x4	-2	1	0	1	0	0	13
x5	2	-3	0	0	1	0	13
x6	1	3	0	0	0	1	74
	0	6	0	0	-1	0	f-13
x3	0	-8	1	0	3	0	42
x4	0	-2	0	1	1	0	26
x1	1	-3/2	0	0	1/2	0	13/2
x6	0	9/2	0	0	-1/2	1	135/2
	0	0	0	0	-1/3	-4/3	f-103
x3	0	0	1	0	19/9	16/9	162
x4	0	0	0	1	7/9	4/9	56
x1	1	0	0	0	1/3	1/3	29
x2	0	1	0	0	-1/9	2/9	15

Solução única



Exercício 3

Método Simplex

4-20

Arrumar a BASE

min

$$f = 9x_1 + 6x_2 + 12x_3$$

s/a

$$x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\geq 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3$$

$$\geq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 +$$

$$2x_3 \geq 6$$

$$x_i \geq 0$$

Fase 1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	∅
1	2	1	-1	0	0	0	1	0	0	4
2	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	5
2	3	2	0	0	-1	0	0	0	1	6
	-5	-6	-4	1	1	1	0	0	0	∅-15
x7	1	2	1	-1	0	0	1	0	0	4
x8	2	1	1	0	-1	0	0	1	0	5
x9	2	3	2	0	0	-1	0	0	1	6
	-2	0	-1	-2	1	1	3	0	0	∅-3
x2	1/2	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	0	0	2
x8	3/2	0	1/2	1/2	-1	0	-1/2	1	0	3
x9	1/2	0	1/2	3/2	0	-1	-3/2	0	1	0
	0	0	1	4	1	-3	-3	0	4	∅-3
x2	0	1	0	-2	0	1	2	0	-1	2
x8	0	0	-1	-4	-1	3	4	1	-3	3
x1	1	0	1	3	0	-2	-3	0	2	0
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	∅-0
x2	0	1	1/3	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	0	1
x6	0	0	-1/3	-4/3	-1/3	1	4/3	1/3	0	1
x1	1	0	1/3	1/3	-2/3	0	-1/3	2/3	1	2

9



Exercício 3

Método Simplex

4-21

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	∅-0
x3	0	3	1	-2	1	0	2	-1	0	3
x6	0	1	0	-2	0	1	2	0	-1	2
x1	1	-1	0	1	-1	0	-1	1	0	1

Iteração extra

Fase 2

Arrumar a BASE

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
	9	6	12	0	0	0	f
	0	3	1	-2	1	0	3
	0	1	0	-2	0	1	2
	1	-1	0	1	-1	0	1
	0	-21	0	15	-3	0	f-45
x3	0	3	1	-2	1	0	3
x6	0	1	0	-2	0	1	2
x1	1	-1	0	1	-1	0	1
	0	0	7	1	4	0	f-24
x2	0	1	1/3	-2/3	1/3	0	1
x6	0	0	-1/3	-4/3	-1/3	1	1
x1	1	0	1/3	1/3	-2/3	0	2



Solução Única

Exercício 4

Método Simplex

4-22



5 → 10

Mostrar que o problema abaixo é infactível.

max $f = x_1 + x_2$

s/a $-3x_1 + 2x_2 \geq 6$

$x_1 - 5x_2 \geq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Arrumar a BASE

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
	0	0	0	0	1	1	ϕ
	-3	2	-1	0	1	0	6
	1	-5	0	-1	0	1	5
	2	3	1	1	0	0	$\phi-11$
x5	-3	2	-1	0	1	0	6
x6	1	-5	0	-1	0	1	5

Solução ótima
 $\phi = 11$

Não é possível eliminar as variáveis artificiais x5 e x6



Problema infactível



Fase 1

Capítulo 4



Exercício 5

Método Simplex

4-23

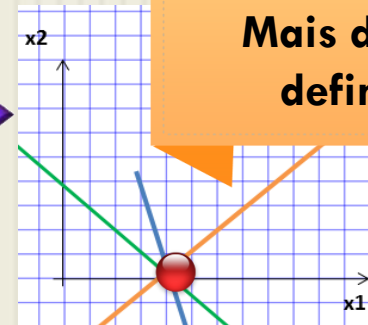
a) É possível encontrar uma solução ilimitada na Fase 1 do Método Simplex? Explicar.

b) Explicar graficamente a existência de uma solução degenerada.

c) Indicar as condições para que uma solução factível não básica seja ótima.



$\min f = x_5 + x_6 + \dots$ onde $x_5, x_6, \dots \geq 0$
jamais levará a $\phi = -\infty$



Mais de 2 retas para definir um ponto

