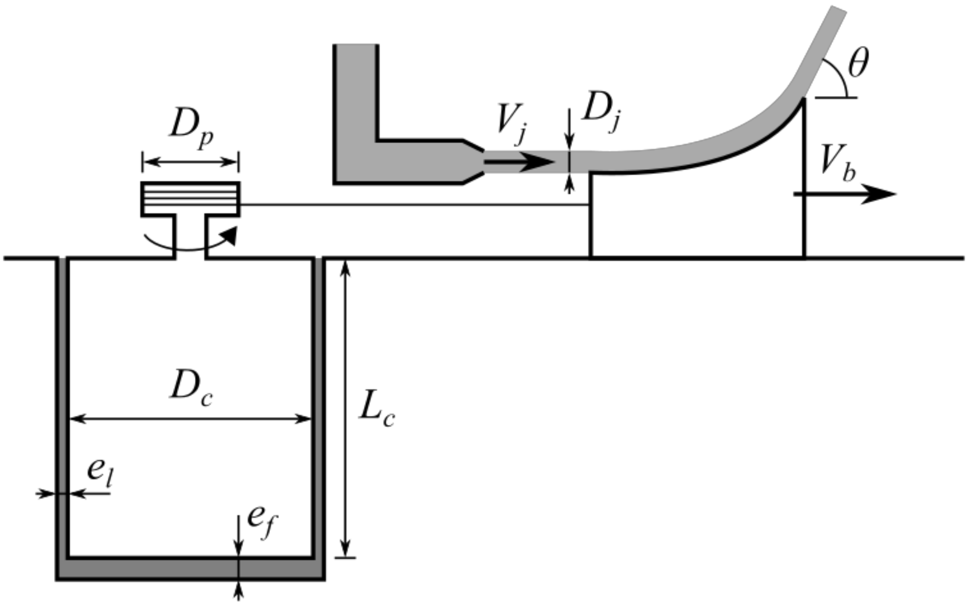
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME3238 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE 1ª PROVA 27/04/2017

Duração: 120 minutos

<u>1ª Questão (4,0 pontos)</u>

A figura mostra esquematicamente um jato de água, cuja massa específica é ρ_a, com diâmetro D_j e velocidade V_j, atingindo um bloco de massa M_b que desvia o jato de um ângulo θ em relação à horizontal. O bloco está apoiado sobre uma superfície plana e, como resultado da ação do jato, desenvolve uma velocidade constante V_b. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é c_{at} e o bloco está ligado por um fio ideal a um cilindro montado num mancal com óleo de viscosidade dinâmica μ_o. Este cilindro tem diâmetro D_c e comprimento L_c e a polia onde o fio se enrola tem diâmetro D_p. A espessura do filme de óleo é igual a e_l na lateral do cilindro e igual a e_f no fundo do cilindro. A aceleração da gravidade no local vale g, mas os efeitos gravitacionais sobre o jato de água podem ser desprezados.



(a) Desenvolva uma expressão para a tração do fio, T, para que o cilindro gire com velocidade angular constante ω, em função de D_c, L_c, D_p, e_l, e_f e μ_o. (***1,5 ponto***)

(b) Expresse a tração do fio, T, em função de V_b, g, M_b, c_{at}, ρ_a, V_j, D_j e θ. (***1,5 ponto***)

(c) Dados os valores numéricos dos parâmetros:

$\rho_a = 998$ kg/m^3	$\mu_o = 0{,}2$ Pa·s	$M_b = 5$ kg	$c_{at} = 0{,}17$
$V_j = 25$ m/s	$D_j = 20$ mm	$\theta = 75°$	$D_p = 40$ mm
$D_c = 100$ mm	$L_c = 150$ mm	$e_l = 1$ mm	$e_f = 2$ mm

e sabendo que a aceleração da gravidade no local vale $g = 9{,}8$ m/s^2, determine o valor de V_b. (***1,0 ponto***)

2ª Questão (3,0 pontos)

O campo de velocidades dado em coordenadas polares (r, θ) por:

$$\vec{V} = -\frac{A}{r}\hat{e}_r + \frac{B}{r}\hat{e}_\theta$$

com A e B constantes positivas e $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$ versores nas direções r e θ respectivamente, é uma boa aproximação do campo de escoamento nas vizinhanças de um tornado que gira no sentido anti-horário (como acontece no hemisfério norte) com centro na origem do sistema de coordenadas. Para este campo de velocidades, determine:

