Transferência de Calor por Condução

1 Equação da taxa de condução

$$\underline{\text{Lei de Fourier}}^*: \qquad q''_x = -k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \qquad q_x = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

O fluxo térmico é uma grandeza direcional (vetorial).

Em três dimensões:

$$\vec{q''} = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right)$$

*Empírica, comentar sobre sinal

1.1 Condutividade térmica

- Propriedade de transporte da matéria
- $k_{\text{sólidos}} > k_{\text{líquidos}} > k_{\text{gases}}$
- $k_{\text{metais puros}} > k_{\text{ligas metálicas}} > k_{\text{não metais}}$
- $[k] = \mathrm{W/(m \cdot K)}$
- Outras propriedades importantes:
  - capacidade térmica: ρc_p
  - difusividade térmica†: $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}$

†capacidade de condução / capacidade de armazenamento

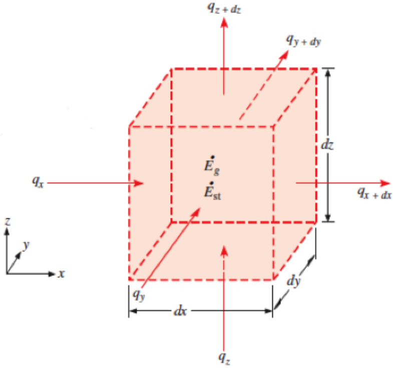
Exercício 1

As temperaturas das superfícies interna e externa de uma janela de vidro, com espessura de $5\,\mathrm{mm}$, são de $15\,°\mathrm{C}$ e $5\,°\mathrm{C}$ respectivamente. Qual é a perda de calor através de uma janela com dimensões de $1\,\mathrm{m}$ de largura por $3\,\mathrm{m}$ Assuma que a distribuição de temperaturas ao longo da espessura da janela é linear e que a condutividade térmica do vidro é constante e igual a $1{,}4\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$.

2 Equação da difusão do calor

Objetivo: obter a distribuição de temperaturas

Aplicaremos a conservação da energia e a lei de Fourier num $\cancel{V}C$ diferencial de dimensões $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$:



Energia gerada no $\cancel{V}C$:

$$\dot{E}_g = q''' \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Energia acumulada no $\cancel{V}C$:

$$\dot{E}_a = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1^{a} Lei: $\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_a$

$$q_x + q_y + q_z + q'''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - q_{x+\mathrm{d}x} - q_{y+\mathrm{d}y} - q_{z+\mathrm{d}z} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z + q'''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

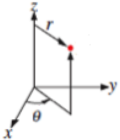
$$\text{Lei de Fourier:}\quad \begin{cases} q_x = -k\mathrm{d}y\mathrm{d}z\dfrac{\partial T}{\partial x} \\[2ex] q_y = -k\mathrm{d}x\mathrm{d}z\dfrac{\partial T}{\partial y} \\[2ex] q_z = -k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Para k constante: $$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Para regime estacionário $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$: $$\nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = 0$$

Em coordenadas cilíndricas:



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.1 Condições de contorno

Uma condição inicial e duas de contorno para cada coordenada espacial.
Tipos:

a) **Dirichlet (1ª espécie):** temperatura é dada.

$$T(0) = T_{\text{sup}}$$

b) **Neumann (2ª espécie):** fluxo térmico dado.

$$-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = q''_{\text{sup}}$$

Obs: para superfície adiabática (isolada) $\Rightarrow q''_{\text{sup}} = 0$

c) **Robin (3ª espécie):** Troca de calor por convecção na fronteira.

$$-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = h[T_\infty - T(0)]$$

Exercício 2

A passagem de uma corrente elétrica através de um longo bastão condutor de raio r_i e condutividade térmica k_r resulta em um aquecimento volumétrico uniforme a uma taxa q'''. O bastão condutor é coberto por um revestimento de material não-condutor elétrico, com raio externo r_o e condutividade térmica k_c. A superfície externa é resfriada pelo contato com um fluido em escoamento. Para condições de estado estacionário, escreva as formas apropriadas da equação do calor para o bastão e para o revestimento. Enuncie as condições de contorno apropriadas para a solução dessas equações.