ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3238 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE 2ª PROVA 21/05/2018

Duração: 120 minutos

1ª Questão (3,0 pontos)

Na indústria farmacêutica, um parâmetro importante quando se lança uma nova droga na forma de comprimido no mercado é a capacidade de dissolução da mesma no fluido circundante. A dissolução pode ser modelada como um processo de transferência de massa governado pela equação $N_A = k(C_{A,2} - C_{A,1})$, onde N_A é o fluxo molar da droga, em mol/(m$^2\cdot$s), $C_{A,2}$ e $C_{A,1}$ são as concentrações molares em cada lado da interface considerada e k o coeficiente de transferência de massa. Este último é função do comprimento característico do comprimido, l, da velocidade do escoamento de fluido ao redor do comprimido, V, do coeficiente de difusão binária da droga no fluido, D_{AB}, e da viscosidade cinemática do fluido, ν. Para aprovação da droga pela Vigilância Sanitária, é preciso fornecer o valor de k a partir de testes experimentais em laboratório.

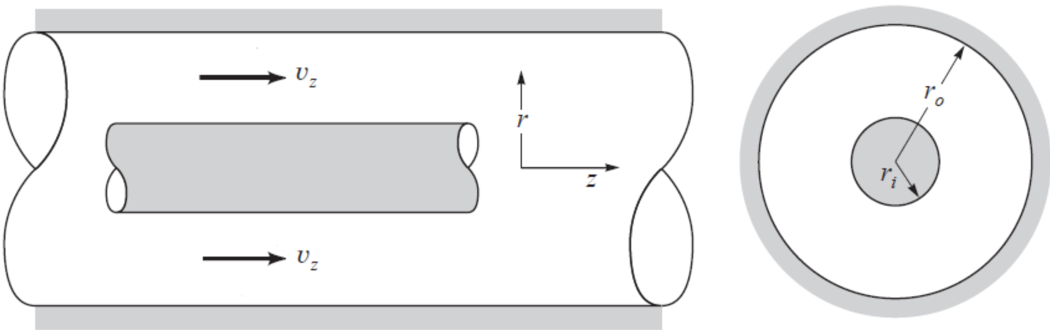
(a) Obtenha uma relação funcional adimensional entre o coeficiente de transferência de massa k e os outros parâmetros importantes do fenômeno. (***1,5 ponto***)

(b) Para o ensaio laboratorial, será usado um comprimido cinco vezes maior do que o produto de mercado submetido a um escoamento de água a 37 °C, que tem aproximadamente os mesmos valores de D_{AB} e ν do fluido biológico na situação clínica. Sabendo que a velocidade de escoamento ao redor do comprimido no sistema biológico é da ordem de 5 mm/s, determine qual deve ser a velocidade do escoamento no teste experimental. Nessa condição, qual será a relação de escala entre o k do experimento e do sistema biológico? (***1,0 ponto***)

(c) Avalie a possibilidade de se utilizar água a uma temperatura diferente no teste experimental. (***0,5 ponto***)

2ª Questão (3,5 pontos)

Considere o escoamento laminar, axissimétrico, horizontal, em regime permanente e plenamente desenvolvido no espaço anular entre dois cilindros de raio r_i e r_o, conforme ilustrado na figura.



(a) Obtenha uma expressão **literal** do perfil de velocidades em função de r_i, r_o, $\partial p/\partial z$ e da viscosidade dinâmica do fluido μ. Parta das equações de continuidade e Navier–Stokes fornecidas no formulário e enuncie claramente as hipóteses utilizadas para simplificá-las. (***2,0 pontos***)

(b) A partir do perfil encontrado no item (a), mostre que a vazão volumétrica deste escoamento é dada por