(a) A expressão do campo de aceleração. (***1,0 ponto***)

(b) As equações das linhas de corrente, trajetórias e linhas de emissão. (***1,0 ponto***)

(c) A expressão do campo de pressão, admitindo que a pressão ao longe seja p_∞ e que a massa específica do fluido seja constante e igual a ρ. (***1,0 ponto***)

Obs: Note que para este campo de velocidades há uma singularidade na origem do sistema de coordenadas, por isso a expressão é adequada para as vizinhanças do tornado, mas não muito próximo ao seu centro.

3ª Questão (3,0 pontos)

Os chamados "piscinões" são soluções comumente utilizadas para lidar com o problema de macrodrenagem de águas pluviais na região metropolitana de São Paulo. Um piscinão nada mais é do que um grande reservatório que realiza a função que seria das várzeas dos rios (hoje ocupadas com construções urbanas), acumulando o excesso de água proveniente das chuvas e posteriormente devolvendo este volume aos rios.

Em fevereiro de 2017 foi inaugurado o vigésimo e maior piscinão da cidade de São Paulo: o Piscinão Guamiranga, localizado na Vila Prudente. Este piscinão tem capacidade de 850 mil metros cúbicos e ocupa uma área de 70 mil metros quadrados. Ele capta água do rio Tamanduateí por meio de quatro comportas e dispõe de seis bombas (sendo uma reserva), de capacidade de 850 L/s cada, para fazer a devolução da água acumulada ao rio após a parada da chuva.

(a) Analise um cenário de chuva torrencial, no qual caem na região 150 mm de chuva num intervalo de 2 horas. Considerando que o reservatório esteja inicialmente vazio e que as bombas permaneçam desligadas, qual é a máxima vazão volumétrica média que pode ser desviada do rio para o piscinão sem que o mesmo transborde neste intervalo? (***2,0 pontos***)

(b) Considere agora um cenário onde inicialmente o reservatório está completamente cheio e as comportas permaneçam fechadas e o tempo seco. Quantas horas são necessárias para drenar completamente o piscinão utilizando cinco bombas na capacidade nominal? (***1,0 ponto***)

Formulário geral

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \qquad p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{constante} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho \mathrm{d}\forall + \int_{SC}\rho\vec{V}_r\cdot\vec{n}\mathrm{d}A = 0$$

$$p_1 = \gamma h + p_2 \qquad \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)f \qquad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial f}{r\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = \hat{e}_\theta \quad \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{e}_r \qquad \frac{\mathrm{d}r}{v_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{v_\theta} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\vec{V}\rho \mathrm{d}\forall + \int_{SC}\vec{V}\rho\vec{V}_r\cdot\vec{n}\mathrm{d}A = \sum\vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r(r,\theta,z,t) \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v_\theta(r,\theta,z,t) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z(r,\theta,z,t)$$

$$F_{at} = c_{at}N$$

PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2017 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 1

1ª Questão (4,0 pontos)

(a) O equilíbrio de momentos aplicado no cilindro fornece

$$M = \frac{TD_p}{2} = M_{v,l} + M_{v,f},$$

onde $M_{v,l}$ e $M_{v,f}$ são os momentos devido às forças viscosas agindo na lateral e no fundo do cilindro respectivamente. Assumindo perfil de velocidades linear entre a superfície do cilindro e a superfície do mancal, podemos calcular esses momentos viscosos.

