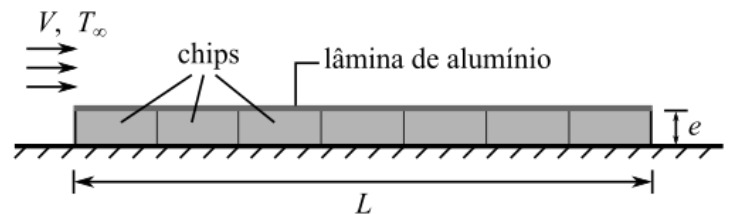


Duração: 120 minutos

**1ª Questão (4,0 pontos)**

A figura mostra uma placa com chips em sequência, de comprimento total  $L = 200$  mm, que deve ser resfriada pelo escoamento de ar na sua superfície superior. Os chips dissipam uniformemente uma potência de  $10^5$  W/m<sup>3</sup>, têm condutividade térmica igual a  $k_c = 1$  W/(m·K), espessura de  $e = 6$  mm e estão montados sobre uma superfície isolada. Sobre a superfície superior dos chips é colocada uma lâmina delgada de alumínio para proteção mecânica, e a montagem gera uma resistência de contato de  $10^{-3}$  m<sup>2</sup>·K/W entre os chips e a placa. O ar está a uma temperatura  $T_\infty = 26$  °C, e a temperatura local máxima admissível no interior de um chip é de 80 °C.



- (a) Qual é a mínima velocidade que o escoamento de ar deve ter para que o requisito de temperatura máxima local seja atendido? (3,0 pontos)
- (b) Caso seja utilizado um promotor de turbulência imediatamente antes da placa, qual será a máxima potência por unidade de volume que pode ser dissipada pelos chips, mantidos todos os outros parâmetros? *Sugestão:* admita numa primeira estimativa que a temperatura da lâmina de alumínio seja igual à da condição da letra (a). (1,0 ponto)

**2ª Questão (3,0 pontos)**

Uma esfera de rolamento, com diâmetro  $D = 10$  mm, feita de aço inoxidável ( $\rho_s = 7900$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_p = 477$  J/(kg·K),  $\varepsilon = 0,8$ ), é submetida a um tratamento térmico. Estando inicialmente a 24 °C, a esfera é suspensa no interior de um forno cujas paredes estão a 700 °C. Sabendo que o ar no interior do forno está a uma temperatura  $T_\infty = 330$  °C, e que a aceleração da gravidade no local vale 9,8 m/s<sup>2</sup>, determine:

- (a) A taxa de variação de temperatura da esfera no momento em que ela é colocada no forno; (1,5 ponto)
- (b) A temperatura da esfera após ela permanecer por um longo período dentro do forno. (1,5 ponto)

**3ª Questão (3,0 pontos)**

Você foi aprovado(a) em PME3238 e agora é hora de relaxar. Nada melhor do que fazer um bom uso das suas economias para passar uns dias com o seu “crush” numa praia do Nordeste. Vocês estão na praia e pedem uma cerveja de garrafa (600 ml), que vem estupidamente gelada (a 0 °C), devidamente acomodada num recipiente de isopor, como mostra a figura. Você quer aproveitar a ocasião para impressionar o seu “crush” exibindo seus conhecimentos de transferência de calor no momento em que a cerveja chega à mesa. A garrafa é feita de vidro ( $k_v = 1,4$  W/(m·K)) com espessura de 4 mm e diâmetro externo de 72 mm e o recipiente de isopor ( $k_i = 0,04$  W/(m·K)) tem uma altura de 19 cm e espessura de parede igual a 5 mm. Você usa um aplicativo no seu celular que o transforma numa câmera térmica para medir a temperatura na superfície externa do isopor, que vale 34 °C. Considerando que a temperatura da cerveja seja igual à da superfície interna da garrafa,