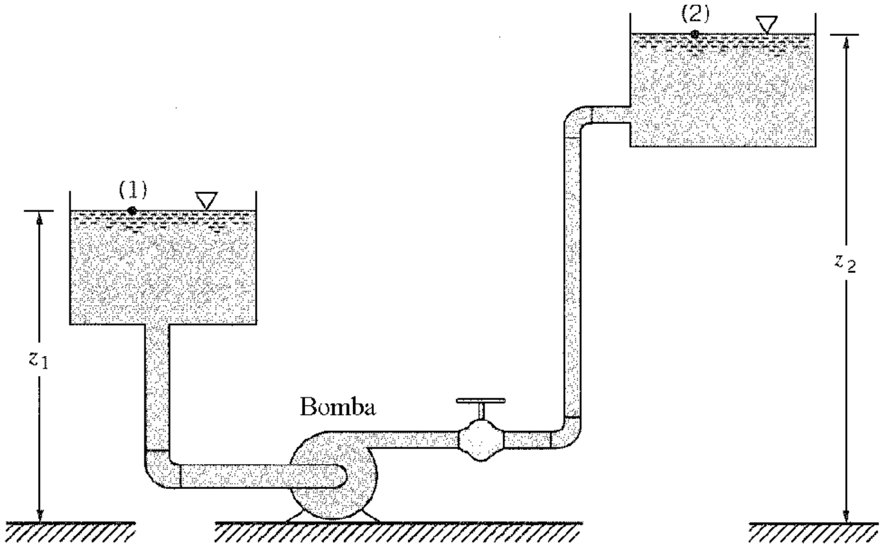
$$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(r_o^2 - r_i^2\right)\left[r_o^2 + r_i^2 - \frac{\left(r_o^2 - r_i^2\right)}{\ln\left(r_o / r_i\right)}\right].$$ (***1,5 ponto***)

3ª Questão (3,5 pontos)

Você estagia numa empresa que está projetando o sistema de recalque ilustrado na figura. Ele tem como objetivo transportar água (ρ = 998 kg/m^3, ν = 10^{-6} m^2/s) do reservatório (1), cujo nível está a uma altura z_1 = 3 m com relação à superfície onde será instalada a bomba, para o reservatório (2), cujo nível está a z_2 = 25 m de altura em relação à mesma superfície. A tubulação terá diâmetro interno de 80 mm, possuirá três cotovelos de 90° além de uma válvula globo para regular a vazão, e os trechos retos somarão 60 m de comprimento. O material do tubo será ferro galvanizado, com rugosidade média ε = 0,15 mm. A aceleração da gravidade no local da instalação vale 9,8 m/s^2. Os coeficientes de perda localizada podem ser admitidos K_{cot} = 0,7 (cotovelos), K_{val} = 9 (válvula totalmente aberta), K_{ent} = 0,5 (entrada) e K_{sai} = 1 (saída). Deseja-se utilizar uma bomba cuja carga é dada em função da vazão volumétrica, Q, pela expressão $h_b = 35 - 37000Q^2$, onde h_b está em metros e Q em m^3/s, e que tem rendimento de 72%. Para avaliar essa possibilidade, sua chefe lhe pede que você determine:

(a) A vazão volumétrica máxima no sistema (isto é, com a válvula totalmente aberta) **(*2,5 pontos*)**

(b) A potência consumida na condição determinada no item (a) **(*1,0 ponto*)**



Formulário geral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho \mathrm{d}\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\cdot\vec{n}\mathrm{d}A = 0 \qquad J''_{\text{A}} = -D_{\text{AB}}\frac{\partial C_{\text{A}}}{\partial x} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)-\frac{v_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2g}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g}+z_2\right)+h_b=h_{L_T} \qquad h_L = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad h_m = K\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=-2{,}0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad h_b=\frac{\dot{W}_b}{\gamma Q} \qquad \int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2018 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 2

1ª Questão (3,0 pontos)

(a) Parâmetros envolvidos: k, l, V, D_{AB}, ν. Conjunto de dimensões fundamentais: MLt.

$$k \doteq \frac{L}{t}, \qquad l \doteq L, \qquad V \doteq \frac{L}{t}, \qquad D_{\text{AB}} \doteq \frac{L^2}{t}, \qquad \nu \doteq \frac{L^2}{t}$$

A massa não aparece nas expressões.

Matriz dimensional:
Parâmetros repetentes:
l, V

	k	l	V	D_{AB}	ν
L	1	1	1	2	2
t	-1	0	-1	-1	-1

$5-2=3$ equações dimensionais

$$\Pi_1 = k l^a V^b \quad \Rightarrow \quad (Lt^{-1})(L)^a(Lt^{-1})^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -1-b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-1$$
$$[L]: \quad 1+a+b=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{k}{V}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

$$\Pi_2 = D_{\text{AB}} l^a V^b \quad \Rightarrow \quad (L^2t^{-1})(L)^a(Lt^{-1})^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -1-b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-1$$
$$[L]: \quad 2+a+b=0 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{D_{\text{AB}}}{lV}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

$$\Pi_3 = \nu l^a V^b \quad \Rightarrow \quad (L^2t^{-1})(L)^a(Lt^{-1})^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -1-b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-1$$
$$[L]: \quad 2+a+b=0 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$\boxed{\Pi_3 = \frac{\nu}{lV}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Outras escolhas de parâmetros repetentes conduziriam às seguintes respostas, também corretas:

