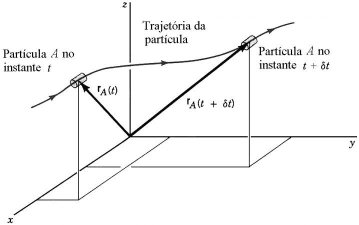
Cinemática dos Fluidos

Trataremos da cinemática do movimento (análise da velocidade e da aceleração) e também a descrição e visualização do movimento.

1 O campo de velocidades

A velocidade de uma partícula A é $\vec{V}_A = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_A}{\mathrm{d}t}$.



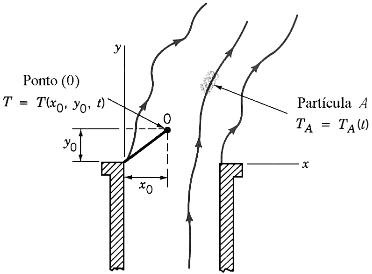
Especificando a velocidade de todas as partículas fluidas, obtemos o campo de velocidades,

$$\vec{V}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\hat{i} + v(x,y,z,y)\hat{j} + w(x,y,z,t)\hat{k}$$

1.1 Descrições lagrangeana e euleriana

Descrição lagrangeana: Acompanha-se a partícula fluida na sua trajetória. Variáveis desta partícula são monitoradas ao longo do tempo.

Descrição euleriana: Fixa-se o ponto no espaço e observa-se as partículas fluidas que por ele passam. Variáveis são descritas em função das coordenadas espaciais e do tempo, utiliza-se o conceito de campo.



1.2 Escoamentos permanentes e transientes

Escoamento permanente é aquele para o qual as grandezas num dado ponto não variam com o tempo. Ou seja, numa descrição Euleriana, para qualquer grandeza G, $\dfrac{\partial G}{\partial t} = 0$.

Escoamentos não permanentes são denominados transientes, ou transitórios, e podem ser periódicos, não periódicos, ou aleatórios.

1.3 Linhas de corrente, de emissão e trajetórias

<u>Linha de corrente</u>: linha contínua tangente ao campo de velocidade. Se o escoamento é permanente, as linhas de corrente são fixas no espaço.

Pode ser obtida resolvendo-se a equação $\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{V} = 0$:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u & v & w \end{vmatrix} = (w\mathrm{d}y - v\mathrm{d}z)\hat{i} + (u\mathrm{d}z - w\mathrm{d}x)\hat{j} + (v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y)\hat{k}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} \qquad \begin{matrix}\text{Em coordenadas} \\ \text{cilíndricas}\end{matrix} : \quad \frac{\mathrm{d}r}{v_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{v_\theta} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

<u>Linha de emissão</u>: lugar geométrico das partículas do escoamento que passaram por um determinado ponto. Ex: visualização com tinta.

<u>Trajetória</u>: linha traçada por uma dada partícula que escoa de um ponto para outro. Ex: fotografia de longa exposição de partícula marcada. Suas equações podem ser obtidas resolvendo-se:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x, y, z, t) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x, y, z, t) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x, y, z, t)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r(r,\theta,z,t) \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v_\theta(r,\theta,z,t) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z(r,\theta,z,t)$$

Em escoamentos permanentes, linhas de corrente, de emissão e trajetória coincidem.

Exercício 1

Um escoamento tem um campo de velocidades descrito por $\vec{V} = (U_0 + At)\hat{i} + V_0\hat{j}$. Calcule as linhas de corrente e as trajetórias deste escoamento. Qual a linha de emissão para um centro de emissão $N(x_N, y_N, z_N)$?

2 O campo de aceleração

Na descrição lagrangeana, a aceleração é determinada da mesma forma que na mecânica dos corpos rígidos. Na descrição euleriana, temos que considerar a dependência da velocidade com relação ao espaço.

2.1 Derivada material

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}[x(t), y(t), z(t), t]$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{V}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\text{Componentes de } \vec{a}\text{:} \begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ a_z = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

O operador $\mathrm{D}()/\mathrm{D}t$ é chamado <u>derivada material</u> ou <u>substantiva</u>.

Usando notação compacta: $\dfrac{\mathrm{D}()}{\mathrm{D}t} = \underbrace{\dfrac{\partial()}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{(\vec{V}\cdot\nabla)()}_{\text{derivada convectiva}}$

Em coordenadas cilíndricas, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{r\partial\theta}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$. Além disso, é preciso lembrar que $\dfrac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$ e $\dfrac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$. Portanto

$$\text{Componentes de } \vec{a}\text{:} \begin{cases} a_r = \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta^2}{r} + v_z \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ a_\theta = \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r v_\theta}{r} + v_z \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ a_z = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$

Exercício 2

Dado o campo de velocidades: $\vec{V} = (6 + 2xy + t^2)\,\hat{i} - (xy + 10t)\,\hat{j} + 2t\,\hat{k}$, obtenha as expressões das acelerações local, convectiva e total. Calcule a aceleração no ponto $(1, 0, 1)$, no instante $t = 1$.

Exercício 3

Para o campo de velocidades $\vec{V} = V_0 \dfrac{x}{k}\,\hat{i} + V_0 \dfrac{y}{k}\,\hat{j}$,

a) Calcule a aceleração e mostre que ela é radial.

b) Se $k = 2\,\mathrm{m}$, qual deve ser o valor de V_0 para que a aceleração total em $(1, 1, 0)$ seja de $4\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$?

c) Determine as linhas de corrente e as trajetórias.