- (a) Estime a transferência de calor do ambiente para a cerveja no momento em que a garrafa chega à mesa. Considere somente a superfície lateral, desprezando as extremidades. (1,5 ponto)
- (b) Estranhamente, o seu “crush” resolve ir dar um mergulho bem na hora em que você exhibe o seu conhecimento respondendo a letra (a). Para não perder a oportunidade, você diz para ele(a) em quanto tempo no máximo precisa estar de volta, para que a cerveja não fique mais quente do que 6 °C, afinal de contas, ninguém merece cerveja quente. Quanto é este tempo, admitindo que a temperatura na superfície externa do isopor permaneça constante? As propriedades da cerveja podem ser admitidas iguais à da água ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_p = 4184$  J/(kg·K)). (1,5 ponto)

Convecção forçada – escoamento externo

Geometria	Condições	Correlação
Placa plana	Laminar; local; isotérmica; $T_f$ ; $0,6 \leq Pr \leq 50$	$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$
	Laminar; local; fluxo uniforme; $T_f$ ; $Pr \geq 0,6$	$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$
	Laminar; médio; isotérmica; $T_f$ ; $0,6 \leq Pr \leq 50$	$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$
	Turbulenta; local; isotérmica; $T_f$ ; $Re_x \leq 10^8$ ; $0,6 \leq Pr \leq 60$	$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$
	Turbulenta; local; fluxo uniforme; $T_f$ ; $0,6 \leq Pr \leq 60$	$Nu_x = 0,0308 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$
Cilindro	Turbulenta; médio; isotérmica; $T_f$ ; $Re_x \leq 10^8$ ; $0,6 \leq Pr \leq 60$	$\overline{Nu}_L = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$
	Misto; médio; isotérmica; $T_f$ ; $Re_x \leq 10^8$ ; $0,6 \leq Pr \leq 60$	$\overline{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$
	Médio; isotérmico; $T_f$ ; $Re_D Pr > 0,2$	$\overline{Nu}_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0,4 / Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$

Convecção natural

Geometria	Correlação	Restrições
Placas verticais	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Ra_L^{1/6}}{\left[1 + (0,492 / Pr)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$	Nenhuma
Placas inclinadas, com a superfície fria para cima ou com a superfície quente para baixo	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 Ra_L^{1/6}}{\left[1 + (0,492 / Pr)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$ , $g \rightarrow g \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq 60^\circ$
Placas horizontais, com a superfície quente para cima ou a superfície fria para baixo	$\overline{Nu}_L = 0,54 Ra_L^{1/4}$ ( $L = A_s / P$ )	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$
Placas horizontais, com a superfície fria para cima ou a superfície quente para baixo	$\overline{Nu}_L = 0,15 Ra_L^{1/3}$ ( $L = A_s / P$ )	$10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}$
	$\overline{Nu}_L = 0,52 Ra_L^{1/5}$ ( $L = A_s / P$ )	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$ $Pr \geq 0,7$

Cilindro horizontal	$\overline{Nu}_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0,559 / Pr)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$	$Ra_D \leq 10^{12}$
Esfera	$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0,469 / Pr)^{9/16}\right]^{4/9}}$	$Ra_D \leq 10^{11}$ $Pr \geq 0,7$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad R_{f,cond} = -k \frac{dT}{dx} \quad R_{f,cond} = \frac{L}{kA}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad R_{f,cond} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi kL}$$

$$q'''_{conv} = h(T_\infty - T_s) \quad R_{f,conv} = \frac{1}{hA} \quad Nu_L = \frac{hL}{k_f} \quad Re_L = \frac{VL}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$Ra_L = \frac{g\beta|T_s - T_\infty|L^3}{\nu\alpha} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad q = mc_p \frac{dT}{dt}$$

$$E_{crit} = \sigma T^4 \quad q'''_{rad} = \epsilon \sigma (T_{vis}^4 - T_s^4) \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

Método para achar raízes de um polinômio  $ax^4 + bx + c = 0$ :

$$\Delta_0 = 12ac \quad \Delta_1 = 27ab^2 \quad Q = \left( \frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2} \right)^{1/3} \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3a} \left( Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)}$$

$$x_{1,2} = -S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 + \frac{b}{aS}} \quad x_{3,4} = S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - \frac{b}{aS}}$$