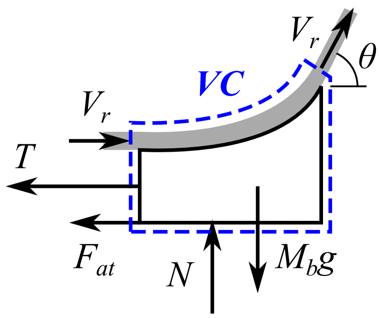
$$M_{v,l} = \int_{A_l} \tau r \, \mathrm{d}A = \int_{A_l} \mu_o \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{D_c}{2} \, \mathrm{d}A = \int_{A_l} \mu_o \frac{\omega D_c}{2e_l}\frac{D_c}{2} \, \mathrm{d}A = \mu_o \frac{\omega D_c^2}{4e_l}\pi D_c L_c = \frac{\pi}{4}\frac{\mu_o \omega D_c^3 L_c}{e_l} \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$M_{v,f} = \int_{A_f} \tau r \, \mathrm{d}A = \int_{A_f} \mu_o \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} r \, \mathrm{d}A = \int_{A_f} \mu_o \frac{\omega r}{e_f} r \, \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{D_c}{2}} \mu_o \frac{\omega}{e_f} 2\pi r^3 \, \mathrm{d}r$$

$$M_{v,f} = \frac{2\pi \mu_o \omega}{e_f}\left(\frac{D_c^4}{4 \times 2^4}\right) = \frac{\pi}{32}\frac{\mu_o \omega D_c^4}{e_f} \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2}{D_p}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\mu_o \omega D_c^3 L_c}{e_l} + \frac{\pi}{32}\frac{\mu_o \omega D_c^4}{e_f}\right) = \frac{\pi \mu_o \omega D_c^3}{2D_p}\left(\frac{L_c}{e_l} + \frac{D_c}{8e_f}\right) \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$

(b) Aplicaremos a equação da conservação da quantidade de movimento num volume de controle que engloba o bloco e se move solidário a ele, como mostrado na figura.



Para um volume de controle móvel e não acelerado, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}\rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} (\vec{V}_{\forall C} + \vec{V}_r)\rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC} (\vec{V}_{\forall C} + \vec{V}_r)\rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \sum \vec{F}$$

Como $\vec{V}_{\forall C}$ é constante e o regime é permanente,

$$\vec{V}_{\forall C}\cancelto{0\ \text{(Continuidade)}}{\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A\right)} + \cancelto{0\ \text{(reg. perm.)}}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho \, \mathrm{d}\forall} + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \sum \vec{F}$$

$$\int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \sum \vec{F}$$

Chamando a área transversal do jato de $A_j = \pi D_j^4/4$, temos na direção x:

$$-\rho_a V_r^2 A_j + \rho_a V_r^2 A_j \cos\theta = -T - F_{at} = -T - c_{at} N \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

E na direção y:

$$\rho_a V_r^2 A_j \operatorname{sen}\theta = -M_b g + N \quad \Rightarrow \quad N = M_b g + \rho_a V_r^2 A_j \operatorname{sen}\theta \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Substituindo a expressão de N e a expressão da velocidade relativa do jato em relação ao bloco em termos da sua velocidade absoluta e da velocidade do bloco, $V_r = V_j - V_b$, na equação da direção x e isolando T:

$$\rho_a V_r^2 A_j (1 - \cos\theta) = T + c_{at} M_b g + c_{at} \rho_a V_r^2 A_j \operatorname{sen}\theta$$

$$T = (V_j - V_b)^2 \rho_a \frac{\pi D_j^2}{4} (1 - \cos\theta - c_{at} \operatorname{sen}\theta) - c_{at} M_b g \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

(c) A velocidade tangencial da polia é igual à velocidade do bloco, V_b, e ela está relacionada à velocidade angular do cilindro, ω, pela relação:

$$\omega = \frac{2V_b}{D_p}$$

Substituindo esta relação na expressão de T encontrada no item **(a)** e igualando à expressão encontrada no item **(b)**, obtemos:

$$\frac{\pi \mu_o D_c^3}{D_p^2} \left(\frac{L_c}{e_l} + \frac{D_c}{8 e_f} \right) V_b = (V_j - V_b)^2 \rho_a \frac{\pi D_j^2}{4} (1 - \cos\theta - c_{at} \operatorname{sen}\theta) - c_{at} M_b g \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Substituindo os valores numéricos fornecidos:

$$\frac{\pi \times 0{,}2 \times 0{,}1^3}{0{,}04^2} \left(\frac{0{,}15}{0{,}001} + \frac{0{,}1}{8 \times 0{,}002} \right) V_b =$$

$$= (25 - V_b)^2 \times 998 \times \frac{\pi \times 0{,}02^2}{4} (1 - \cos 75° - 0{,}17 \times \operatorname{sen} 75°) - 0{,}17 \times 5 \times 9{,}8$$

$$61{,}36 V_b = (625 - 50 V_b + V_b^2) \times 0{,}1809 - 8{,}33 \quad \Rightarrow \quad V_b^2 - 389{,}19 V_b + 578{,}95 = 0$$