Parâmetros repetentes	Π_1	Π_2	Π_3
l, D_{AB}	$\frac{kl}{D_{\text{AB}}}$	$\frac{Vl}{D_{\text{AB}}}$	$\frac{\nu}{D_{\text{AB}}}$
l, ν	$\frac{kl}{\nu}$	$\frac{Vl}{\nu}$	$\frac{D_{\text{AB}}}{\nu}$
D_{AB}, V	$\frac{k}{V}$	$\frac{lV}{D_{\text{AB}}}$	$\frac{\nu}{D_{\text{AB}}}$
V, ν	$\frac{k}{V}$	$\frac{lV}{\nu}$	$\frac{D_{\text{AB}}}{\nu}$

(b) Igualando o adimensional Π_2 no modelo e no protótipo:

$$\frac{\cancel{D_{\mathrm{AB}m}}}{l_m V_m} = \frac{\cancel{D_{\mathrm{AB}p}}}{l_p V_p} \quad \Rightarrow \quad V_m = V_p \left(\frac{l_p}{l_m}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right) = 1\,\mathrm{mm/s} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Chegamos à mesma conclusão se igualarmos o adimensional Π_3.

Igualando o adimensional Π_1:

$$\frac{k_m}{V_m} = \frac{k_p}{V_p} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \lambda_V = \frac{1}{\lambda_l} = \frac{1}{5} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

(c) Mudar a temperatura da água significa mudar os valores de D_{AB} e ν. Cada uma dessas propriedades depende de forma diferente da temperatura. Sendo assim, não seria possível igualar simultaneamente os adimensionais Π_2 e Π_3, pois ambos fornecem a mesma relação de escalas com λ_l e λ_V, isto é, $\lambda_{D_{\mathrm{AB}}} = \lambda_l \lambda_V = \lambda_\nu$. Portanto, não seria possível termos semelhança dinâmica se usarmos água a uma temperatura diferente de 37 °C. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

2ª Questão (3,5 pontos)

(a) Admitimos escoamento paralelo ao eixo dos tubos, $v_r = v_\theta = 0$, axissimétrico, $\partial v_z/\partial\theta = 0$ e permanente, $\partial v_z/\partial t = 0$. $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

A equação da continuidade fornece: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\cancel{v_r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \cancel{v_\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Portanto $v_z = v_z(r)$. As equações de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas se reduzem a

$$r: \quad 0 = -\rho g \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta: \quad 0 = -\rho g \cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

$$z: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \qquad \boxed{\textbf{0,4 pt}}$$

Integrando a primeira equação, $p = -\rho g r \operatorname{sen}\theta + f_1(z) = -\rho g y + f_1(z)$. Ou seja, a pressão varia hidrostaticamente na seção transversal e $\partial p/\partial z$ não é função de r ou θ. Derivando a equação na direção z em relação a z e lembrando que $\partial v_z/\partial z = 0$, conclui-se que $\partial p/\partial z$ também não é função de z. Portanto $\partial p/\partial z$ é constante.

Integrando a eq. da direção z em relação a r: $\quad r\dfrac{\partial v_z}{\partial r} = \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + C_1$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$

Integrando novamente:

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}} \tag{1}$$

Condições de contorno:

- $v_z = 0$ para $r = r_o \quad\Rightarrow\quad 0 = \dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) r_o^2 + C_1 \ln r_o + C_2$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$ (2)
- $v_z = 0$ para $r = r_i \quad\Rightarrow\quad 0 = \dfrac{1}{4\mu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) r_i^2 + C_1 \ln r_i + C_2$ $\boxed{\textbf{0,2 pt}}$ (3)

Fazendo (2) - (3):

$$\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(r_o^2 - r_i^2\right) + C_1 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad C_1 = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)} \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

Substituindo na eq. (3) e isolando C_2:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[r_i^2 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\ln r_i\right] \qquad \boxed{\textbf{0,2 pt}}$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na eq. (1) obtemos a expressão final do perfil de velocidades:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[r_i^2 - r^2 + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)\right]$$

(b) A vazão volumétrica é dada por:

$$Q = \int_A \vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = \int_{r_i}^{r_o} v_z\,2\pi r\,\mathrm{d}r \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

Substituindo a expressão encontrada no item anterior:

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\int_{r_i}^{r_o}\left[r_i^2 r - r^3 + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}(r\ln r - r\ln r_i)\right]\mathrm{d}r$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left\{\left[\frac{r_i r^2}{2}\right]_{r_i}^{r_o} - \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_i}^{r_o} + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\left(\left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_{r_i}^{r_o} - \ln r_i\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_i}^{r_o}\right)\right\} \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left\{\frac{r_i r_o^2}{2} - \frac{r_i^4}{2} - \frac{r_o^4}{4} + \frac{r_i^4}{4} + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\left[\frac{r_o^2}{2}\ln r_o \cancel{- \frac{r_i^2}{2}\ln r_i} - \frac{r_o^2}{4} + \frac{r_i^2}{4} + \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln r_i\left(\frac{r_o^2}{2}\right) \cancel{+ \ln r_i\left(\frac{r_i^2}{2}\right)}\right]\right\}$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left\{\frac{r_i r_o^2}{2} - \frac{r_i^4}{4} - \frac{r_o^4}{4} + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\left(\frac{r_i^2 - r_o^2}{4}\right) + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\cancel{\ln(r_o/r_i)}}\left[\cancel{\ln(r_o/r_i)}\frac{r_o^2}{2}\right]\right\}$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[\cancel{\frac{r_i r_o^2}{2}} - \frac{r_i^4}{4} - \frac{r_o^4}{4} + \frac{r_o^4}{2} - \cancel{\frac{r_i r_o^2}{2}} + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\left(\frac{r_i^2 - r_o^2}{4}\right)\right]$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[\frac{r_o^4 - r_i^4}{4} + \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\left(\frac{r_i^2 - r_o^2}{4}\right)\right]$$

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r_o^2 - r_i^2)\left[r_o^2 + r_i^2 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)}{\ln(r_o/r_i)}\right] \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

3ª Questão (3,5 pontos)

(a) Este é um exercício de condutos do tipo II. Escrevemos a eq. da energia entre os pontos (1) e (2):

$$\left(\cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g}} + z_1\right) - \left(\cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g}} + z_2\right) + h_b = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} + \left(\sum K\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 + h_b = \left(f\frac{L}{D} + K_{\text{ent}} + 3K_{\text{cot}} + K_{\text{val}} + K_{\text{sai}}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Substituindo $h_b = 35 - 37000Q^2$ e usando $\bar{V} = \dfrac{4Q}{\pi D^2}$, chegamos a

$$z_1 - z_2 + 35 - 37000Q^2 = \left(f\frac{L}{D} + K_{\text{ent}} + 3K_{\text{cot}} + K_{\text{val}} + K_{\text{sai}}\right)\frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}$$

Isolando Q e substituindo os valores numéricos, chegamos a uma expressão de Q em função de f:

$$Q = \sqrt{\frac{z_1 - z_2 + 35}{37000 + \frac{8(\sum K)}{\pi^2 D^4 g} + \frac{L}{D}\frac{8}{\pi^2 D^4 g}f}} = \sqrt{\frac{13}{6{,}244\times 10^4 + 1{,}514\times 10^6 f}} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Para resolver este problema, precisamos admitir um valor inicial para f, encontrar uma estimativa de Q com a expressão acima, calcular $Re = \dfrac{4Q}{\pi D \nu}$ $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$, e atualizar o valor o valor de f com a eq. de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

com $\epsilon/D = 0{,}15/80 = 1{,}875\times 10^{-3}$. Repetimos o processo até a convergência. Tomaremos como estimativa inicial de f o valor desta variável no regime completamente rugoso:

$$f_{\text{CR}} = \left[-2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7}\right)\right]^{-2} = 0{,}0230$$

A tabela ao lado mostra as iterações:

Iteração	f_i	Q (m³/s)	Re	f_{i+1}
0	0,0230	0,01156	$1{,}840\times 10^5$	0,0240
1	0,0240	0,01147	$1{,}825\times 10^5$	0,0241

O procedimento convergiu, e a vazão no sistema será $Q = 0{,}01147\,\text{m}^3/\text{s}$. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

(b) Com a vazão do sistema calculamos a carga da bomba:

$$h_b = 35 - 37000\times 0{,}01147^2 = 30{,}14\,\text{m} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

A potência consumida é dada por:

$$\dot{W}_c = \frac{\rho g Q h_b}{\eta} = \frac{998\times 9{,}8\times 0{,}01147\times 30{,}14}{0{,}72} = 4694\,\text{W} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$