Esfera: Volume =  $\pi D^3 / 6$ , Área superficial =  $\pi D^2$

**Gabarito da Prova 3**

**1ª Questão (4,0 pontos)**

(a) É preciso determinar em que ponto de um chip a temperatura máxima ocorrerá, e qual a relação dela com a temperatura local da lâmina de alumínio. No chip ocorre condução com geração uniforme, portanto a distribuição de temperaturas é ( $x$  é a direção paralela ao escoamento e  $y$  a direção perpendicular à placa):

$$\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dy} = -\frac{q'''}{k}y + C_1 \Rightarrow T(y) = -\frac{q'''}{2k}y^2 + C_1y + C_2 \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Aplicamos agora as condições de contorno:

$$\text{Em } y = 0, \quad \frac{dT}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

$$\text{Em } y = e, \quad T = T_{s,c} \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_{s,c} + \frac{q'''e^2}{2k} \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

$$\therefore T(y) = \frac{q'''}{2k}(e^2 - y^2) + T_{s,c}$$

A temperatura máxima acontece para  $y = 0$ ,  $T_{\text{máx}} = \frac{q'''e^2}{2k} + T_{s,c}$ . Portanto, no  $x$  de temperatura máxima, a temperatura na superfície do chip vale:

$$T_{s,c} = T_{\text{máx}} - \frac{q'''e^2}{2k} = 80 - \frac{10^5 \times 0.006^2}{2 \times 1} = 78,20^\circ\text{C} \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

Devido à resistência térmica de contato, a temperatura da superfície do chip é diferente da temperatura da lâmina de alumínio. Podemos calcular esta última com:

$$q''_y = \frac{T_{s,c} - T_{s,e}}{R''_{t,c}}$$

O fluxo é dado por  $q''_y = q'''e$  0,2 pt. Portanto:

$$T_{s,e} = T_{s,c} - q'''eR''_{t,c} = 78,20 - 10^5 \times 0,006 \times 10^{-4} = 77,6^\circ\text{C} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Agora podemos calcular a velocidade do ar necessária. O fluxo térmico na convecção é dado por  $q''_y = h(T_{s,e} - T_\infty)$ , portanto, sendo  $q''_y$  e  $T_\infty$  fixos,  $T_{s,e}$  será máximo quando  $h$  for mínimo. Como a coordenada  $x$  de temperatura máxima será aquela onde  $T_{s,e}$  for máxima, procuramos  $x$  para o qual  $h$  é mínimo. Este ponto será no final da placa, ou no ponto de transição da camada limite, caso isso aconteça. 0,3 pt

Vamos admitir inicialmente que o escoamento seja laminar em toda a placa, hipótese que verificaremos posteriormente. Neste caso, o ponto de  $h$  mínimo será o final da placa,  $x = L$ .

Para camada limite laminar com fluxo térmico uniforme, o número de Nusselt é dado por:

$$Nu_L = 0,453 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} = \left( 0,453 \frac{L^{1/2}}{\nu^{1/2}} Pr^{1/3} \right) V^{1/2} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

O coeficiente de transferência de calor por convecção é:

$$h = \frac{Nu_L k_f}{L} = \left( \frac{0,453 Pr^{1/3} k_f}{L^{1/2} \nu^{1/2}} \right) V^{1/2} \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

As propriedades do ar à temperatura de filme,  $T_f = (T_{s,e} + T_\infty)/2 = (77,60 + 26)/2 = 51,80^\circ\text{C} = 324,95 \text{ K}$ , são:

$$\nu = 1,840 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}, \quad k_f = 0,02815 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}), \quad Pr = 0,7035 \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Substituindo na lei do resfriamento de Newton:

$$q_y'' = \left( \frac{0,453 Pr^{1/3} k_f}{L^{1/2} \nu^{1/2}} \right) V^{1/2} (T_{s,e} - T_\infty) \Rightarrow V = L \nu \left[ \frac{q_y''}{0,453 Pr^{1/3} k_f (T_{s,e} - T_\infty)} \right]^2 = 3,869 \text{ m/s} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Verificando se o escoamento é laminar:

$$Re_L = \frac{VL}{\nu} = 4,206 \times 10^4 < 5 \times 10^5 \Rightarrow \text{laminar } \checkmark \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