Resolvendo esta equação de segundo grau, obtemos $V_{b1} = 387{,}70\,\mathrm{m/s}$ e $V_{b2} = 1{,}49\,\mathrm{m/s}$. Como V_b tem que ser menor do que V_j, a resposta é

$$V_b = 1{,}49\,\mathrm{m/s} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

2ª Questão (3,0 pontos)

(a) O campo de aceleração é dado por:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

Como $v_z = 0$, chegamos a:

$$\vec{a} = \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right]\hat{e}_r + \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right]\hat{e}_\theta$$

Calculando as componentes do campo de aceleração:

$$a_r = \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{A}{r}\left(+\frac{A}{r^2}\right) - \frac{B^2}{r^3} = -\frac{A^2+B^2}{r^3} \qquad \boxed{0{,}5\ \text{pt}}$$

$$a_\theta = \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{A}{r}\left(-\frac{B}{r^2}\right) - \frac{AB}{r^3} = 0 \qquad \boxed{0{,}5\ \text{pt}}$$

$$\therefore \quad \vec{a} = -\left(\frac{A^2+B^2}{r^3}\right)\hat{e}_r$$

(b) A linha de corrente é calculada por

$$\frac{\mathrm{d}r}{v_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{v_\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{-A/r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{B/r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = -\frac{B}{A}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

Integrando os dois lados:

$$\theta = -\frac{B}{A}\ln r + C_1 \qquad (C_1 \text{ é uma constante}) \quad \boxed{0{,}5\ \text{pt}}$$

Trajetórias e linhas de emissão coincidem com as linhas de corrente, pois o escoamento é permanente. $\boxed{0{,}5\ \text{pt}}$

(c) A equação de Bernoulli fornece: $p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \cancel{\rho g z} = C_2$ $\qquad$ (C_2 é uma constante)

Do campo de velocidades: $V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(-\frac{A}{r}\right)^2 + \left(\frac{B}{r}\right) = \frac{A^2+B^2}{r^2}$ $\boxed{0{,}3\ \text{pt}}$

Para um ponto ao longe: $p + \frac{1}{2}\rho\cancel{\left(\frac{A^2+B^2}{r^2}\right)} = p_\infty = C_2$ $\boxed{0{,}3\ \text{pt}}$

Assim, o campo de pressão é dado por:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2+B^2}{r^2}\right) \quad \boxed{0{,}4\ \text{pt}}$$

3ª Questão (3,0 pontos)

(a) Adotaremos um volume de controle que engloba o volume de água contido no piscinão e é, portanto, deformável. Além disso, o escoamento é incompressível. Nessas condições, a equação da conservação de massa fornece:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\,\mathrm{d}\forall+\int_{SC}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\forall}{\mathrm{d}t}+\int_{SC}\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\forall}{\mathrm{d}t}=Q_{\text{chuva}}+Q_{\text{rio}} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Integrando no tempo: $\forall_p = \forall_{\text{chuva}} + Q_{\text{rio}}\Delta t$, onde $\forall_p$ é o volume armazenado no piscinão, que não pode ultrapassar $850000\,\mathrm{m}^3$. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

O volume de água devido à chuva sobre o reservatório é o produto do índice pluviométrico com a área do piscinão. Portanto

$$\forall_{\text{chuva}} = 0{,}15\times 70000 = 10500\,\mathrm{m}^3 \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Assim, a máxima vazão média desviada do rio neste período é:

$$Q_{\text{rio}} = \frac{850000-10500}{2\times 3600} = 116{,}6\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

(b) Aplicamos novamente a equação da conservação de massa, integramos e encontramos:

$$-\forall_p + 5Q_b\Delta t = 0 \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

onde Q_b é a vazão de cada bomba. Isolando Δt:

$$\Delta t = \frac{\forall_p}{5Q_b} = \frac{850000}{5\times 0{,}850} = 2\times 10^5\,\mathrm{s} = 55{,}55\,\mathrm{h} \quad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$