(b) Nesta situação, calcularemos qual será o fluxo de calor por convecção e com ele a potência dissipada por unidade de volume. Admitindo inicialmente que a temperatura  $T_{s,e}$  seja aquela obtida no item (a), de modo que a temperatura de filme se mantém, e conseqüentemente as propriedades do ar e o número de Reynolds (já que a velocidade também não muda), podemos calcular o número de Nusselt, que para camada limite turbulenta com fluxo de calor uniforme é dado por:

$$Nu_L = 0,0308 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} = 137,0 \Rightarrow h = \frac{Nu_L k_f}{L} = 19,28 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad \boxed{0,5 \text{ pt}}$$

Assim, o fluxo térmico é:

$$q_y'' = h(T_{s,e} - T_\infty) = 995 \text{ W}/\text{m}^2 \Rightarrow q''' = \frac{q_y''}{e} = 1,658 \times 10^5 \text{ W}/\text{m}^3 \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Conferindo se a estimativa de  $T_{s,e}$  foi adequada:

$$T_{s,e} = T_{s,c} - q_y'' R_{t,c}'' = T_{\text{máx}} - \frac{q''' e^2}{2k} - q_y'' R_{t,c}'' = 76,02^\circ\text{C}$$

Este valor é próximo o suficiente da estimativa inicial para que não seja necessário fazer outra iteração. 0,2 pt

**2ª Questão (3,0 pontos)**

(a)

$$\dot{E}_{ac} = \dot{E}_e \Rightarrow mc_p \frac{dT}{dt} = q_{\text{rad}} + q_{\text{conv}} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{[\varepsilon\sigma A_s(T_{\text{viz}}^4 - T_s^4) + \bar{h}A_s(T_\infty - T_s)]}{\rho V c_p}$$

$$V = \frac{\pi D^4}{6}, \quad A_s = \pi D^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{6[\varepsilon\sigma(T_{\text{viz}}^4 - T_s^4) + \bar{h}(T_\infty - T_s)]}{\rho D c_p} \quad \boxed{0,5 \text{ pt}}$$

Temos os valores de todas as variáveis, exceto de  $\bar{h}$ . Avaliando as propriedades do ar à temperatura de filme,  $T_f = (330 + 24)/2 = 177^\circ\text{C} = 450 \text{ K}$ ,

$$\nu = 3,239 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad k_f = 0,03730 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}); \quad \alpha = 4,72 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = 0,6860; \quad \beta = 1/T_f = 2,222 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

$$Ra_D = \frac{g\beta(T_\infty - T_s)D^3}{\nu\alpha} = 4359 \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}} = 5,679 \quad \boxed{0,2 \text{ pt}}$$

Assim,

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_D k_f}{D} = 21,18 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad \boxed{0,2 \text{ pt}} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = 7,449^\circ\text{C}/\text{s} \quad \boxed{0,1 \text{ pt}}$$

(b) Em regime permanente:  $\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon\sigma(T_{\text{viz}}^4 - T_s^4) + \bar{h}(T_\infty - T_s) = 0$

$$T_s^4 + \frac{\bar{h}}{\varepsilon\sigma} T_s - \left( T_{\text{viz}}^4 + \frac{\bar{h}}{\varepsilon\sigma} T_\infty \right) = 0 \quad \boxed{0,3 \text{ pt}} \quad (1)$$

Precisamos calcular o valor de  $\bar{h}$  para esta condição e para isso precisamos da temperatura de filme. Admitiremos, como estimativa inicial, que  $T_s = (T_{\text{viz}} + T_\infty)/2 = 788 \text{ K}$ , de modo que  $T_f = (T_s + T_\infty)/2 = 695,5 \text{ K}$ . Para poupar o trabalho de interpolação, utilizarei  $T_f = 700 \text{ K}$ . As propriedades do ar a esta temperatura são:

$$\nu = 6,810 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad k_f = 0,05240 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}); \quad \alpha = 9,80 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = 0,695; \quad \beta = 1/T_f = 1,429 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Calculamos  $Ra_D$ ,  $\overline{Nu}_D$  e  $\bar{h}$  usando as mesmas expressões utilizadas no item (a). Os resultados são:

$$Ra_D = 388,1; \quad \overline{Nu}_D = 4,012; \quad \bar{h} = 21,03 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Substituindo na eq. (1), obtemos

$$T_s^4 + 4,635 \times 10^8 T_s - 1,1758 \times 10^{12} = 0 \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Empregando o método de solução do formulário, com coeficientes  $a = 1$ ,  $b = 4,635 \times 10^8$  e  $c = -1,1758 \times 10^{12}$ :

$$\Delta_0 = 12ac = -1,411 \times 10^3; \quad \Delta_1 = 27ab^2 = 5,801 \times 10^{18}$$

$$Q = \left( \frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2} \right)^{1/3} = 3,825 \times 10^6; \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3a} \left( Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)} = 106,84$$

$$T_s = -S + \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 + \frac{b}{aS}} = 929,1 \text{ K} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Refazendo os cálculos para  $T_f = (929,1 + 603)/2 = 766 \text{ K}$ , temos

$$\nu = 7,912 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}; \quad k_f = 0,05567 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}); \quad \alpha = 1,125 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr = 0,7042; \quad \beta = 1/T_f = 1,305 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$Ra_D = 468,6; \quad \overline{Nu}_D = 4,113; \quad \bar{h} = 22,90 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$a = 1; \quad b = 5,047 \times 10^8; \quad c = -1,201 \times 10^{12}$$

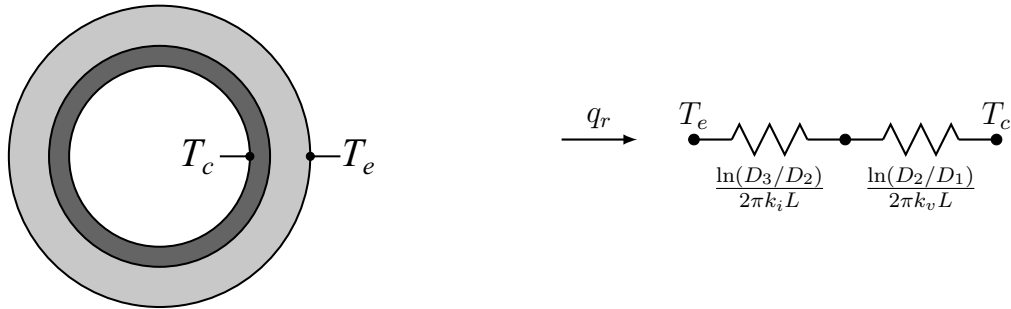
$$\Delta_0 = -1,441 \times 10^{13}; \quad \Delta_1 = 6,879 \times 10^{18}; \quad Q = 3,876 \times 10^6; \quad S = 115,13$$

$$T_s = 925,5 \text{ K} \quad \boxed{0,3 \text{ pt}}$$

Como a variação foi pequena em relação à iteração anterior ( $0,3\% < 5\%$ ), tomaremos esta como nossa resposta final.

3ª Questão 3,0 pontos)

(a)



$$D_1 = D_g - 2e_v = 0,072 - 2 \times 0,004 = 0,064 \text{ m}$$

$$D_2 = D_g = 0,072 \text{ m}$$

0,2 pt

$$D_3 = D_g + 2e_i = 0,072 + 2 \times 0,005 = 0,082 \text{ m}$$

$$R_{\text{tot}} = \frac{\ln(D_3/D_2)}{2\pi k_i L} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k_v L} = 2,794 \text{ K/W}$$

0,5 pt

$$q_r = \frac{T_e - T_c}{\frac{\ln(D_3/D_2)}{2\pi k_i L} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k_v L}} = \frac{34 - 0}{1,886} = 12,17 \text{ W}$$

0,8 pt

(b)  $\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \frac{T_e - T}{R_{\text{tot}}} \Rightarrow \int_0^6 \frac{dT}{T_e - T} = \int_0^{t_f} \frac{dt}{R_{\text{tot}} \rho V c_p}$

0,5 pt

0,5 pt

$$t_f = -R_{\text{tot}} \rho V c_p \ln \left( \frac{T_e - 6}{T_e - 0} \right) = -2,794 \times 1000 \times 6 \times 10^{-4} \times 4,184 \times \ln \left( \frac{34 - 6}{34 - 0} \right)$$

$$t_f = 1362 \text{ s} = 22,7 \text{ min}$$

0,5 pt